L Dec 1726.2

Bound

1 6 1906

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters shall be spent for books and one quarter be added to the principal.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

MIT 7 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.

Digitized by Google

INHALT.

Seite

Gottl. Friedr. Lipps, Die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes 1

M. Siegfried, Eine neue Reaktion amphoterer Körper 34

Carl Chun, Über ein noch zu erforschendes unterseeisches Korallenriff im zentralen Indischen Ozean. 45

A. Mayer, Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. II. Mitteilung 49

J. Thomae, Bemerkung über das elektrische Potential bei geradlinigen Elektroden 68

J. Thomae, Winkeltreue Abbildung einer durch zwei aufeinander senkrecht stehende geradlinige Schlitze begrenzten Ebene auf ein Rechteck 79

W. Scheibner, Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation . . 87

M. Krause, Zur Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Größen 107

Gerhard Kowalewski, Über gewisse Scharen unendlicher Reihen und eine Verallgemeinerung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz 154

Friedrich Engel, Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen 161

K. Żorawski, Notiz über Translationsflächen 233

G. F. Lipps, Bericht über das Fechner-Archiv 247

A. Mayer, Nachträgliche Bemerkung zu meiner II. Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz. 313

Johannes Friedel, Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung. 315

E. von Meyer, Über Konstitution und Bildungsweise der Kyanalkine genannten trimolekularen Nitrile 324

G. Scheffers, Ebene Kurvennetze ohne Umwege. 353

A. von Öttingen, Die Mängel der psychischen Fähigkeit, perspektivische Bilder richtig aufzufassen. Mit 7 Figuren . . 360

W. Scheibner, Zur Auflösung der Ikosaedergleichung 372

G. F. Lipps, Zwei Briefe von Wilhelm Weber an G. Th. Fechner über das psychische Maß 388

Verzeichnis der Mitglieder der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. I

Verzeichnis der eingegangenen Schriften VII

L. Sax 1726.9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

I.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1905.

Digitized by Google

Lowell Fund

SITZUNG VOM 9. JANUAR 1905.

Vorlage eines aus London eingetroffenen Berichts über die 2. General-Versammlung der Internationalen Assoziation der Akademien. Die Geschäfte der vorsitzenden Akademie für das Triennium 1905, 1906, 1907 sind nach einem Schreiben aus Wien inzwischen von der dortigen kais. Akademie der Wissenschaften übernommen worden.

Es wird beschlossen, das Fechner-Archiv, dessen Inhalt von Herrn Dr. Lipps geordnet worden ist, nach Art des Möbius-Archivs einzurichten und auszustatten.

Aus den für das Jahr 1904 zur Verfügung stehenden Erträgnissen der Mende-Stiftung wird dem a. o. Mitglied Herrn Correns ein Beitrag zur Fortsetzung seiner Versuche über Vererbung zugebilligt.

Der Vorschlag, Herrn Prof. Dr. Rabl zum o. Mitglied zu ernennen, wird von der Klasse einstimmig angenommen.

Herr Bruns meldet eine Abhandlung von Herrn Dr. Lipps „Die Bestimmmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes“ zum Abdruck in den Berichten an.

Die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes.

Von

Gottl. Friedr. Lipps.

1. Das Kriterium der Abhängigkeit.

Bei der Untersuchung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes kann es sich ebensowohl um das Vorhandensein oder Fehlen eines seinem Wesen nach unveränderlichen Merkmals wie auch um das Auftreten von Abstufungen oder besonderen Ausgestaltungen eines veränderlichen Merkmals handeln.

Um beide Fälle gemeinsam behandeln zu können, treffe ich folgende Festsetzungen. Irgend zwei auf ihre Abhängigkeit zu

Digitized by Google

prüfende Merkmale sollen durch a und b bezeichnet werden. Sind die Merkmale unveränderlich, so daß lediglich ihr Vorhandensein oder Fehlen in Betracht kommt, so soll das Vorhandensein und das Fehlen von a durch a_1 und a_2, das Vorhandensein und das Fehlen von b durch b_1 und b_2 angedeutet werden. Sind hingegen die Merkmale der Abstufung oder irgend welcher Spezialisierung fähig, so sollen die verschiedenen Formen von a durch a_1, a_2, $a_3 \ldots a_r$, diejenigen von b durch b_1, b_2, $b_3 \ldots b_s$ angegehen werden, wo die Reihenfolge der a und der b entweder ohjektiv hegründet ist oder heim Fehlen eines ohjektiv ordnenden Prinzips auf subjektiver Willkür beruht. Das Auftreten und Ausbleihen eines unveränderlichen Merkmals läßt sich auf diese Weise der Form nach als eine Spezialisierung des allgemeinen Falls, wo r Glieder a_1, a_2, $a_3 \ldots a_r$ und s Glieder b_1, b_2, $b_3 \ldots b_s$ zu unterscheiden sind, auffassen. Bezeichnet $\varkappa$ eine Zahl aus der Reihe 1, 2, 3 ... r und λ eine Zahl aus der Reihe 1, 2, 3 ... s, so wird ein beliehiges Glied der a-Reihe durch $a_\varkappa$ und ein heliebiges Glied der b-Reihe durch b_λ angegeben.

Die Merkmale a und b sind nun von einander abhängig, wenn die $a_\varkappa$ und b_λ in ihrem Auftreten von einander abhängig sind. Ist dies nicht der Fall, so sind die Merkmale a und b von einander unabhängig.

So besteht am ebenen Dreieck Ahhängigkeit zwischen der Gleichheit der Seiten und der Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel, da das Auftreten gleicher Seiten die Gleichheit der gegenüherliegenden Winkel und das Auftreten ungleicher Seiten die Verschiedenheit der gegenüherliegenden Winkel zur Folge hat. Hier kann a_1 (das Vorhandensein gleicher Seiten) nur im Verein mit b_1 (dem Vorhandensein gleicher Winkel) und a_2 (das Fehlen gleicher Seiten) nur im Verein mit b_2 (dem Fehlen gleicher Winkel) vorkommen, woraus die Ahhängigkeit zwischen a (der Gleichheit der Seiten) und b (der Gleichheit der Winkel) folgt. Wenn hingegen a_1 und a_2 ehenso mit b_1 wie mit b_2 vereint vorkommen kann, so ist a unabhängig von b. Dies gilt z. B. bezüglich der Gleichheit eines hestimmten Seitenpaares und der Gleichheit eines bestimmten Winkelpaares am Viereck.

Es ist ferner die Unterscheidung der Farbentöne ahhängig von dem Helligkeitsgrade der Farbenempfindung, da nur bei mittlerer Helligkeit alle Farhentöne hervortreten, um sich mit zunehmender Helligkeit im Weiß, mit abnehmender Helligkeit im

Digitized by Google

Schwarz zu verlieren. Den von Schwarz zu Weiß führenden Helligkeitsstufen a_1, a_2, a_3 ... a_r gehört demnach eine anfänglich wachsende und dann wieder abnehmende Anzahl von Gliedern aus dem Gebiete der Farbentöne b_1, b_2, b_3 ... b_s zu. Im Bereiche der Tonwahrnehmungen ist dagegen, wenn man von dem Grenzgebiete der höchsten und tiefsten Töne absieht, das Merkmal der Höhe oder Tiefe von dem Merkmal der Stärke oder Schwäche unabhängig, da ein Ton in jeder Höhenlage beliebige Grade der Stärke oder Schwäche annehmen und demnach jedes a_x mit jedem b_λ vereint auftreten kann.

In anderer Form bietet sich die Abhängigkeit dar, die zwischen dem Volumen eines Gases und dem auf das Gas ausgeübten Druck besteht. Dem Mariotteschen Gesetze zufolge ist nämlich das Produkt aus Druck und Volumen bei konstanter Temperatur gleichfalls konstant, so daß einer Abnahme des Drucks eine Zunahme des Volumens und umgekehrt entspricht. Zu aufsteigenden Gliedern der a-Reihe gehören hier folglich fallende Glieder der b-Reihe.

Eine in gleichem Sinne erfolgende Änderung der a_x und der b_λ zeigt sich hingegen in der Regel an den Organen lebender Wesen, sofern die Vergrößerung des einen Organs durchschnittlich von einer Vergrößerung der anderen Organe begleitet zu sein pflegt.

Abhängigkeiten der letzteren Art haben die erste Inangriffnahme des Problems der Abhängigkeitsbestimmung durch Galton und Pearson veranlaßt. Galton hat hierbei eine Auffassungsweise zugrunde gelegt, die er selbst mit folgenden Worten kennzeichnet[1]): „Two variable organs are said to be correlated when the variation of the one is accompanied on the average by more or less variation of the other and in the same direction. Thus the length of the arm is said to be correlated with that of the leg, because a person with a long arm has usually a long leg and conversely.“ Eine ähnliche jedoch allgemeiner gefaßte Definition gibt Pearson[2]): „Two organs in the same individual, or in a connected pair of individuals are said to be correlated, when a series of the first organ of a definite size being selected, the mean of the sizes of the corresponding second organ is found

1) Correlations and their measurement, chiefly from anthropometric data; Proceedings Roy. Soc. London; Vol. XLV, 1888, S. 135.

2) On the mathematical theory of evolution; Philosophical Transactions Roy. Soc. London; Vol. 187 A, 1896, S. 256, 257.

to be a function of the size of the selected first organ. If the mean is independent of this size, the organs are said to be non-correlated. Correlation is defined mathematically by any constant or series of constants, which determine the above function."

Die von GALTON und PEARSON festgehaltene Auffassungsweise ist demnach wesentlich enger als die hier zugrunde gelegte. Denn die $a_\varkappa$ und b_λ werden als meßbare Größen vorausgesetzt, und es werden lediglich die arithmetischen Mittel der zu den einzelnen $a_\varkappa$ gehörigen $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ in ihrer Abhängigkeit von $a_\varkappa$ oder die arithmetischen Mittel der zu den einzelnen b_λ gehörigen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ in ihrer Abhängigkeit von b_λ bestimmt.

2. Das Urnenschema.

Um nun nicht durch die Besonderheit des jeweils gewählten Beispiels die Allgemeingültigkeit der Untersuchung in Frage zu stellen und doch bestimmte Verhältnisse, die einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten gestatten, vor Augen zu haben, möge folgende Veranschaulichung gestattet werden.

Jeder mit $a_\varkappa$ und b_λ behaftete Gegenstand soll durch eine mit dem Zeichen $a_\varkappa$ und b_λ beschriebene Kugel dargestellt werden. Sind die Gegenstände, soweit sie durch $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ bestimmt sind, willkürlich herstellbar (sei es, daß sie wie die geometrischen Figuren beliebig in Gedanken vorgestellt, sei es, daß sie wie die Substanzen des Physikers und Chemikers, so oft man ihrer bedarf, auf experimentellem Wege beschafft werden können), so mögen alle mit dem Zeichen $a_\varkappa$ beschriebenen Kugeln in je einer Urne, die selbst wieder durch $a_\varkappa$ zu bezeichnen ist, gesammelt gedacht werden. Man kann alsdann jede Urne $a_\varkappa$ für sich allein auf das Vorkommen der Kugeln, die mit den Aufschriften $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ versehen sind, prüfen. Nicht anders ist es, wenn man die durch $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ bestimmten Gegenstände willkürlich herstellen kann, um an ihnen das Auftreten von $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ festzustellen. Man hat nunmehr die durch b_λ bezeichneten Kugeln in je einer Urne b_λ gesammelt zu denken und jede dieser Urnen auf das Vorkommen der $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ zu prüfen. — Sind aber die mit $a_\varkappa$ und b_λ behafteten Gegenstände nicht willkürlich herstellbar, wie es bei Untersuchungen im Gebiete der sogenannten beschreibenden Naturwissenschaften der Fall zu sein pflegt, so hat man sich die Kugeln $(a_\varkappa b_\lambda)$ insgesamt in eine einzige Urne vereinigt zu denken. Es ist alsdann nicht möglich, für ein einzelnes,

von den übrigen abgesondertes a_x die Zugehörigkeit der b_λ oder für ein einzelnes, von den übrigen abgesondertes b_λ die Zugehörigkeit der a_x festzustellen. Man kann jedoch die Urne auf das Vorkommen aller Kombinationen $(a_x b_\lambda)$ zugleich prüfen und so für jedes Glied der Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ die Zugehörigkeit der b_λ und für jedes Glied der Reihe $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ die Zugehörigkeit der a_x ermitteln.

Sollen nun die Häufigkeiten, mit welchen die verschiedenen $(a_x b_\lambda)$ auftreten, festgestellt werden, so können zwei wesentlich verschiedene Wege betreten werden. Man kann *deduktiv* auf Grund vorhandener Erkenntnisse die verschiedenen Kombinationen der a_x und b_λ erschließen oder auf Grund der Erfahrung von Fall zu Fall das Auftreten der a_x und b_λ konstatieren und so *induktiv* zur Kenntnis der verschiedenen Möglichkeiten gelangen.

Dem deduktiven Verfahren kann die unmittelbare Feststellbarkeit der Kombinationen $(a_x b_\lambda)$ durch das Abzählen der Kugeln zur Seite gestellt werden, da man hierdurch gleichfalls ohne weiteres zur Kenntnis der vorhandenen $(a_x b_\lambda)$ gelangt. Es entspricht ferner der empirischen Feststellung einzelner Fälle, wenn man einzelne Kugeln — wie es der Zufall fügt — aus der Urne zieht und die an der jeweils gezogenen Kugel vorhandenen Zeichen a_x und b_λ notiert. Man kann daher das Ziehen von Kugeln aus der Urne als eine Verbildlichung des induktiven Verfahrens ansehen.

Demnach bildet das Urnenschema eine ausreichende Unterlage für die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes.

3. Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der a_x und b_λ.

Kann man die Kugeln abzählen und bezeichnet man die Anzahl der Kugeln $(a_x b_\lambda)$ durch $z(x\lambda)$, so läßt sich das Ergebnis der Abzählung in der Tabelle

	a_1	a_2	$\cdots$	a_r
b_1	$z(11)$	$z(21)$	$\cdots$	$z(r1)$
b_2	$z(12)$	$z(22)$	$\cdots$	$z(r2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
b_s	$z(1s)$	$z(2s)$	$\cdots$	$z(rs)$

A.

übersichtlich zusammenstellen. Soll lediglich das Auftreten der

$a_\varkappa$ ohne Rücksicht auf die b_λ oder das Auftreten der b_λ ohne Rücksicht auf die $a_\varkappa$ Beachtung finden, und setzt man

$$\begin{aligned} x(\varkappa) &= z(\varkappa 1) + z(\varkappa 2) + \cdots + z(\varkappa s) \\ y(\lambda) &= z(1\lambda) + z(2\lambda) + \cdots + z(r\lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

so erhält man die Tabelle

$$\frac{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_r}{x(1) \quad x(2) \quad x(3) \quad \cdots \quad x(r)} \qquad \text{B.}$$

oder die Tabelle

$$\frac{b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_s}{y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad \cdots \quad y(s)}. \qquad \text{C.}$$

Ist die Gesamtzahl der Kugeln gleich m, so wird hiernach die relative Häufigkeit oder die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten von $a_\varkappa$ und b_λ durch

$$w(\varkappa\lambda) = z(\varkappa\lambda) : m \tag{2}$$

angegeben. Es ist ferner die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $a_\varkappa$ gleich

$$u(\varkappa) = x(\varkappa) : m = w(\varkappa 1) + w(\varkappa 2) + \cdots + w(\varkappa s) \tag{3}$$

und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von b_λ gleich

$$v(\lambda) = y(\lambda) : m = w(1\lambda) + w(2\lambda) + \cdots + w(r\lambda). \tag{4}$$

Sind r Urnen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit, in der Urne $a_\varkappa$ eine Kugel $(a_\varkappa b_\lambda)$ zu treffen gleich

$$u(\varkappa\lambda) = z(\varkappa\lambda) : x(\varkappa) = w(\varkappa\lambda) : u(\varkappa) \tag{5}$$

und in entsprechender Weise ist für den Fall, daß s Urnen $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ gegeben sind, die Wahrscheinlichkeit in der Urne b_λ eine Kugel $(a_\varkappa b_\lambda)$ zu treffen gleich

$$v(\varkappa\lambda) = z(\varkappa\lambda) : y(\lambda) = w(\varkappa\lambda) : v(\lambda). \tag{6}$$

Sind hingegen die Kugeln nicht abzählbar, ist man vielmehr darauf angewiesen, durch oftmaliges Ziehen einzelner Kugeln die vorhandenen Formen von a und b kennen zu lernen, so kann man zwar wiederum die unter einer Gesamtzahl m sich ergebenden Anzahlen der $(a_\varkappa b_\lambda)$, der $a_\varkappa$ und der b_λ durch $z(\varkappa\lambda)$, $x(\varkappa)$ und $y(\lambda)$ bezeichnen und in den Tabellen A., B. und C. zusammenstellen. Es muß aber die Bedeutung dieser Anzahlen erst klargestellt werden, bevor man aus ihnen Wahrscheinlichkeitswerte ableitet.

Sollen nämlich diese Anzahlen überhaupt eine Bedeutung haben, so muß die Annahme gestattet sein, daß, wenn das Ziehen einer bestimmten Anzahl von Kugeln aus einer Urne unaufhörlich wiederholt wird, jede einzelne Urnen-Kugel schließlich gleich häufig zum Vorschein kommt. Denn, falls dies nicht zuträfe, so müßte eine einzelne Kugel oder eine bestimmte Gruppe von Kugeln ausschließlich oder vorzugsweise zur Beobachtung gelangen. Da man aber nicht wüßte, welche Kugeln in dieser Weise bevorzugt würden, so wäre es nicht möglich, aus den beobachteten Anzahlen auf die tatsächlich vorhandenen Anzahlen zu schließen.

Trifft nun diese Annahme zu, so gelten bei fortgesetzter Wiederholung der Beobachtungen, die unter Zurücklegen der jeweils gezogenen Kugel einzeln und unabhängig von einander ausgeführt werden, folgende Bestimmungen.

Ist die relative Häufigkeit oder Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Kugelart auf Grund der in der Urne vorhandenen Kugelanzahlen gleich w, so ist die Wahrscheinlichkeit unter m Kugeln z Kugeln jener bestimmten Art zu erhalten gleich dem durch die Gleichung

$$z!(m-z)!\,W(z) = m!\,w^z(1-w)^{m-z} \tag{7}$$

bestimmten $W(z)$, wo z die Werte 0, 1, 2 ... m annehmen kann. Das arithmetische Mittel aller, bei unbegrenzter Wiederholung der m Züge auftretenden Kugelanzahlen z ist somit gleich der über $z = 0, 1, 2 \ldots m$ erstreckten Summe

$$\sum z \,.\, W(z) = m \,.\, w. \tag{8}$$

Man findet diesen Betrag, wenn man[1])

$$(w \,.\, \exp(u) + 1 - w)^m = \sum \exp(zu) \,.\, W(z) \tag{9}$$

nach u differentiiert und $u = 0$ setzt. Bildet man sodann, um die Streuung der z-Werte kennen zu lernen, die Summe der Quadrate für die Abweichungen $z - mw$, so findet man als mittleres Abweichungsquadrat

$$\sum (z - mw)^2\, W(z) = mw(1-w). \tag{10}$$

Es ist nämlich diese, über $z = 0, 1, 2 \ldots m$ zu erstreckende Summe gleich

$$\sum z^2\, W(z) - m^2 w^2, \tag{11}$$

1) Es wird $\exp(u)$ statt e^u gesetzt.

und es ist ferner

$$\sum z^2 W(z) = m(m-1)w^2 + mw, \tag{12}$$

wie sich durch zweimaliges Differentiieren von (9) nach u für $u = 0$ ergibt. Die mittlere quadratische Abweichung selbst ist somit gleich

$$\sqrt{\{mw(1-w)\}}. \tag{13}$$

Demnach kommen zwei wohl zu unterscheidende Momente in Betracht: die tatsächliche Ausführung der m Beobachtungen, worunter z Fälle der bestimmten Art auftreten, und die Annahme, daß die m Beobachtungen in unbegrenzter Wiederholung ausgeführt werden und für z die $m+1$ verschiedenen Werte 0, 1, 2 ... m in der durch $W(z)$ angegebenen relativen Häufigkeit ergeben. Auf Grund dieser Annahme gibt es den mittleren Häufigkeitswert (8) mit der mittleren quadratischen Abweichung (13), die zusammengenommen die ganze durch

$$mw \pm \sqrt{\{mw(1-w)\}} \tag{14}$$

darstellbare Mannigfaltigkeit der z-Werte charakterisieren.

Dieser Mannigfaltigkeit gehört der tatsächlich beobachtete z-Wert an. Da man aber nicht weiß, wohin er fällt, so pflegt man ihn, in Ermangelung eines anderweitigen Anhaltspunktes, dem Mittelwerte gleichzusetzen, so daß der Häufigkeitswert

$$z = mw \tag{15}$$

das System der Werte

$$z \pm \sqrt{\{z(1-z:m)\}} \tag{16}$$

und der Wahrscheinlichkeitswert

$$w = z:m \tag{17}$$

das System der Werte

$$w \pm \sqrt{\{w(1-w):m\}} \tag{18}$$

repräsentiert.

Es sind folglich die durch das Ziehen von m Kugeln festgestellten Häufigkeitswerte $z(\varkappa\lambda)$, $x(\varkappa)$ und $y(\lambda)$ der Tabellen A., B. und C die Repräsentanten der Wertensysteme

$$z(\varkappa\lambda) \pm \sqrt{\{z(\varkappa\lambda)(1-z(\varkappa\lambda):m)\}} \tag{19}$$

$$x(\varkappa) \pm \sqrt{\{x(\varkappa)(1-x(\varkappa):m)\}} \tag{20}$$

$$y(\lambda) \pm \sqrt{\{y(\lambda)(1-y(\lambda):m)\}}, \tag{21}$$

wofern alle Kugeln in einer einzigen Urne vereinigt sind. Es repräsentieren ferner die $z(\varkappa\lambda)$ die Wertensysteme

$$z(\varkappa\lambda) \pm \sqrt{\{z(\varkappa\lambda)(1 - z(\varkappa\lambda) : x(\varkappa))\}} \tag{22}$$

oder

$$z(\varkappa\lambda) \pm \sqrt{\{z(\varkappa\lambda)(1 - z(\varkappa\lambda) : y(\lambda))\}}, \tag{23}$$

jenachdem die Kugeln auf r Urnen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ oder auf s Urnen $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ verteilt sind und jeder Urne $a_\varkappa$ je $x(\varkappa)$ Kugeln oder jeder Urne b_λ je $y(\lambda)$ Kugeln entnommen werden.

Man findet somit in jedem Falle, daß das dem beobachteten Werte $z(\varkappa\lambda)$ entsprechende Wertensystem den arithmetischen Mittelwert $z(\varkappa\lambda)$ hat. Da jedoch $x(\varkappa)$ und $y(\lambda)$ kleiner als m ist, so ist die mittlere quadratische Abweichung in (22) und (23) kleiner als in (19). Demzufolge erhält man zuverlässigere Werte $z(\varkappa\lambda)$, wenn man den r Urnen $a_\varkappa$ je $x(\varkappa)$ Kugeln oder den s Urnen b_λ je $y(\lambda)$ Kugeln entnimmt, als wenn man die r oder s Urnen zu einer einzigen vereinigt und aus dieser Urne die $m = \Sigma x(\varkappa) = \Sigma y(\lambda)$ Kugeln insgesamt zieht.

Geht man schließlich zu den relativen Häufigkeitswerten oder den Wahrscheinlichkeitswerten über, so findet man die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten von $a_\varkappa$ und b_λ in der Gesamturne bestimmt durch

$$\begin{gathered} w(\varkappa\lambda) \pm \sqrt{\{w(\varkappa\lambda)(1 - w(\varkappa\lambda)) : m\}}; \\ w(\varkappa\lambda) = z(\varkappa\lambda) : m; \end{gathered} \tag{24}$$

desgleichen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $a_\varkappa$ gleich

$$\begin{gathered} u(\varkappa) \pm \sqrt{\{u(\varkappa)(1 - u(\varkappa)) : m\}}; \\ u(\varkappa) = x(\varkappa) : m; \end{gathered} \tag{25}$$

und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von b_λ gleich

$$\begin{gathered} v(\lambda) \pm \sqrt{\{v(\lambda)(1 - v(\lambda)) : m\}}; \\ v(\lambda) = y(\lambda) : m. \end{gathered} \tag{26}$$

Sind r Urnen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit in der Urne $a_\varkappa$ eine Kugel $(a_\varkappa b_\lambda)$ zu treffen bestimmt durch

$$\begin{gathered} u(\varkappa\lambda) \pm \sqrt{\{u(\varkappa\lambda)(1 - u(\varkappa\lambda)) : x(\varkappa)\}}; \\ u(\varkappa\lambda) = z(\varkappa\lambda) : x(\varkappa). \end{gathered} \tag{27}$$

Sind hingegen s Urnen $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit in der Urne b_λ eine Kugel $(a_\varkappa b_\lambda)$ zu finden gleich

$$\begin{gathered} v(\varkappa\lambda) \pm \sqrt{\{v(\varkappa\lambda)(1 - v(\varkappa\lambda)) : y(\lambda)\}}; \\ v(\varkappa\lambda) = z(\varkappa\lambda) : y(\lambda). \end{gathered} \tag{28}$$

4. Die Bestimmung der Abhängigkeit mittels der Werte $\delta(\varkappa\lambda)$, $\delta'(\varkappa\lambda)$, $\delta''(\varkappa\lambda)$.

Das Auftreten von $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ wird für ein bestimmtes $b(\lambda)$ durch die Häufigkeitswerte $z(1\lambda)$, $z(2\lambda)$, $z(3\lambda) \cdots z(r\lambda)$ oder ohne Rücksicht auf die Gesamtzahl m aller abgezählten oder gezogenen Kugeln durch die Verhältnisse

$$z(1\lambda) : z(2\lambda) : z(3\lambda) : \cdots : z(r\lambda)$$

bestimmt. Das Auftreten von $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ ist folglich unabhängig von $b(\lambda)$, und das Merkmal a ist somit unabhängig von dem Merkmal b, wenn diese Verhältnisse für $\lambda = 1, 2, 3 \ldots s$ unverändert bleiben. Dann behalten auch die Verhältnisse

$$z(\varkappa 1) : z(\varkappa 2) : z(\varkappa 3) : \cdots z(\varkappa s)$$

für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots r$ dieselben Werte, so daß sich zugleich das Auftreten von $b_1, b_2, b_3 \ldots b_s$ unabhängig von $a_\varkappa$ und das Merkmal b unabhängig von dem Merkmal a erweist.

Wenn diese Verhältnisse konstant sind, ist mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned} z(1\lambda) : z(2\lambda) : z(3\lambda) : \cdots : z(r\lambda) &= x(1) : x(2) : x(3) : \cdots : x(r) \\ z(\varkappa 1) : z(\varkappa 2) : z(\varkappa 3) : \cdots : z(\varkappa s) &= y(1) : y(2) : y(3) : \cdots : y(s) \end{aligned} \tag{29}$$

oder mit Bezugnahme auf (2), (3) und (4)

$$\begin{aligned} w(1\lambda) : w(2\lambda) : w(3\lambda) : \cdots : w(r\lambda) &= u(1) : u(2) : u(3) : \cdots : u(r) \\ w(\varkappa 1) : w(\varkappa 2) : w(\varkappa 3) : \cdots : w(\varkappa s) &= v(1) : v(2) : v(3) : \cdots : v(s) \end{aligned} \tag{30}$$

Demnach ist $w(\varkappa\lambda)$ sowohl mit $u(\varkappa)$ als auch mit $v(\lambda)$ proportional. Aus $w(\varkappa\lambda) = c \,.\, u(\varkappa)v(\lambda)$ folgt aber (weil $\Sigma w(\varkappa\lambda) = c\Sigma v(\varkappa)\Sigma v(\lambda)$ und die über $\varkappa = 1, 2 \ldots r$; $\lambda = 1, 2 \ldots s$ zu erstreckende $\Sigma w(\varkappa\lambda) = \Sigma u(\varkappa) = \Sigma v(\lambda) = 1$ ist), daß $c = 1$ und somit

$$w(\varkappa\lambda) = u(\varkappa)v(\lambda). \tag{31}$$

Die Merkmale a und b sind folglich unabhängig von einander, wenn die Wahrscheinlichkeit $w(\varkappa\lambda)$ für das Auftreten von $(a_\varkappa b_\lambda)$

gleich dem Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten $u(\varkappa)$ und $v(\lambda)$ für das Auftreten der für sich betrachteten $a_\varkappa$ und b_λ ist.

Hat man ferner die Wahrscheinlichkeitswerte $u(\varkappa\lambda)$ oder $v(\varkappa\lambda)$ mittelst der r Urnen $a_1, a_2 \ldots a_r$ oder der s Urnen $b_1, b_2 \ldots b_s$ bestimmt, so resultiert aus (31) den Formeln (5) und (6) zufolge

$$u(\varkappa\lambda) = v(\lambda) \text{ und } v(\varkappa\lambda) = u(\varkappa).$$

Hiernach findet durch

$$u(1\lambda) = u(2\lambda) = u(3\lambda) = \cdots = u(r\lambda) \tag{32}$$

oder durch

$$v(\varkappa 1) = v(\varkappa 2) = v(\varkappa 3) = \cdots = v(\varkappa s) \tag{33}$$

die Bedingung für die Unabhängigkeit der Merkmale a und b ihren Ausdruck.

Demgemäß hat man, wenn die Werte $w(\varkappa\lambda)$ zur Bestimmung der Abhängigkeit dienen sollen, jedes einzelne $w(\varkappa\lambda)$ auf seine Übereinstimmung mit $u(\varkappa)v(\lambda)$ zu prüfen und das Urteil über die Abhängigkeit auf die Differenzen

$$w(\varkappa\lambda) - u(\varkappa)v(\lambda) = \delta(\varkappa\lambda) \tag{34}$$

zu gründen. Liegen hingegen die Werte $u(\varkappa\lambda)$ oder $v(\varkappa\lambda)$ vor, deren mittlere Beträge $u(0\lambda)$ und $v(\varkappa 0)$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} r \,.\, u(0\lambda) &= u(1\lambda) + u(2\lambda) + u(3\lambda) + \cdots + u(r\lambda), \\ s \,.\, v(\varkappa 0) &= v(\varkappa 1) + v(\varkappa 2) + v(\varkappa 3) + \cdots + v(\varkappa s) \end{aligned} \tag{35}$$

definiert seien, so wird man zweckmäßig die Differenzen

$$u(\varkappa\lambda) - u(0\lambda) = \delta'(\varkappa\lambda) \tag{36}$$

oder

$$v(\varkappa\lambda) - v(\varkappa 0) = \delta''(\varkappa\lambda) \tag{37}$$

zur Beurteilung der Abhängigkeit verwerten.

Die $r \,.\, s$ Werte $\delta(\varkappa\lambda)$, $\delta'(\varkappa\lambda)$ oder $\delta''(\varkappa\lambda)$ lassen sich auf $(r-1)(s-1)$ Werte, die voneinander unabhängig sind, reduzieren. Da nämlich $w(\varkappa 1) + w(\varkappa 2) + \cdots + w(\varkappa s) = u(\varkappa)$; $w(1\lambda) + w(2\lambda) + \cdots + w(r\lambda) = v(\lambda)$; $\Sigma u(\varkappa) = \Sigma v(\lambda) = 1$, so ist für jedes $\varkappa$ und jedes λ

$$\begin{aligned} \delta(\varkappa 1) + \delta(\varkappa 2) + \delta(\varkappa 3) + \cdots + \delta(\varkappa s) &= 0, \\ \delta(1\lambda) + \delta(2\lambda) + \delta(3\lambda) + \cdots + \delta(r\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Da ferner

$$u(x1) + \cdots + u(xs) = 1; \quad v(1\lambda) + \cdots + v(r\lambda) = 1;$$
$$u(1\lambda) + \cdots + u(r\lambda) = r.u(0\lambda)); \quad v(x1) + \cdots + v(xs) = s.v(x0),$$

so ist auch

$$\begin{aligned} \delta'(x1) + \delta'(x2) + \delta'(x3) + \cdots + \delta'(xs) &= 0, \\ \delta'(1\lambda) + \delta'(2\lambda) + \delta'(3\lambda) + \cdots + \delta'(r\lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{39}$$

und

$$\begin{aligned} \delta''(x1) + \delta''(x2) + \delta''(x3) + \cdots + \delta''(xs) &= 0, \\ \delta''(1\lambda) + \delta''(2\lambda) + \delta''(3\lambda) + \cdots + \delta''(r\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Da eine weitere Reduktion nicht möglich ist, so muß das aus $(r-1)(s-1)$ von einander unabhängigen Werten bestehende System der $\delta(x\lambda)$, $\delta'(x\lambda)$, $\delta''(x\lambda)$ der Beurteilung der Abhängigkeit zugrunde gelegt werden. *Es ist demzufolge nicht zulässig (außer wenn $r = s = 2$) einen einzigen Wert als schlechthin gültiges Maß der Abhängigkeit aufzustellen.*[1])

Sind die $w(x\lambda)$, $u(x)$, $v(\lambda)$, $u(x\lambda)$, $v(x\lambda)$ Repräsentanten der in (24) bis (28) angedeuteten Wertensysteme, so repräsentieren auch die $\delta(x\lambda)$, $\delta'(x\lambda)$, $\delta''(x\lambda)$ Wertensysteme, deren arithmetisches Mittel und mittlere quadratische Abweichung zu bestimmen sind.

Um hierbei eine bequemere Darstellungsweise von $\delta(x\lambda)$ benutzen zu können, soll $w(x\lambda)$ mit $\Sigma w(\mu\nu) = 1$ multipliziert und $u(x)$ durch $\Sigma w(x\nu)$, ferner $v(\lambda)$ durch $\Sigma w(\mu\lambda)$ ersetzt werden, wo das Summenzeichen die Summation über $\mu = 1, 2, 3 \ldots r$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots s$ andeutet. Man erhält so an Stelle von (34)

$$\Sigma\{w(x\lambda)w(\mu\nu) - w(x\nu)w(\mu\lambda)\} = \delta(x\lambda), \tag{41}$$

wo die Summenglieder für $\mu = x$ und für $\nu = \lambda$ verschwinden, so daß nur über $\mu = 1, 2 \ldots x-1, x+1 \ldots r$; $\nu = 1, 2 \ldots \lambda - 1, \lambda + 1 \ldots s$ zu summieren ist.

Schreibt man nun der Einfachheit wegen

$$w(x\lambda, \mu\nu) = w(x\lambda)w(\mu\nu) - w(x\nu)w(\mu\lambda)$$
$$z(x\lambda, \mu\nu) = z(x\lambda)\,z(\mu\nu) - z(x\nu)\,z(\mu\lambda)$$

und setzt man

---

1) Dies ist namentlich GALTON und PEARSON gegenüber zu betonen, die einen einzigen Zahlenwert, den sogenannten „Korrelationskoeffizienten", als Maß der Abhängigkeit bestimmen. Vergl. insbesondere PEARSONS Bestimmung „des besten Wertes für den Korrelationskoeffizienten" in der erwähnten Abhandlung S. 264.

$$F = (w(11)\exp\{u(11)\} + \cdots + w(rs)\exp\{u(rs)\})^m$$
$$= \sum W\{z(11),..z(rs)\}\exp\{z(11)u(11)\}..\exp\{z(rs)u(rs)\},$$

wo die Summation über alle positive ganze Zahlen $z(11),..z(rs)$, deren Summe gleich m ist, auszudehnen ist, so wird das arithmetische Mittel aller $\delta(\varkappa\lambda)$, das durch $\delta_0(\varkappa\lambda)$ angedeutet werden soll, bestimmt mittels der Gleichung

$$m^2\delta_0(\varkappa\lambda) = \sum_z \sum_{\mu,\nu} z(\varkappa\lambda,\mu\nu)\,.\,W(z)$$
$$= m(m-1)\sum_{\mu,\nu} w(\varkappa\lambda,\mu\nu)$$

oder mittels der Gleichung

$$m\delta_0(\varkappa\lambda) = (m-1)\delta(\varkappa\lambda) \qquad (42)$$

wo $\delta(\varkappa\lambda)$ den aus den beobachteten $z(\varkappa\lambda)$ berechneten Wert (34) oder (41) bezeichnet. Es folgt dies daraus, daß für beliebige $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$

$$d^2F/du(\varkappa\lambda)\,.\,du(\mu\nu) - d^2F/du(\varkappa\nu)\,.\,du(\mu\lambda) = \sum_z z(\varkappa\lambda,\mu\nu)\,W(z),$$

wenn die Argumentwerte u nach Ausführung der Differentiation sämtlich gleich Null gesetzt werden.

Man findet ferner durch vierfache Differentiation von F für das mittlere, durch $q(\varkappa\lambda)$ zu bezeichnende Abweichungsquadrat

$$m^4 q(\varkappa\lambda)^2 = \sum_z \Big\{\sum_{\mu,\nu} z(\varkappa\lambda,\mu\nu) - m^2\delta_0(\varkappa\lambda)\Big\}^2 W(z)$$
$$= \sum_z \Big\{\sum_{\mu,\nu} z(\varkappa\lambda,\mu\nu)\Big\}^2 W(z) - m^4\delta_0{}^2(\varkappa\lambda)$$
$$= m(m-1)(m-2)(m-3)\Big\{\sum_{\mu,\nu} w(\varkappa\lambda,\mu\nu)\Big\}^2$$
$$+ m(m-1)(m-2)\,.\,A + m(m-1)\,.\,B - m^4\delta_0{}^2(\varkappa\lambda),$$

oder mit Rücksicht auf (41) und (42)

$$m^3 q(\varkappa\lambda)^2 = -2(m-1)(2m-3)\delta^2(\varkappa\lambda)$$
$$+ (m-1)(m-2)\,A + (m-1)B, \qquad (43)$$

wo

$$A = w(\varkappa\lambda)^2\sum_{\mu,\nu} w(\mu\nu) + w(\varkappa\lambda)\Big\{\sum_{\mu,\nu} w(\mu\nu)\Big\}^2$$
$$+ \Big\{\sum_\nu w(\varkappa\nu)\Big\}^2\sum_\mu w(\mu\lambda) + \sum_\nu w(\varkappa\nu)\Big\{\sum_\mu w(\mu\lambda)\Big\}^2,$$
$$B = w(\varkappa\lambda)\sum_{\mu,\nu} w(\mu\nu) + \sum_\nu w(\varkappa\nu)\sum_\mu w(\mu\lambda).$$

Demnach repräsentiert der durch m Beobachtungen bestimmte Wert $\delta_{\varkappa\lambda}$ der Formel (34) oder (41) das bei unbegrenzter Wiederholung der m Beobachtungen hervortretende System der Werte

$$\delta_0(\varkappa\lambda) \pm q(\varkappa\lambda), \tag{44}$$

wo $\delta_0(\varkappa\lambda)$ durch (42) und $q(\varkappa\lambda)$ durch (43) definiert wird.

Das durch die Werte $\delta'(\varkappa\lambda)$ und $\delta''(\varkappa\lambda)$ der Formeln (36) und (37) repräsentierte Wertensystem findet hingegen, da die an den r Urnen $a_1, a_2 \ldots a_r$ oder an den s Urnen $b_1, b_2 \ldots b_s$ ausgeführten Beobachtungen voneinander unabhängig sind, durch

$$\begin{aligned} &\delta'(\varkappa\lambda) \pm q'(\varkappa\lambda) \\ &\delta''(\varkappa\lambda) \pm q''(\varkappa\lambda) \end{aligned} \tag{45}$$

seine Bestimmung, wo die mittleren quadratischen Abweichungen $q'(\varkappa\lambda)$ und $q''(\varkappa\lambda)$ durch

$$\begin{aligned} r^2 q'(\varkappa\lambda)^2 = {} & [1,\lambda] + \cdots + [\varkappa - 1,\lambda] + (r-1)^2[\varkappa,\lambda] \\ & + [\varkappa + 1,\lambda] + \cdots + [r,\lambda], \end{aligned} \tag{46a}$$

wenn $[\mu,\lambda]$ für $\mu = 1, 2, 3 \ldots r$ den Ausdruck $u(\mu\lambda)\{1 - u(\mu\lambda)\} : x(\mu)$ ersetzt, und durch

$$\begin{aligned} s^2 q''(\varkappa\lambda)^2 = {} & \{\varkappa,1\} + \cdots + \{\varkappa,\lambda-1\} + (s-1)^2\{\varkappa,\lambda\} \\ & + \{\varkappa,\lambda+1\} + \cdots + \{\varkappa,s\}, \end{aligned} \tag{46b}$$

wenn $\{\varkappa,\nu\}$ für $\nu = 1, 2, 3 \ldots s$ den Ausdruck $v(\varkappa\nu)\{1 - v(\varkappa\nu)\} : y(\nu)$ andeutet, definiert werden.

Einen einzigen, die Abhängigkeit unmittelbar bestimmenden Wert $\delta, \delta', \delta''$ erhält man nur dann, wenn $r = s = 2$. Es ist in diesem Falle

$$w(11)w(22) - w(12)w(21) = \delta; \tag{47}$$

$$u(11) - u(21) = u(22) - u(12) = 2\delta', \tag{48a}$$

$$v(11) - v(12) = v(22) - v(21) = 2\delta''; \tag{48b}$$

es ist ferner (falls die w, u und v die Wertensysteme (24), (27) und (28) repräsentieren) das zu $\delta, \delta', \delta''$ gehörige Wertensystem gleich

$$\delta_0 \pm q \tag{49}$$

$$\delta' \pm q'; \quad \delta'' \pm q'' \tag{50}$$

wo einesteils

$$m\delta_0 = (m-1)\delta;$$
$$m^3q^2 = -2(m-1)(2m-3)\delta^2 + (m-1)(m-2)A + (m-1)B;$$
$$A = w(11)w(22)\{w(11)+w(22)\} + w(12)w(21)\{w(12)+v(21)\}; \quad (51)$$
$$B = w(11)w(22) + w(12)w(21);$$

und andernteils

$$\begin{aligned} 4q'^2 &= u(11)\{1-u(11)\}:x(1) + u(21)\{1-u(21)\}:x(2) \\ &= u(12)\{1-u(12)\}:x(1) + u(22)\{1-u(22)\}:x(2); \\ 4q''^2 &= v(11)\{1-v(11)\}:y(1) + v(12)\{1-v(12)\}:y(2) \\ &= v(21)\{1-v(21)\}:y(1) + v(22)\{1-v(22)\}:y(2). \end{aligned} \quad (52)$$

Eine vollkommene Abhängigkeit ist hier vorhanden, wenn von den Formen a_1 und a_2 des Merkmals a einerseits und von den Formen b_1 und b_2 des Merkmals b andererseits entweder nur a_1 im Verein mit b_1 und a_2 im Verein mit b_2 oder nur a_1 im Verein mit b_2 und a_2 im Verein mit b_1 vorkommt. Es ist alsdann im ersten Falle $w(12) = w(21) = 0$; $u(12) = u(21) = 0$; $v(12) = v(21) = 0$ und somit $\delta = w(11)w(22) = w(11)\{1-w(11)\} = w(22)\{1-w(22)\}$; $2\delta' = u(11) = u(22) = 1$; $2\delta'' = v(11) = v(22) = 1$. Es ist ferner im letzteren Falle $w(11) = w(22) = 0$; $u(11) = u(22) = 0$; $v(11) = v(22) = 0$ und demnach $\delta = -w(12)w(21) = -w(12)\{1-w(12)\} = -w(21)\{1-w(21)\}$; $2\delta' = -u(21) = -u(12) = -1$; $2\delta'' = -v(12) = -v(21) = -1$.

Die Werte δ' und δ'' erreichen demgemäß bei vollkommener Abhängigkeit den maximalen Betrag $+1:2$ oder $-1:2$ und können ohne weiteres als das zwischen $+1:2$ und $-1:2$ schwankende Maß der Abhängigkeit in Anspruch genommen werden. Der Wert δ hingegen kann bei vollkommener Abhängigkeit jeden positiven oder negativen Betrag $+w(1-w)$ oder $-w(1-w)$, wo $w < 1$, annehmen und erreicht den größtmöglichen Betrag $+1:4$ oder $-1:4$ erst dann, wenn zugleich $w(11) = w(22) = 1:2$ oder $w(12) = w(21) = 1:2$.

Will man die hierdurch bedingte Unsicherheit der Maßbestimmung vermeiden, so kann man neben $w(11)w(22) - w(12)w(21) = \delta$ auch noch $w(11)w(22) + w(12)w(21) = \sigma$ bestimmen und den Quotienten

$$\begin{aligned} \delta:\sigma &= \{w(11)w(22) - w(12)w(21)\}:\{w(11)w(22) + w(12)w(21)\} \\ &= \{z(11)z(22) - z(12)z(21)\}:\{z(11)z(22) + z(12)z(21)\} \end{aligned} \quad (53)$$

als das zwischen + 1 und — 1 schwankende Maß der Abhängigkeit einführen. Repräsentiert δ das Wertensystem $\delta_0 \pm q$, so ist auch σ der Repräsentant des Wertensystems

$$\sigma_0 \pm q_1, \tag{54}$$

wo, wie man sich leicht überzeugt,

$$\begin{aligned} m\sigma_0 &= (m-1)\sigma, \\ m^3 q_1^2 &= -2(m-1)(2m-3)\sigma^2 + (m-1)(m-2)A + (m-1)B, \end{aligned} \tag{55}$$

und A und B die nämliche Bedeutung wie in (51) haben. Es kann alsdann für ausreichend gelten, die Mannigfaltigkeit der Quotienten $\delta:\sigma$, die den Wertensystemen der δ und der σ zugehört, unter Vernachlässigung von Größen der Ordnung $1:m$ durch den Quotienten der arithmetischen Mittel und der mittleren quadratischen Abweichungen von δ und σ in der Form

$$\begin{aligned} (\delta_0 \pm q):(\sigma_0 \pm q_1) &= \{\delta:\sigma\}\{1 \pm q:\delta \pm q_1:\sigma\} \\ mq^2 &= -4\delta^2 + A \\ mq_1^2 &= -4\sigma^2 + A \end{aligned} \tag{56}$$

darzustellen.

Der Gleichmäßigkeit halber wird es sich dann auch empfehlen, an Stelle von δ' und δ'' die doppelten Beträge 2δ und $2\delta'$ nebst den mittleren Abweichungen $2q'$ und $2q''$ als Maßwerte, die zwischen + 1 und — 1 schwanken, zu benutzen.

Man gelangt so zu folgendem Ergebnis:

Sind nur je zwei Formen a_1 und a_2, b_1 und b_2 der Merkmale a und b zu unterscheiden, so ist das Urteil über die Abhängigkeit zwischen a und b für den Fall, daß die der Beobachtung sich darbietenden Fälle als Kugeln einer einzigen Urne zu denken sind, auf den durch (47) *definierten Wert δ und für den Fall, daß a_1 gesondert von a_2 oder b_1 gesondert von b_2 der Untersuchung zugänglich ist, auf den durch* (48) *definierten Wert δ' oder δ'' zu stützen. Als ein zwischen + 1 und — 1 schwankendes Maß der Abhängigkeit kann man den durch* (53) *definierten Quotienten $\delta:\sigma$ oder die Werte $2\delta'$ resp. $2\delta''$ benützen. Sind die Häufigkeitswerte induktiv (durch Ziehen einzelner Kugeln) ermittelt worden, so sind δ, σ, δ', δ'' die Repräsentanten der durch* (49) *und* (51), (54) *und* (55), (50) *und* (52) *angedeuteten Wertensysteme; es kann ferner für zulässig gelten, das System der Quotienten $\delta:\sigma$ durch* (56) *zu charakterisieren.*

Digitized by Google

Ist hingegen die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Formen von a oder von b größer als zwei, so ist nicht ein einzelner Wert, sondern das aus $(r-1)(s-1)$ *von einander unabhängigen Werten bestehende System der* $\delta(\varkappa\lambda)$, $\delta'(\varkappa\lambda)$, $\delta''(\varkappa\lambda)$ *zur Bestimmung der Abhängigkeit zu benützen. Hierbei sind diese Werte als Repräsentanten der durch* (44) *und* (45) *angedeuteten Mannigfaltigkeiten zu betrachten, wenn die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitswerte auf dem Wege der Induktion gewonnen wurde.*

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die für $r = s = 2$ abgeleiteten Bestimmungen nicht nur dann anwendbar sind, wenn von Haus aus bloß zwei Formen von a und zwei Formen von b unterscheidbar sind, sondern auch dann, wenn die r Formen a und s Formen b auf je zwei nachträglich reduziert werden.

Ist eine solche Reduktion nicht zulässig, so wird man wünschen, an Stelle der δ-Werte Mittelwerte, die aus den δ-Werten abgeleitet werden, zu benützen. Solche Mittelwerte sind die mittels der Gleichungen

$$rsd(\nu) = \sum\delta(\varkappa\lambda)^\nu;\ rsd'(\nu) = \sum\delta'(\varkappa\lambda)^\nu;\ rsd''(\nu) = \sum\delta''(\varkappa\lambda)^\nu$$

definierten Werte $d(\nu)$, $d'(\nu)$, $d''(\nu)$, wo der Symmetrie wegen die Summation über alle $r.s$ Werte für $\varkappa = 1, 2, \ldots r$; $\lambda = 1, 2, \ldots s$ ausgedehnt wird. Für geradzahlige ν werden diese Werte nur dann gleich Null, wenn alle δ-Werte gleich Null sind, sie wachsen überdies, wenn die absoluten Beträge der δ, δ', δ'' wachsen, so daß sie als Maßstäbe zur Beurteilung der Größe der Abhängigkeit dienen können, wofern man nur im Ange behält, daß der Vielgestaltigkeit der Abhängigkeit entsprechend auch die vollkommene Abhängigkeit in vielfacher Form auftreten kann. Denn eine vollkommene Abhängigkeit liegt nicht etwa nur dann vor, wenn den steigenden Gliedern der Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ entweder durchweg steigende oder durchweg fallende Glieder der Reihe b_1, b_2, $b_3 \ldots b_s$ zugehören, sondern auch dann, wenn den steigenden Gliedern der einen Reihe bald steigende, bald fallende Glieder der anderen Reihe sich zuordnen, wofern nur die Zuordnung in der Weise eindeutig ist, daß entweder jedem Gliede der a-Reihe nur je ein Glied der b-Reihe oder jedem Gliede der b-Reihe nnr je ein Glied der a-Reihe zugehört.

Da jedoch in diese Mittelwerte die Potenzen der δ-Werte eingehen, so ist es zweckmäßiger, auf dem im folgenden betretenen Wege andere Werte, die in linearer Form von den δ-Werten abhängen, zur Bestimmung der Abhängigkeit abzuleiten.

5. Die Bestimmung der Abhängigkeit mittels der Werte $\Delta(\varrho,\sigma)$, $\Delta'(\varkappa,\sigma)$, $\Delta''(\varrho,\lambda)$.

Tritt a_μ an Stelle von $a_\varkappa$, b_ν an Stelle von b_λ und somit $(a_\mu b_\nu)$ an Stelle von $(a_\varkappa b_\lambda)$, so ist auch $w(\varkappa\lambda)$ durch $w(\mu\nu)$, $u(\varkappa)$ durch $u(\mu)$, $v(\lambda)$ durch $v(\nu)$, $u(\varkappa\lambda)$ durch $u(\mu\nu)$, $v(\varkappa\lambda)$ durch $v(\mu\nu)$ zu ersetzen. Alle diese Wahrscheinlichkeitswerte sind hiernach von den $a_\varkappa$ und b_λ abhängig und können als mathematische Funktionen der Argumente $a_\varkappa$ und b_λ betrachtet werden, falls man $a_\varkappa$ und b_λ als Zahlenwerte auffassen darf. Dies ist aber auch dann gestattet, wenn die $a_\varkappa$ und b_λ keine Quanta sind, sondern rein qualitative Unterschiede zum Ausdruck bringen. Denn die $a_\varkappa$ und b_λ sind alsdann immerhin Glieder bestimmt geordneter Reihen und insofern durch Ordnungszahlen mathematisch darstellbar.

Setzt man demgemäß

$$\begin{aligned} w(\varkappa\lambda) &= f(a_\varkappa, b_\lambda), \\ u(\varkappa) &= f_1(a_\varkappa), \\ v(\lambda) &= f_2(b_\lambda), \\ u(\varkappa\lambda) &= \chi(a_\varkappa, b_\lambda), \\ v(\varkappa\lambda) &= \omega(a_\varkappa, b_\lambda), \end{aligned} \tag{59}$$

so besteht den Gleichungen (31), (32) und (33) zufolge keinerlei Abhängigkeit zwischen den Merkmalen a und b, wenn für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots r$; $\lambda = 1, 2, 3 \ldots s$

$$f(a_\varkappa, b_\lambda) = f_1(a_\varkappa) \cdot f_2(b_\lambda), \tag{60}$$

$$\chi(a_1, b_\lambda) = \chi(a_2, b_\lambda) = \cdots = \chi(a_r, b_\lambda), \tag{61}$$

$$\omega(a_\varkappa, b_1) = \omega(a_\varkappa, b_2) = \cdots = \omega(a_\varkappa, b_s). \tag{62}$$

Um diese Funktionen in einfacher Weise darzustellen, nehme ich an, daß die $a_\varkappa$ und b_λ äqnidistant seien, so daß je zwei aufeinanderfolgende Werte $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ um den konstanten Betrag i und je zwei aufeinanderfolgende Werte b_λ und $b_{\lambda+1}$ um den konstanten Betrag j sich unterscheiden. Hierdurch wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt. Sind nämlich die durch Beobachtung festgestellten a- und b-Werte beliebig der Größe nach von einander verschieden, so kann man durch Einschieben von Zwischenstufen, die bei der Ausführung der Beobachtungen nicht aufgetreten sind und darum in die Tabellen

A., B. und C. mit $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ behaftet einzureihen sind, die Äquidistanz nachträglich herstellen. — In ähnlicher Weise kann man die Reihen der $a_\varkappa$ und b_λ, die qualitative Unterschiede zum Ausdruck bringen, nötigenfalls durch Einschieben von Zwischengliedern vervollständigen, so daß innerhalb jeder Reihe die aufeinanderfolgenden Glieder gleichmerklichе Unterschiede aufweisen und durch Ordnungszahlen mit konstanter Differenz darstellbar sind. — Bezeichnen schließlich die $a_\varkappa$ und b_λ Qualitäten, die nicht von sich aus, sondern nur auf Grund subjektiver Willkür in eine Reihe geordnet werden können, so ist nichts dagegen einzuwenden, wenn die $a_\varkappa$ und b_λ ohne weiteres durch die Ordnungszahlen $\varkappa$ und λ ersetzt werden, so daß äquidistante Glieder mit der Differenz $i = j = 1$ vorliegen.

Setzt man nun für $\varrho = 0, 1, 2, 3 \ldots$; $\sigma = 0, 1, 2, 3 \ldots$ unter Festhalten eines beliebig, aber bestimmt gewählten Wertenpaares $(a_\varkappa, b_\lambda)$

$$\begin{aligned}
\eta(\varrho\sigma) &= \sum w(\mu\nu)(a_\mu - a_\varkappa)^\varrho (b_\nu - b_\lambda)^\sigma, \\
\eta(\varrho 0) &= \sum u(\mu)(a_\mu - a_\varkappa)^\varrho, \\
\eta(0\sigma) &= \sum v(\nu)(b_\nu - b_\lambda)^\sigma, \qquad (63) \\
\eta(\varkappa;\sigma) &= \sum u(\varkappa\nu)(b_\nu - b_\lambda)^\sigma, \\
\eta(\varrho;\lambda) &= \sum v(\mu\lambda)(a_\mu - a_\varkappa)^\varrho,
\end{aligned}$$

wo die Summation über $\mu = 1, 2, 3 \ldots r$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots s$ zu erstrecken ist, so erhält man für $\varrho = 0$, $\sigma = 0$ in jedem Falle den Wert 1, während alle weiteren η-Werte als Mittelwerte der mit den angegebenen relativen Häufigkeiten auftretenden $(a_\mu - a_\varkappa)^\varrho$ und $(b_\nu - b_\lambda)^\sigma$ sich darbieten.[1]) Die η-Werte sind somit aus den in den Tabellen A., B. und C. zusammengestellten Beobachtungen ableitbar und als bekannt zu betrachten.

Bildet man sodann die über $\varrho = 0, 1, 2, 3 \ldots .$; $\sigma = 0, 1, 2, 3 \ldots .$ zu erstreckenden Summen

$$\sum_{\varrho,\sigma} \{(-\pi^2)^{\varrho+\sigma} \eta(2\varrho\ 2\sigma)\} : \{i^{2\varrho} j^{2\sigma} (2\varrho+1)!(2\sigma+1)!\}$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda} \sum_{\varrho,\sigma} \{w(\mu\nu)(-\pi^2)^{\varrho+\sigma} (a_\mu - a_\varkappa)^{2\varrho} (b_\nu - b_\lambda)^{2\sigma}\} : \{i^{2\varrho} j^{2\sigma} (2\varrho+1)!(2\sigma+1)!\}.$$

1) Setzt man

$\eta(\varrho\sigma) = \eta^{\varrho+\sigma}_{\varrho\sigma}$; $\eta(\varrho 0) = \eta^{\varrho}_{\varrho 0}$; $\eta(0\sigma) = \eta^{\sigma}_{0\sigma}$; $\eta(\varkappa;\sigma) = \eta^{\sigma}_{\varkappa\sigma}$; $\eta(\varrho;\lambda) = \eta^{\varrho}_{\varrho\lambda}$,

so bieten sich $\eta_{\varrho\sigma}$, $\eta_{\varrho 0}$, $\eta_{0\sigma}$, $\eta_{\varkappa\sigma}$, $\eta_{\varrho\lambda}$ als Mittelwerte der Abweichungen $a_\mu - a_\varkappa$ und $b_\nu - b_\lambda$ dar.

$$\sum_{\varrho}\{(-\pi^2)^{\varrho}\eta(2\varrho\ 0)\}:\{i^{2\varrho}(2\varrho+1)!\}$$
$$=\sum_{\mu}\sum_{\varrho}\{u(\mu)(-\pi^2)^{\varrho}(a_\mu-a_\varkappa)^{2\varrho}\}:\{i^{2\varrho}(2\varrho+1)!\},$$

$$\sum_{\sigma}\{(-\pi^2)^{\sigma}\eta(0\ 2\sigma)\}:\{j^{2\sigma}(2\sigma+1)!\}$$
$$=\sum_{\nu}\sum_{\sigma}\{v(\nu)(-\pi^2)^{\sigma}(b_\nu-b_\lambda)^{2\sigma}\}:\{j^{2\sigma}(2\sigma+1)!\},$$

$$\sum_{\sigma}\{(-\pi^2)^{\sigma}\eta(\varkappa;2\sigma)\}:\{j^{2\sigma}(2\sigma+1)!\}$$
$$=\sum_{\nu}\sum_{\sigma}\{u(\varkappa\nu)(-\pi^2)^{\sigma}(b_\nu-b_\lambda)^{2\sigma}\}:\{j^{2\sigma}(2\sigma+1)!\},$$

$$\sum_{\varrho}\{(-\pi^2)^{\varrho}\eta(2\varrho;\lambda)\}:\{i^{2\varrho}(2\varrho+1)\}$$
$$=\sum_{\mu}\sum_{\varrho}\{v(\mu\lambda)(-\pi^2)^{\varrho}(a_\mu-a_\varkappa)^{2\varrho}\}:\{i^{2\varrho}(2\varrho+1)!\},$$

so erhält man, da $a_\mu - a_\varkappa = (\mu-\varkappa)i$; $b_\nu - b_\lambda = (\nu-\lambda)j$ und

$$\sum_{\varrho}\{(-\pi^2)^{\varrho}(\mu-\varkappa)^{2\varrho}\}:(2\varrho+1)!=\{\sin(\mu-\varkappa)\pi\}:(\mu-\varkappa)\pi=0\text{ oder }1,$$

$$\sum_{\sigma}\{(-\pi^2)^{\sigma}(\nu-\lambda)^{2\sigma}\}:(2\sigma+1)!=\{\sin(\nu-\lambda)\pi\}:(\nu-\lambda)\pi=0\text{ oder }1,$$

(wo der Wert 0 oder 1 gilt, je nachdem μ von $\varkappa$ und von ν von λ verschieden oder $\mu=\varkappa$ und $\nu=\lambda$ ist) die unbedingt konvergenten Darstellungsformen

$$\begin{aligned}
w(\varkappa\lambda) &= \sum_{\varrho,\sigma}\{(-\pi^2)^{\varrho+\sigma}\eta(2\varrho\ 2\sigma)\}:\{i^{2\varrho}j^{2\sigma}(2\varrho+1)!(2\sigma+1)!\},\\
u(\varkappa) &= \sum_{\varrho}\{(-\pi^2)^{\varrho}\eta(2\varrho\ 0)\}:\{i^{2\varrho}(2\varrho+1)!\},\\
v(\lambda) &= \sum_{\sigma}\{(-\pi^2)^{\sigma}\eta(0\ 2\sigma)\}:\{j^{2\sigma}(2\sigma+1)!\},\\
u(\varkappa\lambda) &= \sum_{\sigma}\{(-\pi^2)^{\sigma}\eta(\varkappa;2\sigma)\}:\{j^{2\sigma}(2\sigma+1)!\},\\
v(\varkappa\lambda) &= \sum_{\varrho}\{(-\pi^2)^{\varrho}\eta(2\varrho;\lambda)\}:\{i^{2\varrho}(2\varrho+1)!\}.
\end{aligned}\qquad(64)$$

Da hier die jeweiligen Argumentwerte $a_\varkappa$ und b_λ als Ausgangswerte der Abweichungen $a_\mu - a_\varkappa$ und $b_\nu - b_\lambda$ in die η-Werte eingehen, so gibt sich hierdurch die Abhängigkeit der Funktionswerte $w(\varkappa\lambda)$, $u(\varkappa)$, $v(\lambda)$, $u(\varkappa\lambda)$, $v(\varkappa\lambda)$ von den Argumentwerten kund. Diese Abhängigkeit tritt in der Darstellungsform unmittel-

bar hervor, wenn man zwei beliebig gewählte Zahlenwerte durch a_0 und b_0 bezeichnet, $a_\mu - a_\varkappa$ durch $(a_\mu - a_0) - (a_\varkappa - a_0)$ und $b_\nu - b_\lambda$ durch $(b_\nu - b_0) - (b_\lambda - b_0)$ ersetzt und die η-Werte nach Potenzen von $a_\varkappa - a_0$ und $b_\lambda - b_0$ entwickelt. Setzt man nämlich[1])

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varrho\sigma) &= \sum w(\mu\nu)(a_\mu - a_0)^\varrho (b_\nu - b_0)^\sigma, \\
\varepsilon(\varrho 0) &= \sum u(\mu)(a_\mu - a_0)^\varrho, \\
\varepsilon(0\sigma) &= \sum v(\nu)(b_\nu - b_0)^\sigma, \\
\varepsilon(\varkappa;\sigma) &= \sum u(\varkappa\nu)(b_\nu - b_0)^\sigma, \\
\varepsilon(\varrho;\lambda) &= \sum v(\mu\lambda)(a_\mu - a_0)^\varrho,
\end{aligned} \tag{65}$$

wo die Summation über $\mu = 1, 2, 3 \ldots r$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots s$ zu erstrecken ist, schreibt man ferner

$$\pi(a_\varkappa - a_0)\varphi(a_\varkappa) = \pi(a_\varkappa - a_0) - \pi^3(a_\varkappa - a_0)^3/i^2 3! + \cdots = i.\sin\{\pi(a_\varkappa - a_0):i\},$$
$$\pi(b_\lambda - b_0)\psi(b_\lambda) = \pi(b_\lambda - b_0) - \pi^3(b_\lambda - b_0)^3/j^2 3! + \cdots = j.\sin\{\pi(b_\lambda - b_0):j\}$$

und bezeichnet man die sukzessiven Ableitungen von $\varphi(a_\varkappa)$ nach $a_\varkappa$ durch $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ die Ableitungen von $\psi(b_\lambda)$ nach b_λ durch $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots$, so gelangt man zu den Darstellungsformen:

$$\begin{aligned}
w(\varkappa\lambda) &= \sum_{\varrho,\sigma}\{(-1)^{\varrho+\sigma}\varepsilon(\varrho\sigma)\varphi_\varrho(a_\varkappa)\psi_\sigma(b_\lambda)\}:\{\varrho!\sigma!\}, \\
u(\varkappa) &= \sum_{\varrho}\{(-1)^\varrho \varepsilon(\varrho 0)\varphi_\varrho(a_\varkappa)\}:\varrho!, \\
v(\lambda) &= \sum_{\sigma}\{(-1)^\varrho \varepsilon(0\sigma)\psi_\sigma(b_\lambda)\}:\sigma!, \\
u(\varkappa\lambda) &= \sum_{\sigma}\{(-1)^\sigma \varepsilon(\varkappa;\sigma)\psi_\sigma(b_\lambda)\}:\sigma!, \\
v(\varkappa\lambda) &= \sum_{\varrho}\{(-1)^\varrho \varepsilon(\varrho;\lambda)\varphi_\varrho(a_\varkappa)\}:\varrho!,
\end{aligned} \tag{66}$$

die sich für $a_0 = a_\varkappa$, $b_0 = b_\lambda$ auf die Darstellungsformen (64) reduzieren.

Sind nun die Merkmale a und b unabhängig voneinander, so daß die Gleichungen (31), (32), (33) erfüllt sind, so ist, wie der Anblick von (65) lehrt,

---

1) Auf Grund der Gleichungen

$$\varepsilon(\varrho\sigma) = \varepsilon^{\varrho+\sigma}_{\varrho\sigma};\ \varepsilon(\varrho 0) = \varepsilon^\varrho_{\varrho 0};\ \varepsilon(0\sigma) = \varepsilon^\sigma_{0\sigma};\ \varepsilon(\varkappa;\sigma) = \varepsilon^\sigma_{\varkappa\sigma};\ \varepsilon(\varrho;\lambda) = \varepsilon^\varrho_{\varrho\lambda}$$

erhält man $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, $\varepsilon_{\varrho 0}$, $\varepsilon_{0\sigma}$, $\varepsilon_{\varkappa\sigma}$, $\varepsilon_{\varrho\lambda}$ als Mittelwerte der Abweichungen $a_\mu - a_0$ und $b_\nu - b_0$.

$$\varepsilon(\varrho\sigma) = \varepsilon(\varrho 0)\varepsilon(0\sigma), \tag{67}$$

$$\varepsilon(1;\sigma) = \varepsilon(2;\sigma) = \varepsilon(3;\sigma) = \cdots = \varepsilon(r;\sigma), \tag{68}$$

$$\varepsilon(\varrho;1) = \varepsilon(\varrho;2) = \varepsilon(\varrho;3) = \cdots = \varepsilon(\varrho;s), \tag{69}$$

wonach, wie unmittelbar ersichtlich ist,

$$f(a_\varkappa, b_\lambda) = f_1(a_\varkappa) \cdot f_2(b_\lambda)$$
$$\chi(a_1, b_\lambda) = \chi(a_2, b_\lambda) = \cdots = \chi(a_r, b_\lambda)$$
$$w(a_\varkappa, b_1) = w(a_\varkappa, b_2) = \cdots = w(a_\varkappa, b_s).$$

Demnach genügt es zur Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen a und b auf Grund von (67) die Differenzen

$$\Delta(\varrho,\sigma) = \varepsilon(\varrho\sigma) - \varepsilon(\varrho 0)\varepsilon(0\sigma) \tag{70}$$

und auf Grund von (68) und (69), wenn überdies

$$\left.\begin{aligned} r \,.\, e(0;\varrho) &= \varepsilon(1;\sigma) + \varepsilon(2;\sigma) + \cdots + \varepsilon(r;\sigma), \\ s \,.\, e(\varrho;0) &= \varepsilon(\varrho;1) + \varepsilon(\varrho;2) + \cdots + \varepsilon(\varrho;s), \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

gesetzt wird, die Differenzen

$$\Delta'(\varkappa,\sigma) = \varepsilon(\varkappa;\sigma) - e(0;\sigma), \tag{72}$$

$$\Delta''(\varrho,\lambda) = \varepsilon(\varrho;\lambda) - e(\varrho;0) \tag{73}$$

zu betrachten.

Es ist aber mit Rücksicht auf (34), (36), (37)

$$\Delta(\varrho,\sigma) = \sum_{\mu,\nu} \delta(\mu\nu)(a_\mu - a_0)^\varrho (b_\nu - b_0)^\sigma, \tag{70a}$$

$$\Delta'(\varkappa,\sigma) = \sum_{\nu} \delta'(\varkappa\nu)(b_\nu - b_0)^\sigma, \tag{72a}$$

$$\Delta''(\varrho,\lambda) = \sum_{\mu} \delta''(\mu\lambda)(a_\mu - a_0)^\varrho, \tag{73a}$$

so daß in der Tat die Bestimmung der Abhängigkeit auf Werte, die in linearer Form von den Werten $\delta(\mu\nu)$, $\delta'(\varkappa\nu)$, $\delta''(\varkappa\nu)$ abhängen, zu gründen ist. Zugleich erhellt, daß den $(r-1)(s-1)$ voneinander unabhängigen Werten δ, δ', δ'' entsprechend auch $(r-1)(s-1)$ voneinander unabhängige Werte $\Delta(\varrho,\sigma)$, $\Delta'(\varkappa,\sigma)$, $\Delta''(\varrho,\lambda)$ die Abhängigkeit vollständig bestimmen.

Man kann insbesondere die zu $\varrho = 1, 2, 3 \ldots r-1$; $\sigma = 1, 2, 3 \ldots s-1$ gehörigen Werte Δ, Δ', Δ'' wählen und eine *angenäherte* Bestimmung der Abhängigkeit mittels einer kleineren Anzahl dieser Werte geben. In jedem Falle wird man den Wert $\Delta(1,1)$, $\Delta'(1,1)$, $\Delta''(1,1)$ berechnen.

Als Ausgangswerte a_0 und b_0 der Abweichungen $a_\mu - a_0$ und $b_\nu - b_0$ wird man vorteilhaft diejenigen wählen, für welche

$$\begin{aligned} \varepsilon(10) &= \sum w(\mu\nu)(a_\mu - a_0) = \sum u(\mu)(a_\mu - a_0) = 0 \\ \varepsilon(01) &= \sum w(\mu\nu)(b_\nu - b_0) = \sum v(\nu)(b_\nu - b_0) = 0. \end{aligned} \tag{74}$$

Sind die Wahrscheinlichkeitswerte $w(\mu\nu)$, $u(\mu)$, $v(\nu)$, $u(\varkappa\nu)$, $v(\mu\lambda)$ Repräsentanten der in (24) bis (28) angegebenen Wertensysteme, so repräsentieren auch $\varepsilon(\varrho\sigma)$, $\varepsilon(\varrho 0)$, $\varepsilon(0\sigma)$, $\varepsilon(\varkappa;\sigma)$, $\varepsilon(\varrho;\lambda)$ und ebenso $\Delta(\varrho,\sigma)$, $\Delta'(\varkappa,\sigma)$, $\Delta''(\varrho,\lambda)$ Wertensysteme, deren arithmetische Mittel und mittlere quadratische Abweichungen zu bestimmen sind.

Um diese Bestimmung zunächst für die ε-Werte zu leisten, soll der Einfachheit wegen angenommen werden, daß für n Formen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, die unter $m = z(1) + z(2) + \cdots + z(n)$ Fällen mit den Häufigkeiten $z(1), z(2), \ldots z(n)$ oder den Wahrscheinlichkeiten $w(1) = z(1):m$, $w(2) = z(2):m, \ldots w(n) = z(n):m$ beobachtet worden sind, der Wert

$$\varepsilon = w(1)a_1 + w(2)a_2 + \cdots + w(n)a_n \tag{75}$$

gefunden sei. Ich setze nun

$$\begin{aligned} F &= (w(1)\exp\{u(1)\} + w(2)\exp\{u(2)\} + \cdots w(n)\exp\{u(n)\})^m \\ &= \sum W\{z(1)\ldots z(n)\}\exp\{z(1)u(1)\}\ldots\exp\{z(n)u(n)\}, \end{aligned}$$

wo die Summation über alle Werte $z(1), z(2)\ldots z(n)$, deren Summe gleich m ist, zu erstrecken ist. Dann wird das arithmetische Mittel aller ε-Werte, die bei unbegrenzter Wiederholung der $m = z(1) + z(2) + \cdots + z(n)$ Beobachtungen an Stelle des tatsächlich in (75) vorliegenden Wertes treten würden, bestimmt durch

$$\frac{1}{m}\sum\{z(1)a_1 + z(2)a_2 + \cdots + z(n)a_n\}.W\{z(1)\ldots z(n)\} = \varepsilon, \tag{76}$$

da für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots n$

$$\sum z(\varkappa)\, W\{z(1)\ldots z(n)\} = m\, w(\varkappa),$$

wie die Differentiation von F nach $u(\varkappa)$ für $u(1) = u(2) = \cdots = u(n) = 0$ ergibt. Es wird ferner das mit m^2 multiplizierte Mittel der Abweichungsquadrate bestimmt durch

$$\begin{aligned} &\sum\{z(1)a_1 + z(2)a_2 + \cdots + z(n)a_n - \varepsilon\}^2.W(z) \\ &= \sum\{z(1)a_1 + z(2)a_2 + \cdots + z(n)a_n\}^2.W(z) - \varepsilon^2 \\ &= \sum\{z(1)^2a_1^2 + 2z(1)z(2)a_1a_2 + \cdots\}.W(z) - \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Da aber, wie die zweimalige Differentation von F nach $u(x)$ allein und nach $u(x)$ und $u(\lambda)$ für $u(1)=u(2)=\cdots=u(n)=0$ erkennen läßt,

$$\sum z(x)^2 W(z) = m(m-1)w(x)^2 + mw(x),$$
$$\sum z(x)z(\lambda)\, W(z) = m(m-1)w(x)w(\lambda),$$

so erhält man

$$\sum\{z(1)^2 a_1^{\,2} + 2z(1)z(2)a_1 a_2 + \cdots\}\, W(z)$$
$$= m(m-1)\{w(1)a_1 + \cdots + w(n)a_n\}^2 + m\{w(1)a_1^{\,2} + \cdots + w(n)a_n^{\,2}\}.$$

Es ist daher, wenn man in Übereinstimmung mit (75) $w(1)a_1 + \cdots + w(n)a_n = \varepsilon$ und überdies

$$\varepsilon(2) = w(1)a_1^{\,2} + \cdots + w(n)a_n^{\,2} \tag{77}$$

setzt, das Mittel aller Abweichungsquadrate gleich

$$\{\varepsilon(2) - \varepsilon^2\} : m \tag{78}$$

und die mittlere quadratische Abweichung gleich der Quadratwurzel hievon, wonach das durch ε repräsentierte Wertensystem durch

$$\varepsilon \pm \sqrt{[\{\varepsilon(2) - \varepsilon^2\} : m]} \tag{79}$$

dargestellt wird.

Demgemäß repräsentieren die Werte $\varepsilon(\varrho\sigma)$, $\varepsilon(\varrho 0)$, $\varepsilon(0\sigma)$, $\varepsilon(x;\sigma)$, $\varepsilon(\varrho;\lambda)$ die Wertensysteme

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\varrho\sigma) \pm \sqrt{[\{\varepsilon(2\varrho 2\sigma) - \varepsilon(\varrho\sigma)^2\} : m]}\\
&\varepsilon(\varrho 0) \pm \sqrt{[\{\varepsilon(2\varrho 0) - \varepsilon(\varrho 0^2\} : m]}\\
&\varepsilon(0\sigma) \pm \sqrt{[\{\varepsilon(02\sigma) - \varepsilon(0\sigma)^2\} : m]}\\
&\varepsilon(x;\sigma) \pm \sqrt{[\{\varepsilon(x;2\sigma) - \varepsilon(x;\sigma)^2\} : x(x)]}\\
&\varepsilon(\varrho;\lambda) \pm \sqrt{[\{\varepsilon(2\varrho;\lambda) - \varepsilon(\varrho;\lambda)^2\} : y(\lambda)]}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Um sodann die entsprechende Bestimmung für $\Delta(\varrho,\sigma)$ zu geben, setze ich in

$$\Delta(\varrho,\sigma) = \sum_{x,\lambda}\{w(x\lambda) - u(x)v(\lambda)\}\,(a_x - a_0)^\varrho (b_\lambda - b_0)^\sigma$$

der Einfachheit wegen

$$A_x = a_x - a_0; \quad B_\lambda = b_\lambda - b_0$$

und in gleicher Weise wie in (41) an Stelle von $w(\varkappa\lambda) - u(\varkappa)v(\lambda)$ die Summe

$$\sum_{\mu,\nu}\{w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu) - w(\varkappa\nu)w(\mu\lambda)\},$$

so daß

$$\Delta(\varrho,\sigma) = \sum_{\varkappa,\nu}\sum_{\mu,\nu}\{w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu) - w(\varkappa\nu)w(\mu\lambda)\}A_{\varkappa}^{\varrho}B_{\lambda}^{\sigma} \quad (81)$$

resultiert. Setzt man noch zur Abkürzung

$$A_{\varkappa}^{\varrho} - A_{\mu}^{\varrho} = A(\varkappa\mu;\varrho);\ B_{\lambda}^{\sigma} - B_{\nu}^{\sigma} = B(\lambda\nu;\sigma)$$

und läßt man die durch Σ angedeutete Summe in jedem Falle für alle hinter den Summenzeichen stehende Wertenpaare $\varkappa$ und λ, μ und ν, α und β, γ und δ über die Werte $1, 2, 3 \ldots r$; $1, 2, 3 \ldots s$ (für jedes Paar unabhängig von den anderen Paaren) laufen, so erhält man aus (81)

$$2\Delta(\varrho,\sigma) = \sum w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)$$

$$4\Delta^2(\varrho,\sigma) = \sum w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu)w(\alpha\beta)w(\gamma\delta)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)A(\alpha\gamma;\varrho)B(\beta\delta;\sigma).$$

Diese einfachen Darstellungsformen gestatten, unter Benützung der Ableitungen von

$$F = (w(11)\exp\{u(11)\} + \cdots + w(rs)\exp\{u(rs)\})^m$$

$$= \sum W(z(11)\ldots z(rs))\exp\{z(11)u(11)\}\ldots\exp\{z(rs)u(rs)\}$$

nach den u (für $u(11) = \cdots = u(rs) = 0$), die Berechnung der bei unbegrenzter Wiederholung der $m = z(11) + \cdots + z(rs)$ Beobachtungen sich ergebenden Summen

$$\sum z(\varkappa\lambda)z(\mu\nu)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)W(z) \text{ und}$$

$$\sum z(\varkappa\lambda)z(\mu\nu)z(\alpha\beta)z(\gamma\delta)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)A(\alpha\gamma;\varrho)B(\beta\delta;\sigma)W(z),$$

wo die Summation nicht nur über die Wertenpaare $\varkappa,\lambda$; μ,ν; α,β; γ,δ, sondern überdies auch über die Werte z, deren Summe gleich m ist, erstreckt werden muß. Man findet für die erste Summe den Betrag

$$m(m-1)\sum w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)$$

und für die zweite Summe den Betrag

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\{\mathrm{I}\}+4m(m-1)(m-2)\{\mathrm{II}\}+2m(m-1)\{\mathrm{III}\},$$

$$\{\mathrm{I}\} = \sum w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu)w(\alpha\beta)w(\gamma\delta)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)A(\alpha\gamma;\varrho)B(\beta\delta;\sigma),$$

$$\{\mathrm{II}\} = \sum w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu)w(\alpha\beta)A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)A(\varkappa\alpha;\varrho)B(\lambda\beta;\sigma),$$

$$\{\mathrm{III}\} = \sum w(\varkappa\lambda)w(\mu\nu)\{A(\varkappa\mu;\varrho)B(\lambda\nu;\sigma)\}^2.$$

Die erste Summe läßt erkennen, daß das durch $\Delta_0(\varrho,\sigma)$ zu bezeichnende Mittel aller bei unbegrenzter Wiederholung der Beobachtungen sich ergebenden Δ-Werte durch

$$m\Delta_0(\varrho,\sigma) = (m-1)\Delta(\varrho,\sigma) \tag{82}$$

bestimmt wird, wo $\Delta(\varrho,\sigma)$ den aus den Beobachtungen resultierenden Wert der Formel (81) angibt. Subtrahiert man sodann das Quadrat der ersten Summe von der zweiten Summe, so erhält man nach Division mit $4m$ das durch $Q(\varrho,\sigma)$ zu bezeichnende Mittel der Abweichungsquadrate aus der Gleichung

$$\begin{aligned} m^3Q(\varrho,\sigma)^2 &= -2(m-1)(2m-3)\Delta(\varrho,\sigma)^2 \\ &\quad + (m-1)(m-2)[\mathrm{I}] + (m-1)[\mathrm{II}], \\ [\mathrm{I}] &= \varepsilon(2\varrho\,2\sigma) - 2\varepsilon(\varrho\,2\sigma)\varepsilon(\varrho\,0) - 2\varepsilon(2\varrho\,0)\varepsilon(0\sigma) + 3\varepsilon(\varrho\sigma)^2 \\ &\quad - 2\varepsilon(\varrho\sigma)\varepsilon(\varrho\,0)\varepsilon(0\sigma) + \varepsilon(\varrho\,0)\varepsilon(0\,2\sigma) + \varepsilon(2\varrho\,0)\varepsilon(0\sigma), \\ [\mathrm{II}] &= \varepsilon(2\varrho\,2\sigma) + 2\varepsilon(\varrho\,2\sigma)\varepsilon(\varrho\,0) - 2\varepsilon(2\varrho\sigma)\varepsilon(0\sigma) \\ &\quad + \varepsilon(2\varrho\,0)\varepsilon(0\,2\sigma)) + 2\varepsilon(\varrho\sigma)^2, \end{aligned} \tag{83}$$

wo die über $\varkappa$ und λ, μ und ν, α und β, γ und δ erstreckten Summen durch die ε-Werte ausgedrückt worden sind.

Demnach ist der auf induktivem Wege (durch Ziehen einzelner Kugeln) festgestellte Wert $\Delta(\varrho,\sigma)$ der Repräsentant der Mannigfaltigkeit

$$(1-1/m)\Delta(\varrho,\sigma) \pm Q(\varrho,\sigma) \tag{84}$$

Man findet schließlich die von den Werten $\Delta'(\varkappa,\sigma)$ und $\Delta''(\varrho,\lambda)$ repräsentierten Mannigfaltigkeiten mit Rücksicht darauf, daß jene Werte den Formeln (72) und (73) zufolge in linearer Form von den $\varepsilon(\varkappa,\sigma)$ und $\varepsilon(\varrho;\lambda)$ abhängen, bestimmt durch

$$\begin{aligned} &\Delta'(\varkappa,\sigma) \pm Q'(\varkappa,\sigma) \\ &\Delta''(\varrho,\lambda) \pm Q''(\varrho,\lambda) \end{aligned} \tag{85}$$

wo die mittleren quadratischen Abweichungen $Q'(\varkappa,\sigma)$ und $Q''(\varrho,\lambda)$ durch

$$
\begin{aligned}
r^2 Q'(x,\sigma)^2 &= \{\varepsilon(1;2\sigma) - \varepsilon(1;\sigma)^2\} : x(1) + \cdots \\
&\quad + \{\varepsilon(x-1;2\sigma) - \varepsilon(x-1;\sigma)^2\} : x(x-1) \\
&\quad + (r-1)^2 \{\varepsilon(x;2\sigma) - \varepsilon(x;\sigma)^2\} : x(x) \\
&\quad + \{\varepsilon(x+1;2\sigma) - \varepsilon(x+1;\sigma)^2\} : x(x+1) + \cdots; \\
s^2 Q''(\varrho,\lambda)^2 &= \{\varepsilon(2\varrho;1) - \varepsilon(\varrho;1)^2\} : y(1) + \cdots \\
&\quad + \{\varepsilon(2\varrho;\lambda-1) - \varepsilon(\varrho;\lambda-1)^2\} : y(\lambda-1) \\
&\quad + (s-1)^2 \{\varepsilon(2\varrho;\lambda) - \varepsilon(\varrho;\lambda)^2\} : y(\lambda) \\
&\quad + \{\varepsilon(2\varrho;\lambda+1) - \varepsilon(\varrho;\lambda+1)^2\} : y(\lambda+1) + \cdots
\end{aligned}
\tag{86}
$$

definiert werden.

Das hiernach sich darbietende Resultat läßt sich wie folgt zusammenfassen:

Ist die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Formen von a oder von b größer als zwei, so daß die Abhängigkeit durch das System der $(r-1)(s-1)$ *Werte* $\delta(x\lambda)$, $\delta'(x\lambda)$ *oder* $\delta''(x\lambda)$ *bestimmt wird, so kann man anstelle dieser Werte die durch* (70), (72), (73) *definierten Werte* $\Delta(\varrho,\sigma)$, $\Delta'(x,\sigma)$ *oder* $\Delta''(\varrho,\lambda)$ *zur Beurteilung der Abhängigkeit wählen. Die bei induktiver Wahrscheinlichkeitsbestimmung von diesen Werten repräsentierten Mannigfaltigkeiten werden durch* (84) *und* (85) *angedeutet.*

Es ist aber im Auge zu behalten, daß verschiedene Formen vollkommener Abhängigkeit möglich sind. Man wird darum für die gerade in Betracht kommende Form den bei vollkommener Abhängigkeit sich ergebenden Wert $\Delta_0(\varrho,\sigma)$, $\Delta_0'(x,\sigma)$ oder $\Delta_0''(\varrho,\lambda)$ neben dem aus den Beobachtungen resultierenden Wert $\Delta(\varrho,\sigma)$, $\Delta'(x,\sigma)$ oder $\Delta''(\varrho,\lambda)$ zu bestimmen haben, um, wofern jene Werte von Null verschieden sind, in dem Quotienten

$$\Delta(\varrho,\sigma):\Delta_0(\varrho,\sigma);\ \Delta'(x,\sigma):\Delta_0'(x,\sigma);\ \Delta''(\varrho,\lambda):\Delta_0''(\varrho,\lambda) \tag{87}$$

ein Maß für die Annäherung an die betreffende Form vollkommener Abhängigkeit zu erhalten.

Ist z. B. $r = s$; $a_1 - a_0 = b_1 - b_0$, $a_2 - a_0 = b_2 - b_0$, ... $a_r - a_0 = b_r - b_0$ und treten von allen $r.r$ möglichen Kombinationen bloß die r Kombinationen $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3) \ldots (a_r b_r)$ auf, so ist für diesen ganz besonderen Fall vollkommener Abhängigkeit, wie aus dem Anblick von (65) folgt,

$$\varepsilon(\varrho\,\sigma) = \varepsilon(\varrho + \sigma\,0) = \varepsilon(0\,\varrho + \sigma).$$

Geht man nun von den Werten $\varepsilon(\varrho\,\sigma)$ zu den durch die Gleichung

$$\varepsilon(\varrho\,\sigma) = \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma};\ \varepsilon(\varrho+\sigma\,0) = \varepsilon_{\varrho+\sigma,0}^{\varrho+\sigma};\ \ \varepsilon(0\,\varrho+\sigma) = \varepsilon_{0,\varrho+\sigma}^{\varrho+\sigma}$$

definierten Mittelwerten $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$, $\varepsilon_{\varrho+\sigma,0}$, $\varepsilon_{0,\varrho+\sigma}$ über, so erhält man

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \varepsilon_{\varrho+\sigma,0}^{\varrho+\sigma} = \varepsilon_{0,\varrho+\sigma}^{\varrho+\sigma}$$

oder, wie man der Symmetrie wegen schreiben kann

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \varepsilon_{\varrho+\sigma,0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0,\varrho+\sigma}^{\sigma}.$$

Es wird somit, wenn auch $\varepsilon(\varrho) = \varepsilon_{\varrho}^{\varrho}$, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon_{\sigma}^{\sigma}$ gesetzt wird,

$$\Delta_0(\varrho,\sigma) = \varepsilon_{\varrho+\sigma,0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0,\varrho+\sigma}^{\sigma} - \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho}\,\varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma} \tag{88}$$

Es ist aber für geradzahlige Werte $\varrho+\sigma$, da weder ϱ noch σ gleich Null anzunehmen ist[1]),

$$\varepsilon_{\varrho+\sigma,0} > \varepsilon_{\varrho,0};\ \ \varepsilon_{\varrho+\sigma,0}^{\varrho} > \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho}$$
$$\varepsilon_{0,\varrho+\sigma} > \varepsilon_{0,\sigma};\ \ \varepsilon_{0,\varrho+\sigma}^{\sigma} > \varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma},$$

so daß $\Delta_0(\varrho,\sigma)$ stets positiv und von Null verschieden ist. *Man erhält daher in diesem besonderen Falle für geradzahlige* $\varrho+\sigma$ *in dem Quotienten*

$$\Delta(\varrho,\sigma) : \Delta_0(\varrho,\sigma) = \left\{\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} - \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho}\varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma}\right\} : \left\{\varepsilon_{\varrho+\sigma,0}^{\varrho}\,\varepsilon_{0,\varrho+\sigma}^{\sigma} - \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho}\varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma}\right\} \tag{8}$$

ein Maß der Abhängigkeit.

Werden die Ausgangswerte a_0 und b_0 der Abweichungen $a_\mu - a_0$ und $b_\nu - b_0$ in Übereinstimmung mit (74) so bestimmt, daß $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} = 0$, so gelangt man für $\varrho = \sigma = 1$ zu dem Werte

$$\Delta(1,1) : \Delta_0(1,1) = \varepsilon_{1,1}^{2} : \varepsilon_{2,0}\varepsilon_{0,2} = \varepsilon(11) : \sqrt{\{\varepsilon(20)\varepsilon(02)\}}. \tag{90}$$

---

1) In den Untersuchungen „Die Theorie der Kollectivgegenstände" (im 17ten Bande der von WUNDT herausgegebenen Philosophischen Studien; S. 141 des Separatabdrucks; 1902) leite ich Eigenschaften der ε-Werte ab, aus denen sich ergibt, daß in der Reihe ε_{10}, ε_{20}, ε_{30}, ε_{40} . . . und ebenso in der Reihe ε_{01}, ε_{02}, ε_{03}, ε_{04} . . . . jedes Glied mit geradzahligem Index größer ist als jedes der vorangehenden Glieder. Es ist nämlich

$$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_4 < \varepsilon_6 < \cdots$$
$$\varepsilon_1^2 < \varepsilon_2^2;\ \ \varepsilon_3^2 < \varepsilon_4^2;\ \ \varepsilon_5^2 < \varepsilon_6^2;\ \cdots$$

wenn ε_{x0} und ε_{0x} durch ε_x vertreten wird.

Es ist dies der von Pearson[1]) auf Grund einer Formel von Bravais[2]) eingeführte und als ausschließliches Maß der Abhängigkeit betrachtete „Korrelationskoeffizient".

6. Die Sukzessionen der $a_\varkappa$ und der b_λ für voneinander unabhängige Merkmale a und b.

Es ist denkbar, daß man beim Beobachten der Merkmale a und b nicht die jeweils auftretenden Formen $a_\varkappa$ und b_λ selbst feststellen, sondern nur je zwei beobachtete Fälle miteinander vergleichen und auf Grund des Vergleichs angeben kann, ob die $a_\varkappa$ und die b_λ im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne sich ändern. Man hat alsdann, wenn das Urnenschema zugrunde gelegt wird, anzunehmen, daß man beim Ziehen der Kugeln aus der Urne nicht die Zeichen $a_\varkappa$ und b_λ jeder einzelnen Kugel feststellen, sondern bloß für je zwei gezogene Kugeln angeben kann, ob der Übergang von der einen zur anderen ein Aufsteigen oder ein Absteigen innerhalb der Reihe $a_1, a_2 \ldots a_r$ und der Reihe $b_1, b_2 \ldots b_s$ bedingt.

So kann man beispielsweise von den Schülern einer Klasse zwar im allgemeinen sagen, ob der eine in diesem oder jenem Unterrichtsfache besser sei als der andere, und man kann demgemäß eine Rangordnung herstellen. Man kann aber nicht angeben, um wie viel der eine besser ist als der andere, da man keine Einheitsleistung als Maßstab zugrunde legen und überdies die Leistungen der einzelnen Schüler nicht als Summen von Einheitsleistungen auffassen kann. Denn wollte man auch etwa die Anzahlen der Fehler einer schriftlichen Prüfungsarbeit als Maßstab zugrunde legen, so müßte man doch zugeben, daß die einzelnen Fehler in der Regel nicht gleichwertig sind.

Hat man nun n Kugeln gezogen, so kann man sie bezüglich des Merkmals a geordnet denken, der Art, daß der Übergang von der einen Kugel zur nächsten niemals ein Zurückgehen in der Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots a_r$ zur Folge hat. Es fragt sich alsdann, wie aus der Reihenfolge der zugehörigen b_λ auf die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Merkmale a und b geschlossen werden kann. — Eben dieselbe Frage erhebt sich, wenn die Kugeln in r Urnen

1) In der erwähnten Abhandlung; S. 264.

2) Sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. Mémoires présentés à l'Institut de France; Bd. 9; S. 272, 279.

$a_1, a_2, a_3 \dots a_r$ verteilt sind und somit von vornherein in der Reihenfolge $a_1, a_2, a_3 \dots a_r$ gezogen werden können. Ein Unterschied besteht nur insofern, als man im zweiten, nicht aber im ersten Falle das Auftreten von Kugeln einer und derselben Stufe $a_\varkappa$ vermeiden und das Fortschreiten innerhalb der Reihe $a_1, a_2, a_3 \dots a_r$ willkürlich bestimmen kann.

Ist eine einzige Urne vorhanden und bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Kugel $(a_\varkappa b_\lambda)$ durch $w(\varkappa\lambda)$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Reihe nach die n Kugeln

$$(a_\alpha b_\beta), (a_\gamma b_\delta), (a_\varepsilon b_\eta), \dots$$

gezogen werden gleich

$$w(\alpha\beta) \cdot w(\gamma\delta) \cdot w(\varepsilon\eta) \dots \qquad (91)$$

Sind hingegen r Urnen $a_1, a_2, a_3 \dots a_r$ vorhanden und bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Kugel $(a_\varkappa b_\lambda)$ in der Urne $a_\varkappa$ durch $u(\varkappa\lambda)$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eben dieselbe Reihe von Kugeln gezogen werde, gleich

$$u(\alpha\beta) \cdot u(\gamma\delta) \cdot u(\varepsilon\eta) \dots \qquad (92)$$

Nun ist bei Unabhängigkeit der Merkmale a und b für beliebige Indices $\varkappa$ und λ, μ und ν auf Grund von (31)

$$w(\varkappa\lambda) \cdot w(\mu\nu) = w(\varkappa\nu) \cdot w(\mu\lambda)$$

und auf Grund von (32)

$$u(\varkappa\lambda) \cdot u(\mu\nu) = u(\varkappa\nu) \cdot u(\mu\lambda).$$

Demgemäß bleiben die Werte der Produkte (91) und (92) unverändert, wenn die Indices der Reihe $\alpha, \gamma, \varepsilon, \dots$ oder die Indices der Reihe $\beta, \delta, \eta, \dots$ beliebig miteinander vertauscht werden. Dies bedingt aber eine entsprechende Permutation der Glieder in der Reihe $a_\alpha, a_\beta, a_\varepsilon, \dots$ oder in der Reihe $b_\gamma, b_\delta, b_\eta, \dots$

Da die Wahrscheinlichkeitswerte nichts anderes als relative Häufigkeitswerte sind, so gewinnt man hieraus die Erkenntnis:

Sind die Merkmale a und b unabhängig voneinander, so wird beim Ziehen von n Kugeln jede aus der Reihe

$$(a_\alpha b_\beta), (a_\gamma b_\delta), (a_\varepsilon b_\eta) \dots$$

durch Permutation der $a_\alpha, a_\gamma, a_\varepsilon, \dots$ oder der $b_\beta, b_\delta, b_\eta, \dots$ hervorgehende neue Reihe mit derselben Häufigkeit auftreten.

Beim Betrachten der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kugelpaare, die sich aus den n Kugeln einer einzelnen Reihe bilden lassen, kann man aber nur feststellen, ob für die Kugeln jedes einzelnen Paares mit dem

Vorwärts- oder Rückwärtsgehen innerhalb der Reihe $a_1, a_2, a_3 \dots a_r$ ein Vorwärts- oder Rückwärtsgehen innerhalb der Reihe $b_1, b_2, b_3 \dots b_s$ verknüpft ist. Erfolgt hierbei der Übergang von einem Gliede zum anderen innerbalb jeder der beiden Reihen im gleichen Sinne, so soll das betrachtete Paar mit dem Zeichen $+$, erfolgt der Übergang im verschiedenen Sinne, so soll es mit dem Zeichen $-$ notiert werden. Stimmen hingegen die beiden, einem Paare angehörigen Formen von a oder von b miteinander überein, so daß weder ein Vorwärts- noch ein Rückwärtsgehen innerhalb der Reihe $a_1, a_2, a_3 \dots a_r$ oder $b_1, b_2, b_3 \dots b_s$ festgestellt werden kann, so soll das Paar sowohl mit dem Zeichen $+$ als auch mit dem Zeichen $-$, wo jedes halb zu rechnen ist, notiert werden. Auf diese Weise erhält man den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Kugelpaaren entsprechend i Vorzeichen $+$ und k Vorzeichen $-$, wo

$$i + k = \tfrac{1}{2}n(n-1). \tag{93}$$

Bildet man nun alle Permutationen der $a_\alpha, a_\gamma, a_\varepsilon, \dots$ oder der $b_\beta, b_\delta, b_\eta, \dots$, so ergeben sich andere und andere Anzahlen i und k der Vorzeichen $+$ und $-$. Man findet so, daß die Anzahlen i der $+$ Zeichen mit den Werten

$$0, 1, 2, 3 \cdots \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

in den relativen Häufigkeiten

$$c_0, c_1, c_2, c_3 \cdots c_{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

auftreten, so daß, wenn

$$\begin{aligned} A &= 0 \,.\, c_0 + 1 \,.\, c_1 + 2 \,.\, c_2 + \cdots + \tfrac{1}{2}n(n-1) \,.\, c_{\frac{1}{2}n(n-1)} \\ B^2 &= 0^2 \,.\, c_0 + 1^2 \,.\, c_1 + 2^2 \,.\, c_2 + \cdots + (\tfrac{1}{2}n(n-1))^2 \,.\, c_{\frac{1}{2}n(n-1)} \\ Q^2 &= (0-A)^2 c_0 + (1-A)^2 c_1 + (2-A)^2 \,.\, c_2 + \cdots \\ &\quad + (\tfrac{1}{2}n(n-1) - A)^2 \,.\, c_{\frac{1}{2}n(n-1)} \\ &= B^2 - A^2 \end{aligned}$$

gesetzt wird, die Mannigfaltigkeit aller i-Werte durch

$$A \pm Q, \tag{94}$$

wo A das arithmetische Mittel und Q die mittlere quadratische Abweichung bezeichnet, sich darstellen läßt. In entsprechender Weise ist die Mannigfaltigkeit aller k-Werte durch

$$\tfrac{1}{2}n(n-1) - A \pm Q \tag{95}$$

darstellbar.

Um A und Q zu berechnen, definiere ich durch die Gleichung

$$(n-x+1)\varphi_x(u) = 1 + \exp\{u\} + \exp\{2u\} + \cdots + \exp\{(n-x)u\} \tag{96}$$

die Funktion $\varphi_x(u)$ und setze

$$f(u) = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(u) \cdot \varphi_3(u) \cdots \varphi_n(u). \tag{97}$$

Dann erhält man durch Entwicklung nach Potenzen von $\exp(u)$, wie man sich leicht überzeugt,

$$\begin{aligned} f(u) = c_0 + c_1 \exp\{u\} + c_2 \exp\{2u\} + \cdots \\ + c_{\frac{1}{2}n(n-1)} \exp\{\tfrac{1}{2}n(n-1)u\}, \end{aligned} \tag{98}$$

so daß

$$f(0) = 1;\ f'(0) = A;\ f''(0) = B;\ f''(0) - \{f'(0)\}^2 = Q^2.$$

Es ist aber

$$f'(u) : f(u) = \sum_x \{\varphi_x'(u) : \varphi_x(u)\},$$

$$f''(u) : f'(u) - \{f'(u) : f(u)\}^2 = \sum_x [\varphi_x''(u) : \varphi_x(u) - \{\varphi_x'(u) : \varphi_x(u)\}^2],$$

woraus mit Rücksicht auf die Relationen

$$\varphi_x'(0) : \varphi_x(0) = \frac{1}{n-x+1}(1 + 2 + \cdots + (n-x)) = \frac{1}{2}(n-x)$$

$$\varphi_x''(0) : \varphi_x(0) = \frac{1}{n-x+1}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-x)^2) = \frac{1}{6}(n-x)(2n-2x+1)$$

die Werte

$$A = f'(0) : f(0) = \tfrac{1}{4}n(n-1); \tag{99}$$

$$Q^2 = f''(0) : f(0) - \{f'(0) : f(0)\}^2 = \tfrac{1}{72}n(n-1)(2n+5) \tag{100}$$

sich ergeben.

Man gelangt so zu folgendem Resultat:

Sind die Merkmale a und b voneinander unabhängig, und werden in unbegrenzter Wiederholung je n Kombinationen

$$(a_\alpha b_\beta), (a_\gamma b_\delta), (a_\varepsilon b_\eta), \ldots$$

beobachtet, so treten im Durchschnitt aller Fälle

$$A = \tfrac{1}{4}n(n-1)$$

gleichsinnige und ebensoviele entgegengesetzt gerichtete Sukzessionen der a_x und der b_λ auf, wobei die mittlere quadratische Abweichung der in den einzelnen Fällen sich ergebenden Anzahlen von Sukzessionen der einen oder der anderen Art durch

$$Q = \tfrac{1}{12}\sqrt{\{2n(n-1)(2n+5)\}}$$

angegeben wird.

In der Abweichung von diesen Zahlenwerten tut sich die Abhängigkeit der Merkmale a und b kund.

Druckfertig erklärt 6 III. 1905.]

SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1905.

Nachdem in einer unmittelbar vorhergehenden *außerordentlichen gemeinsamen* Sitzung *beider* Klassen Herr Professor Dr. Rabl zum ordentlichen Mitglied der Gesellschaft aufgenommen war, erfolgte die Mitteilung verschiedener eingegangener Dankschreiben.

Vorlage von schenkungsweise eingegangenen Schriften.

Mitteilungen aus dem Protokoll der letzten Wiener Kartellversammlung: mit dem Druck der chemischen Kristallographie wird in nächster Zeit begonnen werden, und für die nächste Konferenz über die mathematische Encyklopädie ist der Leipziger Kartelltag in Aussicht genommen.

Vorträge:

Herr Siegfried, a. o. M.: Über eine neue Reaktion amphoterer Körper.

Herr Chun, o. M.: Über ein noch zu erforschendes unterseeisches Korallenriff im zentralen indischen Ozean.

SITZUNG VOM 27. FEBRUAR 1905.

Geschäftliche Mitteilungen.

Herr Fischer, a. o. M., trägt vor: Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme; die Arbeit wird in den Abhandlungen erscheinen.

Digitized by Google

Eine neue Reaktion amphoterer Körper.

Von

M. Siegfried.

Die Natrium- oder Baryumsalze der Amidosäuren der Glykokollreihe reagieren stark alkalisch und sind nach unseren heutigen Kenntnissen stark hydrolysiert.[1]) Deshalb sollte man erwarten, daß Kohlensäure in der Mischung gleicher Volumina 0,1 normaler Glykokolllösung und 0,1 Barythydratlösung sofort einen Niederschlag von Baryumcarbonat erzeugt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Lösung bleibt ganz klar; erst nach einiger Zeit trübt sich die mit Kohlensäure gesättigte Lösung und scheidet allmählich Baryumcarbonat ab. Durch Erhitzen der Lösung wird diese Ausscheidung sehr beschleunigt.

Die weitere Verfolgung dieser Reaktion hat zu dem Ergebnisse geführt, daß hierbei fast quantitativ Salze der Carbaminosäuren von dem Typus:

$$\begin{array}{l} R-NH-COOH \\ | \\ COOH \end{array}$$

entstehen. Diese Säuren sind ebenso wie ihre Salze bisher unbekannt, während der Äthylester der Carbaminoessigsäure oder Glykokollcarbonsäure zuerst von Hantzsch und Metcalf[2]) als Urethanessigsäure beschrieben worden ist. Die Ester solcher Carbonsäuren sind in neuerer Zeit wiederholt von E. Fischer dargestellt und synthetisch verwendet worden.

Die Art der Bildung der Carbaminate durch Addition von Kohlensäure in wässriger Lösung bei gewöhnlicher und auch bei

---

1) K. Winkelblech Zeitschr. f. physik. Chemie Bd. 36 p. 546.

2) A. Hantzsch und W. V. Metcalf, Ber. d. deutschen chem. Ges. Bd. 29 p. 1682.

Körpertemperatur, dürfte, wie ich unten zeigen werde, uns zu neuen Vorstellungen über das physiologische Verhalten der Kohlensäure bringen.

I. Versuche, welche zeigen, daß aus amphoteren Amidokörpern durch Aufnahme von Kohlensäure oder Einwirkung von Alkalicarbonaten Carbaminate entstehen.

1. Werden z. B. 10 ccm einer 0,1 normalen Glykokolllösung mit 10 ccm 0,1 normal Barytwasser und 1 Tropfen Phenolphtaleinlösung vermischt und mit Kohlensäure gesättigt (15° T.), so verschwindet die alkalische Farbe, die Lösung bleibt ganz klar. Nach weiteren 3 Minuten beginnt schwache Trübung, nach 3 Stunden hat sich Baryumcarbonat als Bodensatz ausgeschieden. Eine filtrierte Probe giht heim Kochen noch starke Abscheidung von Baryumcarhonat. Bei mehreren dieser Versuche wurde der sich ausscheidende Niederschlag untersucht und als reines Baryumcarbonat erkannt.

2. Sättigt man die Mischung von 20 ccm 0,1 normaler Glykokolllösung nnd 20 ccm 0,1 normal Barytwasser mit Kohlensäure und setzt weitere 5 ccm Barytlösung hinzu, so entsteht kein Niederschlag, auch nicht hei weiterem Einleiten von Kohlensäure. Man kann abwechselnd Barytlösung und Kohlensäure zusetzen, bis nahezu 2 Volumina Barytwasser auf 1 Volnm Glykokolllösung kommen.

Hieraus geht hervor, daß Glykokoll und Kohlensäure 2 Äquivalente Ba binden.

3. Ähnliche Versuche wurden mit Natronlauge an Stelle des Barytwassers angestellt. Durch Zusatz von Baryumchlorid oder Barytwasser wurde auch hier die Bindung der Kohlensäure durch Glykokoll in nicht ionisierter Form erkannt.

4. In mehreren Versuchen wurde die Menge der gebundenen und beim Kochen als $BaCO_3$ ahspaltharen Kohlensäure bestimmt.

a) 20 ccm 0,1 normaler Glykokolllösung mit 40 ccm 0,1 normal Barytwasser in Eiswasser gekühlt, mit CO_2 gesättigt, dazu kaltes konzentriertes Barytwasser, ahgesaugt, das Filtrat in hedeckter Flasche gekocht, das ausgeschiedene $BaCO_3$ filtriert und als $BaSO_4$ hestimmt. Es wurden erhalten: 0,3614 gr. $BaSO_4$.

b) 20 ccm 0,1 norm. in Alaninlösung ebenso hehandelt. Erhalten: 0,3607 gr. $BaSO_4$.

c) 20 ccm 0,1 normaler Glykokolllösung mit nur 10 ccm

0,1 normal Barytwasser, Kohlensäure eingeleitet, überschüssiges konz. Barytwasser etc. Erhalten 0,3757 gr $BaSO_4$.
Da 20 ccm 0,2 norm. $BaSO_4$ 0,466 gr entsprechen würden, nähern sich die gewonnenen Zahlen dem theoretischen Werte von 2 Äquivalent Ba etwa gegen 80%. Dabei ist anzunehmen, daß bei Zusatz des überschüssigen konzentrierten Barytwassers bereits ein Teil der Verbindung unter Abspaltung von $BaCO_3$ bis zur Erreichung eines gewissen Gleichgewichtes zersetzt wird. Es ist aber zu berücksichtigen, daß die erhaltenen Werte mit einem geringen Fehler behaftet sind, da bei den Versuchen eine Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft nicht völlig zu vermeiden ist.

5. Daß auch bei Körpertemperatur die Reaktion vor sich geht, zeigen folgende Versuche:

Im Ostwaldschen Thermostaten wurden bei 37° 0,1 norm. Lösungen von Glykokoll, Alanin, Asparagin mit Kohlensäure unter zeitweisem Zusatze von etwas Kalkmilch gesättigt. Zuletzt wurde noch Kalkmilch und etwas kristallisiertes, gefälltes, Calciumcarbonat zugegeben, geschüttelt und filtriert. Die Filtrate gaben sämtlich beim Kochen starke Niederschläge von Calciumcarbonat. Im Thermostaten trübten sich die Filtrate und hatten nach 16 Stunden sämtliches durch Kochen abspalthares Calciumcarbonat abgeschieden. In einem blinden Versuche wurde Wasser mit derselben Kalkmilch unter gleichen Umständen mit Kohlensäure behandelt; das Filtrat gab keine Spur von Trübung beim Kochen.

Die hisher mitgeteilten Versuche geben keinen Aufschluß, ob die Bildung der Carbaminosäuren durch Addition von anhydrischer Kohlensäure CO_2 geschieht:

$$R - NH_2 + CO_2 = R - N - H - CO_2H$$

oder ob diese Reaktion eine Reaktion der Kohlensäureionen ist. Da, wie die folgenden Versuche zeigen, die Salze der Carbaminosäuren auch durch Einwirkung von Natriumcarbonat auf die Aminosäuren entstehen, verläuft sie nach folgenden Gleichungen, von denen die erstere die wahrscheinlichere ist:

I. $R - NH_3 \cdot OH' + CO_3H'H \cdot = RNH \cdot COO'H \cdot + 2H_2O$

II. $R - NH_2 + CO_3H'H \cdot = R - N - H - COO'H \cdot + H_2O.$

1) 50 ccm 0,1 norm. Glykokolllösung mit 15 ccm 0,2 norm. Natriumcarhonat 14 Stunden bei Zimmertemperatur stehen gelassen. Dann wurden je 20 ccm der Mischung in kaltes Barytwasser ein-

getragen, abgesaugt gekocht und das gebildete Baryumcarbonat auf Neubauerschen Platintiegeln abgesaugt. Es wurden erhalten:

a) 0,0639 gr $BaCO_3$ = 32,5%
b) 0,0592 „ „ = 30,0 „
c) 0,0634 „ „ = 32,2 „
d) 0,0669 „ „ = 33,9 „

Diese Werte sollen lediglich an Stelle des qualitativen Nachweises beweisen, daß die Reaktion zwischen Glykokoll und Natriumcarbonat stattfindet, aber keineswegs absolute Zahlen zur Beurteilung des Reaktionsverlaufes abgeben.

2) Die Mischung von 225 ccm 0,1 norm. Glykokolllösung und 225 ccm 0,2 norm. Na_2CO_3 wurde 18 Stunden im Zimmer gelassen. Hierauf wurde die in Eiswasser gekühlte Mischung mit 150 ccm kalt gesättigten Barytwassers vermischt und filtriert. Eine Probe des Filtrates gab auf Zusatz von mehr Barytwasser keine Trübung beim Kochen, jedoch starke Abscheidung von $BaCO_3$. Vom Filtrate wurden 400 ccm im Kohlensäurebestimmungsapparate unter Zusatz von Schwefelsäure und Absorption der Kohlensäure mit Natronkalk verwendet. Es wurden erhalten:

0,1720 gr = 25,9%.

3) 200 ccm Glykokolllösung, 200 ccm Na_2CO_3-Lösung, 150 ccm Barytwasser. Vom Filtrate 500 ccm genommen. Zusatz: Weinsäure.

Gefunden: 0,2121 gr CO_2 = 26,5%.

4) 250 ccm 0,1 norm. Alaninlösung. 250 ccm 0,2 normal Na_2CO_3, 200 gr Barytwasser. Vom Filtrate genommen: 400 ccm. Zusatz: Schwefelsäure.

Gefunden: 0,0841 gr CO_2 = 13,0%.

5) 200 ccm Alaninlösung. 200 ccm Na_2CO_3-Lösung 150 ccm Barytwasser. Vom Filtrate genommen: 470 ccm. Zusatz: Weinsäure.

Gefunden: 0,0862 gr CO_2 = 11,4%.

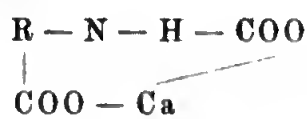
In allen Versuchen war eine Probe des Filtrates mit Barytwasser auf Abwesenheit von Carbonaten geprüft worden.

Die Reaktion wurde bis jetzt bei folgenden amphoteren Amidokörpern sowohl bei Gegenwart von Natronlauge als Barythydrat und Kalkwasser geprüft und bestätigt gefunden:

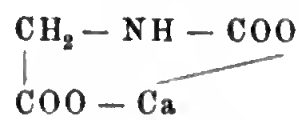
Glykokoll, i-Alanin, l-Leucin, Sarkosin, Phenylglykokoll, Asparagin, Asparaginsäure und Glutaminsäure.

II. Isolierung der Kalksalze von Carbaminosäuren.

Zur Darstellung der Kalksalze der Carbaminosäuren werden die wässerigen Lösnngen der Aminosäuren unter Kühlung mit Eiswasser mit Kohlensäure gesättigt; zu der Lösung wird dann einigemale abwechselnd Kalkmilch, die sich zunächst auflöst, und Kohlensäure gegeben. Zuletzt wird noch Kalkmilch nnd kristallisiertes, gefälltes Calciumcarbonat gegeben, geschüttelt nnd filtriert. Das völlig klare Filtrat wird mit gekühltem Alkohol bis zur starken Trübnng versetzt. Es scheidet sich das Kalksalz in äußerst kleinen kristallinischen Körnchen aus, oft sehr volunimös; namentlich das Kalksalz der Carbalanins ist sehr voluminös. Die ausgeschiedenen Kalksalze werden abgenutscht, zunächst mit der Konzentration der Mutterlauge entsprechend verdünntem Alkohol, dann mit absolutem Alkohol und Äther gewaschen, eventuell wieder in Wasser gelöst und dnrch Alkohol abgeschieden. Nachdem die Salze im Eisschranke über Schwefelsäure im Vakuum, unter öfterer Erneuerung der Schwefelsäure scharf getrocknet waren, wurden sie zur Analyse bei 100° getrocknet, wobei die trockenen Salze nicht zersetzt werden. Alle dargestellten Kalksalze waren leicht in Wasser klar löslich; beim Erwärmen trübt sich die Lösung und scheidet schließlich reichlich Calciumcarbonat ab. Die Kalksalze sind die neutralen Salze der zweibasischen Carbaminosäuren und besitzen die Formel:



Carbaminoessigsaures Calcium (Glykokollcarbonsaures Calcium)

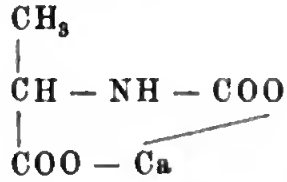


I. 0,1924 gr S. g. 0,1233 $CaCO_3$ und 0,1666 gr $CaSO_4$,
II. 0,2915 gr S. g. 21,9 ccm 12° 756 mm Bar.[1])

	Gefunden:	Berechnet:
Ca	25,63; 25,45 %	25,46 %
N	8,95 %	8,94 %

1) Diese N-Bestimmung verdanke ich Herrn Kollegen Fr. Hofmann.

Carbaminopropionsaures Calcium (i-Alanincarbonsaures Calcium)



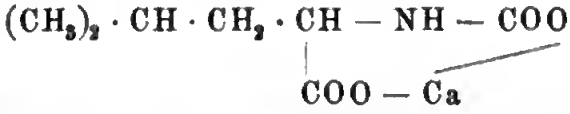
5 gr i-Alanin in 100 ccm Wasser gelöst etc. Ausbeute 6 gr.

I. 0,3715 gr S. g. 0,2908 gr $CaSO_4$,

II. 0,3075 gr erf. 18,6 ccm 0,1 norm. S.

	Gefunden:	Berechnet:
Ca	23,00 %	23,37 %
N	8,47 %	8,21 %.

Carbaminoisocapronsaures Calcium (l-Leucincarbonsaures Calcium)



2,5 l-Leucin in 100 ccm Wasser gelöst etc. Ausbeute: 2,9 gr.

I. 0,2354 gr G. g. 0,1516 gr $CaSO_4$,

II. 0,3132 gr erf. 13,7 ccm 0,1 norm. S.

	Gefunden:	Berechnet:
Ca	18,93 %	18,77 %
N	6,13 %	6,59 %.

Carbomethylaminoessigsaures Calcium (Sarkosincarbonsaures Calcium)

$C_4H_5NO_4Ca$

2 g Sarkosin in 100 ccm Wasser. Ausbeute: 2,2 gr.

I. 0,2502 gr S. g. 0,1967 gr $CaSO_4$,

II. 0,3270 gr erf. 18,8 ccm 0,1 norm. S.

	Gefunden:	Berechnet:
Ca	23,05 %	23,37 %
N	8,02 %	8,21 %.

Carbophenylaminoessigsaures Calcium (Phenylglykokollcarbonsaures Calcium)

$C_9H_7NO_4Ca$

5 gr Phenylglykokoll in 100 ccm Wasser gelöst. Ausbeute weniger als 1 gr.

I. 0,1907 gr S. g. 0,1119 gr $CaSO_4$,

II. 0,2714 gr verb. 11,4 ccm 0,1 norm. S.

	Gefunden:	Berechnet:
Ca	17,25 %	17,16 %
N	5,88 %	6,02 %.

Es bilden also nicht nur primäre, sondern auch sekundäre Aminosäuren durch Anlagern von Kohlensäure Aminocarbonsäuren.

III. Bindung von Kohlensäure durch Pepton und Eiweiß.

Die Peptone sind Amidosäuren, und zwar solche, bei denen die sauren Eigenschaften überwiegen. Durch die Resultate, welche Herr W. Neumann durch Leitfähigkeitsbestimmungen erhalten hat und demnächst veröffentlichen wird, wird bewiesen, daß im Pepsinfibrinpepton α auf 3 H-Ionen 2 OH-Ionen kommen. Bisher war die Größe des Salzsäurebindungsvermögens von mir nur für die Fleischsäure[1]) bestimmt worden. Herr Neumann hat jetzt dieselbe Größe für das mit dieser identischen durch tryptische Verdauung aus Fibrin dargestellte Antipepton α gefunden.

Für die biologische Bedeutung der organischen Bindung der Kohlensäure ist vor allem das Verhalten der reinen Peptone wichtig, da sie dem Eiweiß viel näher als die einfachen Amidosäuren stehen und doch übersehbare, reine Substanzen sind. Bis jetzt wurde das Pepsinfibrinpepton α untersucht.

Dieses Pepton verhält sich gegen Kohlensäure bei Gegenwart von Barythydrat oder Kalkhydrat oder Natronlauge genau wie die einfachen Amidosäuren.

Wurden zu 5 ccm einer Lösung dieses Peptons, welche 0,8643 gr. Pepton in 50 ccm enthielt, 20 ccm 0,1 norm. Barytwassers gegeben und gekocht, so blieb die Lösung völlig klar. Wurden jedoch in die Mischung von 5 ccm. Peptonlösung und 20 ccm 0,1 norm. Barytwasser Kohlensäure eingeleitet, die Lösung nach Zusatz überschüssigen Barytwassers filtriert, so schied das Filtrat beim Kochen reichlich Baryumcarbonat ab. Entsprechend verhielt sich die Peptonlösung gegen Kohlensäure und Kalkmilch.

---

1) M. Siegfried, Zeitschr. f. physiol. Chemie Bd. 21, p. 368.

Auch hier bewirkt Natriumcarbonat dieselbe Reaktion: 200ccm einer 2 %igen neutralisierten Peptonlösung wurden mit 200 ccm einer 0,2 normalen Na_2CO_3-Lösung vermischt; anderntags 150ccm kalt konzentriertes Barytwasser dazugegeben und filtriert. Eine Probe des Filtrates zeigte auf Zusatz von mehr Barytwasser keine Trübung, beim Kochen aber starke Abscheidung von Baryumcarbonat. 500ccm des Filtrates lieferten im Kohlensäurebestimmungsapparate nach Zusatz von Weinsäure 0,1230 gr. CO_2.

Aus der Lösung von 6 gr. dieses Peptons in 20ccm. Wasser wurde in derselben Weise wie bei den Amidosäuren ein Kalksalz dargestellt, das völlig klar im Wasser löslich war und beim Erhitzen reichlich Calcinmcarbonat ausschied. Obgleich die Analysen nahe auf die Formel $(C_{22}H_{31}N_6O_{11})_3Ca_3$, welche bedeuten würde, daß auf 1 Äquivalent-Pepton, das der Formel $C_{21}H_{34}N_6O_9$ entspricht, 1 Mol. CO_2 käme, stimmten, will ich die Entscheidung über die Zusammensetzung des Produktes für eine spätere Mitteilung verschieben. Nur das ist sicher bewiesen, daß Pepsinfibrinpepton α bei Gegenwart von Kalk oder Barythydrat mit Kohlensäure ebenso wie das Pepton mit Natriumcarbonat ein Carbopeptonat bildet.

Ebenso verhielt sich kristallisiertes Serumalbumin. Das Serumalbumin, aus Pferdeblut dargestellt, war kristallisiert und umkristallisiert, bei Gegenwart von Chloroform 18 Tage in stark fließendem Wasser und schließlich gegen destilliertes Wasser bis zum Verschwinden der SO_4-Reaktion dialysiert. Die klar filtrierte Lösung enthielt nach der Stickstoffbestimmung 0,45% Eiweiß.

200ccm dieser Eiweißlösung wurden in Eiswasser mit Kohlensäure gesättigt, dann Kalkmilch zugegeben, wieder Kohlensäure eingeleitet und zuletzt nochmals Kalkmilch und kristallisiertes Calciumcarbonat zugefügt. Nach Schütteln wurde scharf zentrifugiert. Aus der abgehobenen Flüssigkeit, in welcher sich durch das Mikroskop kein Calciumcarbonat erkennen ließ, wurde im Kohlensäurebestimmungsapparate mit Weinsäure die Kohlensäure ausgetrieben. Erhalten wurde durch Absorption mit Natronkalk nach Zusatz von Weinsäure 0,1857 gr. CO_2. Dies Ergebnis spricht deutlich für die Fähigkeit des kristallisierten Serumalbumins, Kohlensäure bei Gegenwart von Kalkhydrat in nicht jonisierter, organischer Form zu binden.

Allerdings kann man den Einwand machen, daß hier Calciumcarbonat colloid in Lösung gehalten ist. Es liegt hier wieder ein Fall vor, bei dem eine Frage das Eiweißmolekul betreffend

kaum ganz einwandfrei durch das Experiment mit dem Eiweiß selbst beantwortet werden kann; bei dem der Analogieschluß aus den Resultaten, welche mit den einfachen, dem Eiweiß ähnlichen Amidosäuren und vor allen den Peptonen gewonnen werden, viel beweisender ist als das positive Ergebnis, das das Eiweiß selbst liefert.

Es wurden ferner mehrere Versuche mit Pferdeserum angestellt. Das mit Kohlensäure und Kalkhydrat behandelte, mit Kalkmilch und kristallisiertem Calciumcarbonat geschüttelte Serum wurde zentrifugiert und filtriert; auch hier wurden stets reichliche Mengen Kohlensäure nach Erwärmen mit Weinsäure erhalten.

IV. Binden amphotere Amidokörper auch ohne Gegenwart von Alkalien oder Erdalkalien Kohlensäure?

Bei den einfachen Amidosäuren der Glykokollreihe deckt sich die Frage, ob auch die freien Säuren Kohlensäure zu binden imstande sind, mit der Frage der Beständigkeit der freien Carbaminosäuren in wässriger Lösung.

Bei den Peptonen und Eiweißkörpern, sowie den Amidosäureamiden, ist es wahrscheinlich, daß die Neutralisation der Carboxylgruppen durch basische Gruppen des Molekuls selbst, durch Säureamidgruppen erfolgt; daß also auch ohne Gegenwart von Alkalien oder Erdalkalien durch Kohlensäure nicht Carbaminosäuren selbst, sondern deren Salze entstehen. Bei Gemengen von Eiweißstoffen, wie im Blute, liegt noch die Möglichkeit vor, daß ein anderer, basischer Eiweißkörper die Neutralisation der durch Kohlensäure gebildeten Carboxylgruppen übernimmt.

Die Versuche, welche ich bisjetzt über diese Frage angestellt habe, lassen erkennen, daß bei Körpertemperatur Carbaminoessigsäure in wässriger Lösung in freiem Zustande nachweisbar kaum beständig ist, hingegen bei 0^0 bis zu einem gewissen Grade. Man erhält zwar, auch wenn Glykokolllösung bei Körpertemperatur mit Kohlensäure gesättigt ist, auf Zusatz von Kalk oder Barytwasser Salze der Carbaminosäuren, diese entstehen jedoch erst im Momente des Zusatzes der Erdalkalilaugen durch die in der Lösung gelöste Kohlensäure. Sättigt man eine konzentrierte Glykokolllösung bei 0^0 mit Kohlensäure, läßt rasch mit Alkohol kristallisieren, saugt rasch ab und löst die Kristalle in Barytwasser, so geben die Lösungen beim Kochen kein Baryumcarbonat. Wenn also die Carbaminoessigsäure nicht löslich in verdünntem

Alkohol ist, ist sie in festem Zustande nicht beständig. Durch Bestimmung der in einer Glykokolllösung gelösten Kohlensäure wurden Werte erhalten, die der Löslichkeit der Kohlensäure in Wasser entsprachen. Allerdings kann die Löslichkeit der Kohlensäure durch Glykokoll vermindert werden.

Wurden hingegen 0,1 normale Lösungen von Asparagin im Ostwaldschen Thermostaten bei 37° mit Kohlensäure gesättigt, so ließen sich aus dieser Lösung mehr als 50% mehr Kohlensäure durch Kochen austreiben, als der Löslichkeit der Kohlensäure in Wasser entspricht. Nach diesen vorläufigen Versuchen ist also anzunehmen, daß die Säureamidgruppe die durch Kohlensäure entstandene Carboxylgruppe neutralisiert.

Aus der Lösung von 4 gr. des aschefreien Pepsinfibrinpeptons α in 200 ccm Wasser ließen sich nach Sättigen mit Kohlensäure bei 10° mit Weinsäure 0,6214 gr. Kohlensäure austreiben. 90 ccm der 0.45%igen Lösung des kristallisierten Serumalbumins lieferten unter gleichen Bedingungen 0,3267 gr CO_2. Bemerkt sei, daß diese Werte nur Mindestwerte bedeuten, da bei diesen vorläufigen Versuchen, um ein Zuviel von Kohlensäure zu vermeiden, die Lösungen in den Kohlensäurebestimmungsapparat mit der Pipette übertragen oder durch einen Scheidetrichter hineingelassen wurden. Hierdurch entstehen Verluste an Kohlensäure.

Wenn ich auch weit davon entfernt bin, auf Grund der gewonnenen Resultate unsere Vorstellung über die Bindung der Kohlensäure im Blute umgestalten zu wollen, so glaube ich doch, daß die neu erkannte Reaktion als Faktor der Vorgänge im Blute berücksichtigt werden muß. Wenn auch erst neue Versuche die Bedeutung der Reaktion für die Kohlensäurebindung im Blute feststellen müssen, so erscheinen doch schon jetzt frühere Beobachtungen ihre Erklärung zu finden. Die Hypothese Setschenows daß durch Kohlensäure aus Serumeiweiß eine Säure, das Carbo-Eiweiß entsteht, die Carbohaemoglobine Bohrs erscheinen in einem neuen Lichte.

Die Carbamin-Reaktion wird sich auch bei den Vorgängen im arbeitenden Muskel geltend machen. Bei momentaner Anhäufung der Kohlensäure durch den Oxydationsprozeß im Muskel wird Kohlensäure organisch gebunden werden, die entstehenden Verbindungen werden bei hydrolytischer Spaltung ohne Aufnahme von Sauerstoff Kohlensäure liefern. Solche Vorgänge hat zuerst

Hermann[1]) nachgewiesen. An Stelle der bisherigen Vorstellung, daß bei der Muskeltätigkeit zunächst Oxydationsprodukte durch Aufnahme von Sauerstoff entstehen, die dann in einer zweiten Phase der Reaktion unter Abspaltung von Kohlensäure zerfallen, oder neben diese hätte dann die zu treten, daß die bei der Reaktion primär entstehende Kohlensäure unter Bildung von Carbonsäuren, die durch Hydrolyse Kohlensäure abspalten, zum Teil vorübergehend gebunden wird. Diese Bindung der Kohlensäure würde eine Beschleunigung des Oxydationsprozesses bedeuten.

Schließlich wird sich auch die Pflanzenphysiologie mit dieser Frage zu beschäftigen haben. Wo Chlorophyll ist, ist auch Protoplasma. Entstehen auch hier bei der Aufnahme von Kohlensäure durch die Pflanze Carbaminogruppen, so wird die Aufnahme von Kohlensäure hierdurch begünstigt. An Stelle oder neben der Frage: Wie wird Kohlensäure reduziert? müßte die Frage gelöst werden: Wie werden Carbonsäuren reduziert?

1) L. Hermann, Untersuchungen über den Stoffwechsel der Muskeln. Berlin 1867 vgl. auch M. Siegfried, Zeitschr. f. physiol. Chemie, Bd. 21, p. 378.

Druckfertig erklärt 18. IV. 1906.]

Über ein noch zu erforschendes unterseeisches Korallenriff im zentralen Indischen Ozean.

Von

Carl Chun.

Am 28. Februar 1899, zwei Tage nach dem Auslaufen aus Diego Garcia, lotete die „Valdivia" auf Station 227 eine Tiefe von 2743 m. Die Lotung wurde morgens 6 Uhr vorgenommen und da bei leichter Brise (es herrschte Nord-Nord-West mit der Windstärke 3 nach der Beaufortskala) die Verhältnisse für die Vornahme verschiedener Operationen günstig lagen, so wurde das Trawl zu einem Dredschzug bereit gemacht. Die während des Dredschens um Mittag vorgenommene astronomische Beobachtung ergab eine Breite von 2^0 57′ S und 67^0 59′ O. Zum Dredschen hatten wir uns wesentlich aus dem Grund entschlossen, weil die Tiefe nicht so beträchtlich war, wie am vorhergehenden Tage, an dem wir unter 4^0 6′ S und 70^0 2′ O eine Tiefe von 4129 m gelotet hatten. Berücksichtigt man, daß wir dicht bei dem westlichen Steilabfall der großen Chagosbank, deren südlicher Ausläufer durch das Atoll von Diego Garcia gebildet wird, eine Tiefe von 2127 m gelotet hatten, so ergibt sich auf einer relativ kurzen Strecke ein ziemlich reich gefaltetes Bodenrelief.

Was nun den Dredschzug in 2743 m anbelangt, so wurde das Trawl 9^h 15^m a. m. herabgelassen und kam 2^h 7^m p. m. wieder an die Oberfläche. Das Netz fischte anfänglich normal, doch steigerte sich bald der Druck auf unseren Dynamometer mehrmals bis zu bedenklicher Höhe; einmal bis auf 7500 kg. Der Kapitän hatte 20 Minuten lang zu manöverieren, um das Netz frei zu bekommen. Trotzdem kam es ganz unversehrt auf, während das Stahlkabel kurz vor dem Vorläufer aus Hanf starke Kinke zeigte.

Das Festkommen des Netzes bei einem Dredschzug in so ansehnlicher Tiefe war in hohem Maße befremdlich, da man mit Sicherheit darauf rechnen kann, daß bei nahezu 3000 m Tiefe

Digitized by Google

in tropischen Gegenden auf einem von Globigerinenschlick gebildeten Grunde keine Hindernisse sich ergeben werden. Nach Beendigung des Dredschzuges wurde noch eine Temperaturserie bis zu 930 m Tiefe ausgeführt.

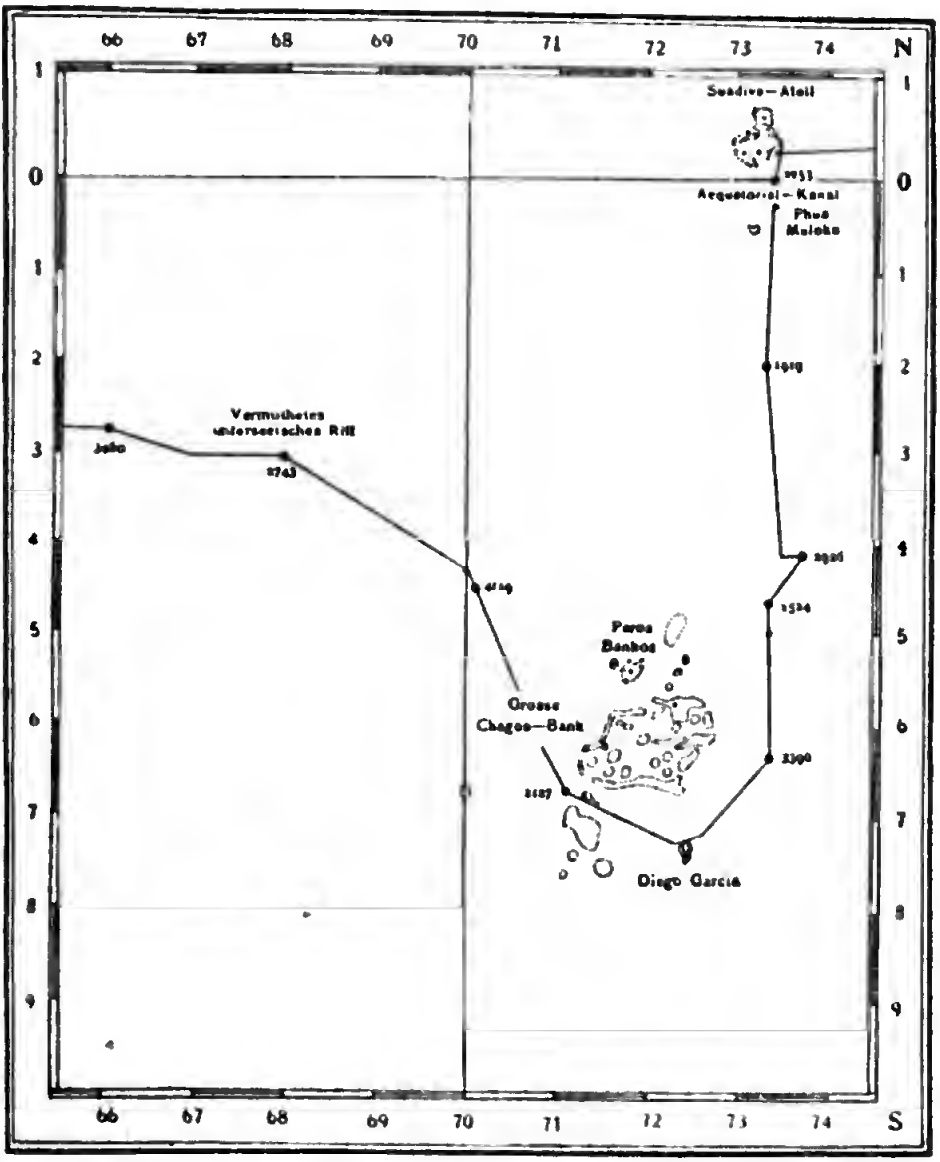
Was nun den Inhalt des Schleppnetzes anbelangt, so erwies er sich als ein außerordentlich kärglicher. Er bestand aus einer Ophinre, aus 2 Brachiopoden mit verzweigtem Stiele, der zum Anheften im Globigerinenschlick dient, aus einem schwarzen Stück einer Antipathide und aus den abgerissenen Ästen einer Koralle. Da wir die genannten Brachiopoden östlich und südlich von den Malediven bis zu 2919 m erbeutet hatten, so muß das Netz jedenfalls anfänglich in der von uns geloteten Tiefe gefischt haben.

Bemerkenswert war das Korallenbruchstück, welches sich mit den genannten Tiefenformen in dem Schleppnetz vorfand. Wir hatten bisher in so ansehnlicher Tiefe noch keine Korallen erbeutet (die größte Tiefe, in welcher wir überhaupt Korallen vorfanden, betrug 2278 m), und zudem wich das Stück so vollständig von dem Habitus der Tiefseekorallen ab, daß ich es anfänglich bei Seite stellte und es erst nachträglich dem Bearbeiter unserer Korallen, Prof. E. v. MARENZELLER, Wien, zusendete. Die Auskunft, welche mir dieser treffliche Kenner der Steinkorallen über das Bruchstück gab, erlaube ich mir nach seiner brieflichen Mitteilung hier anzuführen:

„Das Stück war belebt, als es in Ihre Hände kam. Es ist außerordentlich gut konserviert und der Weichkörper zeigt alle charakteristischen Details, die von MOSELEY für die Gattung Seriatopora aufgedeckt wurden. Seriatoporen sind mit Büchern nicht zu bestimmen. Ich habe vor einiger Zeit alle Originale in Berlin, London und Paris untersucht und gesehen, wie willkürlich die Autoren vorgingen. Die meisten Beziehungen scheint Ihre Seriatopora zu der formenreichen Art zu haben, welche ich S. angulata Klzgr. nenne. Damit soll hauptsächlich gesagt sein, daß sie das Gepräge dieser im Roten Meer überall vorkommenden und darüber hinaus verbreiteten Riffkoralle habe. Die Seriatoporen sind *Riff-Korallen*."

Berücksichtigt man nun die Tatsache, daß wir während eines in größerer Tiefe ausgeführten Schleppnetzzuges auf einen uns unerklärlichen Widerstand stießen und daß wir weiterhin mit dem Trawl Bruchstücke einer lebenden, d. h. mit wohlerhaltenen Polypen ausgestatteten, nur im oberflächlichen Wasser vor-

kommenden Riffkoralle erbeuteten, so ist der Schluß unabweislich, daß wir während des Dredschens den Rand eines aus großer Tiefe aufragenden Korallenriffes streiften. Hätte ein altes ab-



In die Kartenskizze ist die Route der „Valdivia" eingetragen.
Die Zahlen geben die geloteten Tiefen in Metern an.

geriebenes Bruchstück einer Seriatopora vorgelegen, so würde man vielleicht zu der Vermutung berechtigt gewesen sein, daß das Stück entweder zufällig verschleppt wurde und in die Tiefe niedersank, oder schon vorher in dem Schleppnetz enthalten war. Das letztere wäre indessen schon aus dem Grunde ausgeschlossen

gewesen, weil das Trawl nach jedem Zuge sorgfältig gereinigt und vor Beginn der Operation einer nochmaligen Revision unterzogen wurde. Da wir außerdem unsere kostbaren Tiefseenetze nicht zu Zügen in oberflächlichem Wasser bei den Malediven und in der Lagune von Diego Garcia benutzten, so ist der Einwand, daß vielleicht eine zufällige Beimengung der Seriatoporenäste stattgefunden habe, kaum stichhaltig. Ihm wird nun völlig der Boden dadurch entzogen, daß es sich um ein lebendes, d. h. mit wohlerhaltenem Weichkörper ausgestattetes, Stück handelt.

Wenn wir an Bord trotz des Festkommens des Netzes nicht auf die Vermutung kamen, daß wir uns in der Nähe eines Korallenriffes befänden, so bot hierzu wesentlich der Umstand Anlaß, daß in dem Netze echte Tiefseeorganismen enthalten waren, und daß die nach dem Dredschzug bis zu nahezu 1000 m ausgeführte Temperaturserie glatt von statten ging. Der letztere Umstand deutet darauf hin, daß wir den Rand des Riffes nur streiften und gleich von demselben wieder frei kamen.

Das von uns gelotete Plateau, welches immerhin um 1386 m höher liegt, als die tags zuvor konstatierte Tiefe von 4129 m, gibt demgemäß den Sockel für ein steil aufsteigendes unterseeisches Riff ab. Es kann dies nicht überraschen, da sowohl unsere Lotungen bei den Malediven, wie auch die später von Agassiz in derselben Region ausgeführten Untersuchungen lehren, daß diese Atolle außerordentlich steil in die Tiefsee abfallen.

Würde es sich nun tatsächlich bestätigen, daß bei der oben angegebenen Position von 2^0 57′ S und 67^0 59′ O ein unterseeisches Riff liegt, so hätten wir in ihm ein Gegenstück zu der großen Chagosbank und zu der Saya de Malha-Bank. Da es bis jetzt der Aufmerksamkeit entging, so ist freilich anzunehmen, daß es entweder tiefer unter Wasser liegt, als die beiden genannten und wegen ihrer Gefahr sorgfältig gemiedenen Bänke oder daß es von geringerem Umfang ist. Immerhin möchte es sich für Schiffe von größerem Tiefgang als verhängnisvoll erweisen, und so halte ich es für wichtig, die genannte Position als „verdächtig" zu bezeichnen. Bei dem Interesse, welches derartige isolierte und im Zentrum großer ozeanischer Becken steil aus der Tiefsee aufragende Riffe erregen (wir kennen solche Atolle aus dem Pacifik) wäre es wünschenswert, wenn die genannte Region sorgfältig durchgelotet würde.

Druckfertig erklärt 28. II. 1905.]

INHALT.

Seite

Gottl. Friedr. Lipps, Die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes 1

M. Siegfried, Eine neue Reaktion amphoterer Körper 34

Carl Chun, Über ein noch zu erforschendes unterseeisches Korallenriff im zentralen Indischen Ozean 45

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

I Sax 1726.9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

II.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER

1905.

Einzelpreis 2 Mark.

SITZUNG VOM 1. MAI 1905.

Geschäftliche Mitteilungen, insbesondere die bevorstehende Kartellversammlung in Leipzig und den Tauschverkehr betreffend.

Herr A. Mayer, o. M., legt zwei Arbeiten von Herrn J. Thomae in Jena, o. M., vor: 1. Bemerkung über das elektrische Potential bei geradlinigen Elektroden; 2. Winkeltreue Abbildung einer durch zwei aufeinander stehende geradlinige Schlitze begrenzten Ebene auf ein Rechteck.

Hierauf trägt Herr A. Mayer vor: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale (II. Mitteilung).

Herr C. Neumann, o. M., legt zwei Arbeiten vor: 1. von dem am Erscheinen verhinderten Herrn W. Scheibner, o. M.: Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation; 2. von Herrn Krause in Dresden, o. M.: Zur Theorie der Funktionen zweier veränderlicher Größen.

Die vorstehend genannten Arbeiten sind zum Abdruck in den Berichten bestimmt.

Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

II. Mitteilung.

Von

A. Mayer.

Bei meiner ersten Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz[1]) hatte ich nur den einen Zweck im Auge, für das vorgelegte Problem der Variationsrechnung diejenige bestimmte Form dieses Satzes zu gewinnen, welche die Weierstrasssche E-Funktion auf das besondere Extremalenfeld bezieht, das unmittelbar zu dem Jacobischen Kriterium der konjugierten Punkte

1) Diese Berichte 1903, p. 131—145.

führt.[1]) Erst vor kurzem fiel mir auf, daß diese besondere, allerdings aber auch besonders wichtige Form des Satzes im wesentlichen darauf hinausläuft, daß man die HAMILTONsche partielle Differentialgleichung des Problems durch die JACOBI-HAMILTONsche Methode vollständig integriert. Damit wurde mir aber auch sofort von vornherein klar, daß man zur allgemeinen Lösung derjenigen HILBERTschen Aufgabe, auf deren Erledigung sich der Unabhängigkeitssatz gründet[2]), müsse kommen können, sobald man nur die allgemeine CAUCHYsche Methode[3]) an Stelle jener speziellen Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung des Problems benutzt, und die Durchführung dieses Gedankens zeigte, daß die so erhaltene Lösung in der Tat alle möglichen Lösungen jener Aufgabe umfaßt, ja sogar allgemeiner ist, als der Unabhängigkeitssatz selbst. Diese Resultate sollen unabhängig von den früheren, und ohne die CAUCHYsche Methode als bekannt vorauszuzetzen, im Folgenden entwickelt werden.

§ 1.

Der Zusammenhang des Problems der Variationsrechnung mit dem Probleme von Hilbert.

Wie früher handelt es sich auch jetzt wieder um das Problem der Variationsrechnung:

I. *Unter allen Funktionen* $y_1, \ldots, y_n$ *von* x, *die* $r < n$ *gegebenen, nach* r *von den Differentialquotienten* $y_1', \ldots y_n'$ *auflösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 *und* $x_1 > x_0$ *feste*

1) Vergl. BOLZA, Lectures on the calculus of variations, Chicago 1904, p. p. 91, 60, 82. Die Überschrift des § 3 in meiner ersten Note ist hiernach nicht richtig gewählt und müßte vielmehr etwa so lauten: „Loslösung des HILBERTschen Unabhängigkeitssatzes von der HAMILTONschen partiellen Ditferentialgleichung".

2) Ich habe früher die Lösung dieser Aufgabe geradezu als identisch mit dem Unabhängigkeitssatze selbst betrachtet, weil dieser unmittelbar aus ihr folgt. Es ist aber doch klarer und auch richtiger, beides auseinanderzuhalten.

3) Vergl. Mathematische Annalen, Bd. III, p. 447/8.

Werte besitzen, und zwischen diesen Grenzen stetig bleiben, diejenigen zu finden, für welche das vorgelegte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$$

einen größten oder kleinsten Wert erreicht.

Dieses Problem wird gelöst durch die $n + r$ Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0, \tag{2}$$

in denen

$$\Omega \equiv f + \sum_1^r \lambda_\varrho f_\varrho \tag{3}$$

ist, und möglich und bestimmt kann es nur dann sein, wenn die $n + r$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = v_i, \quad f_\varrho = 0 \tag{4}$$

auflösbar sind nach den $n + r$ Unbekannten:

$$y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r.$$

Es seien:

$$\begin{cases} y_i' = p_i(x, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_n), \\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_n) \end{cases} \tag{5}$$

diese Auflösungen und durch ihre Substitution werde:

$$\sum_1^n y_i' \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} - \Omega = H(x, y_1, \cdots, y_n, v_1, \cdots, v_n). \tag{6}$$

Mit dieser Gleichung genügen dann die Werte (5) zugleich auch identisch den Gleichungen:

$$y_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \qquad -\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Die Einführung der Variabeln v an Stelle der Differentialquotienten y' und der Multiplikatoren λ verwandelt daher die Differentialgleichungen (2) in die $2n$ kanonischen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \qquad \frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}. \tag{7}$$

Aus jedem System Lösungen:

$$y_i = y_i(x), \qquad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x)$$

der Differentialgleichungen (2) erhält man hiernach, indem man dasselbe in die Gleichungen:

$$v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

substituiert, ein entsprechendes System Lösungen

$$y_i = y_i(x), \qquad v_i = v_i(x)$$

der Differentialgleichungen (7), und umgekehrt liefert jedes System Lösungen dieser letzteren Differentialgleichungen, wenn man es in die r letzten Gleichungen (5) einsetzt, wieder ein System Lösungen der Differentialgleichungen (2), *welches für die betreffenden Lösungen der Differentialgleichungen (7) zugleich den Gleichungen (5) identisch genügt.*

Dies vorausgeschickt zeige ich durch Einschließung in $|\,|$ an, daß statt:

$$y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r$$

geschrieben werden soll:

$$p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r,$$

definiere also:

$$(3') \qquad |\Omega| \equiv |f| + \sum_1^r{}_\varrho \mu_\varrho |f_\varrho$$

und allgemein:

$$|f_\sigma| \equiv f_\sigma(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n),$$

und will nun den Zusammenhang untersuchen, in welchem das Problem I zu der folgenden Hilbertschen Aufgabe steht:

II. *Die Variabeln $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ als Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck:*

$$(8) \qquad |\Omega| + \sum_1^n{}_i (y_i' - p_i)\frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i},$$

in welchem $y_1, \ldots, y_n$ als unbestimmte Funktionen von x zu betrachten sind, ein vollständiger Differentialquotient, und zugleich den r Bedingungen:

$$(1') \qquad |f_\varrho| = 0$$

identisch genügt werde.

Ist (8) ein vollständiger Differentialquotient, so existiert eine Funktion V von $x, y_1, \ldots, y_n$, für welche:

$$(9) \qquad |\mathfrak{Q}| + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial |\mathfrak{Q}|}{\partial p_i} \equiv \frac{dV}{dx}$$

wird, und die man aus diesem Ansatz durch eine bloße Quadratur findet.

Die Forderung (9) aber zerfällt in die $1 + n$ identisch zu erfüllenden Bedingungen:

$$(10) \qquad |\mathfrak{Q}| - \sum_1^n p_i \frac{\partial |\mathfrak{Q}|}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(11) \qquad \frac{\partial |\mathfrak{Q}|}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i}.$$

Verbunden mit den r Bedingungsgleichungen (1') bestimmen nun die n Gleichungen (11)

$$p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$$

als Funktionen von:

$$x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n},$$

und zwar ergeben sie der Bedeutung der Gleichungen (5) zufolge:

$$(5') \qquad \begin{cases} p_i = p_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dfrac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial y_n}\right), \\ \mu_\varrho = \mu_\varrho\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dfrac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial y_n}\right). \end{cases}$$

Nach der Definition (6) der Funktion H führt überdies die Substitution dieser Werte die Gleichung (10) über in die partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen V und den $n + 1$ unabhängigen Variabeln $x, y_1, \ldots y_n$:

$$(12) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, y_1, \ldots y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Damit ist unmittelbar der Satz gewonnen:

III. *Aus jedem Funktionensystem* $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots \mu_r$, *welches die Aufgabe II löst, erhält man durch eine bloße Quadratur eine solche Lösung* V *der partiellen Differentialgleichung* (12), *mit der jene Funktionen durch die Relationen* (5') *verbunden sind. Und umgekehrt liefert jede Lösung* V *dieser partiellen Differentialgleichung, substituiert in die Gleichungen* (5'), *ein System Lösungen des Problems II.*

Weiter hat der Ausdruck (8) die Form:

$$|\Omega| + \sum_1^n{}_k (y_k' - p_k) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k} \equiv B + \sum_1^n{}_k B_k y_k'.$$

Jedes System von Funktionen p und μ, das der Forderung (9) genügt, muß daher die $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen identisch erfüllen:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial y_k} - \frac{\partial B_k}{\partial y_i} = 0.$$

Von diesen kann man wegen der letzten die n ersten ersetzen durch die folgenden n:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} + \sum_1^n{}_k p_k \left(\frac{\partial B_i}{\partial y_k} - \frac{\partial B_k}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Es ist aber:

$$B_k \equiv \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k}$$

und, indem die partiellen Differentialquotienten der Funktionen p_k sich von selbst wegheben:

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ |\Omega| - \sum_1^n{}_k p_k \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k} \right\} \equiv \frac{\partial |\Omega|}{\partial y_i} + \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i} |f_\varrho|$$

$$- \sum_1^n{}_k p_k \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k}.$$

Infolge der weiter noch vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (1′) lassen sich daher die Integrabilitätsbedingungen des Ausdrucks (8) so schreiben:

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} + \sum_1^n{}_k p_k \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial |\Omega|}{\partial y_i},$$

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k},$$

und durch Ausführung der zweiten partiellen Differentiationen werden die n ersten von ihnen:

$$(13') \begin{cases} \dfrac{\partial^2 |\Omega|}{\partial p_i \partial x} + \displaystyle\sum_1^n{}_k p_k \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial p_i \partial y_k} + \sum_1^n{}_k \frac{\partial^2 |\Omega|}{\partial p_i \partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_1^n{}_k p_k \frac{\partial p_k}{\partial y_k} \right) \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial (f_\varrho)}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \mu_\varrho}{\partial x} + \sum_1^n{}_k p_k \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_k} \right) = \frac{\partial |\Omega|}{\partial y_i}. \end{cases}$$

Verknüpft man andererseits die Funktionen $y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von x mit irgend einem System Lösungen des Problems II durch die $n + r$ Gleichungen:

$$(15) \qquad y_k' = p_k \quad \text{und} \quad (16)\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho,$$

so liefert die Differentiation dieser Gleichungen zugleich:

$$y_k'' = \frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_1^n{}_h \frac{\partial p_k}{\partial y_h} p_h,$$

$$\lambda_\varrho' = \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial x} + \sum_1^n{}_h \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_h} p_h;$$

überdies gehen $|\Omega|$ und $|f_\varrho|$ wieder über in die ursprünglichen Funktionen Ω und f_ϱ, und die Bedingungen (13′) werden daher:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial x} + \sum_1^n{}_h \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial y_h} y_h' + \sum_1^n{}_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial y_k'} y_k'' + \sum_1^r{}_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_i} \lambda_\varrho' = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i},$$

d. h. diese Bedingungen und die Bedingungen (1′) verwandeln sich in die Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0.$$

So oft also in den Gleichungen (15) und (16) $p_1, \ldots p_n$, $\mu_1, \ldots \mu_r$ solche Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ sind, welche die Bedingungen (1′) und (13) identisch erfüllen, sind zugleich diejenigen Funktionen $y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von x, die man durch vollständige Integration der n Differentialgleichungen (15) und Substitution der Lösungen in die Gleichungen (16) erhält, Lösungen mit n willkürlichen Konstanten der Differentialgleichungen des Problems I.

Aus Satz III folgt hiernach sofort weiter:

IV. *Jeder Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12) gehört ein System Lösungen $y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ der Differentialgleichungen (2) mit n willkürlichen Konstanten zu, in bezug auf welche die Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ voneinander unabhängig sind, und dieses System Lösungen erhält man, indem man von den, mit der betreffenden Lösung V gebildeten Gleichungen (5′) die n ersten, die ein System Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $y_1, \ldots, y_n$ und x bilden, vollständig integriert und ihre Lösungen in die r letzten Gleichungen (5′) substituiert.*

§ 2.

Ableitung eines gewissen Systems Lösungen der Differentialgleichungen (2) mit n willkürlichen Konstanten aus den vollständigen Lösungen dieser Gleichungen.

Kehren wir nun aber zurück zu den Differentialgleichungen (2) und zu ihrer kanonischen Form (7)!

Es seien:

$$(17) \qquad y_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad v_i = \psi_i(x, c_1, \ldots c_{2n})$$

die mit Hilfe der Gleichungen:

$$v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

aus irgend einem bekannten System vollständiger Lösungen:

$$(18) \qquad y_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = \Theta_\varrho(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$

der Differentialgleichungen (2) erhaltenen vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (7).

Ist dann a eine neue willkürliche Konstante oder auch nur irgend ein solcher bestimmter Wert von x, daß die $2n$ Gleichungen (17) auch für $x = a$ noch auflösbar bleiben nach ihren $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$, so kann man an Stelle der letzteren die Anfangswerte:

$$a_i = \varphi_i(a, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad b_i = \psi_i(a, c_1, \ldots c_{2n})$$

der Variabeln y_i und v_i für $x = a$ als neue willkürliche Konstanten einführen und erhält hierdurch ein neues vollständiges System Lösungen der Differentialgleichungen (7) von der Form:

$$(19) \qquad \begin{cases} y_i = y_i(x, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n), \\ v_i = v_i(x, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n), \end{cases}$$

in welchem

$$y_i(a, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n) \equiv a_i,$$
$$v_i(a, a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_n) \equiv b_i$$

ist. Indem man dann weiter nach willkürlicher Wahl der Funktion:

$$A \equiv A(a, a_1, \ldots, a_n)$$

jedes:

$$b_h = \frac{\partial A}{\partial a_h}$$

setzt, entsteht aus diesem neuen vollständigen System von Lösungen selbst wieder ein neues System Lösungen der Differentialgleichnngen (7):

$$(20)\quad \begin{cases} y_i = y_i\Big(x, a_1, \ldots, a_n, \dfrac{\partial A}{\partial a_1}, \ldots, \dfrac{\partial A}{\partial a_n}\Big) \equiv \bar{y}_i(x, a_1, \ldots, a_n), \\ v_i = v_i\Big(x, a_1, \ldots, a_n, \dfrac{\partial A}{\partial a_1}, \ldots, \dfrac{\partial A}{\partial a_n}\Big) \equiv \bar{v}_i(x, a_1, \ldots, a_n), \end{cases}$$

das für $x = a$ ergibt:

$$y_i = a_i,\ v_i = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

und diesem System entspricht das System Lösungen der Differentialgleichungen (2):

$$(21)\qquad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \ldots, a_n),\ \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho(x, a_1, \ldots, a_n),$$

dessen r letzte Gleichungen aus den r letzten Gleichungen (5) durch Substitution der Werte (20) hervorgehen. Seine n willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ sind die Anfangswerte der Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ für $x = a$, und nach p. 52 genügt es identisch den Gleichungen:

$$(5'')\qquad \begin{cases} y_i' = p_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n), \\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n). \end{cases}$$

Infolge der Art, wie die Gleichungen (19) aus den Gleichungen (17) und diese wieder aus den Gleichungen (18) entstanden, erhält man diese, im allgemeinen partikulären Lösungen des Systems (2) aus seinen vollständigen Lösungen (18) direkt dadurch, daß man die letzteren in die Gleichungen einführt:

$$(22)\qquad \varphi_i(a, c_1, \ldots, c_{2n}) = a_i,\ \Big[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big]_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

und sodann mittels dieser $2n$ Gleichungen die $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$ aus ihnen eliminiert.

§ 3.

Das erhaltene System Lösungen der Differentialgleichungen (2) entspricht im Sinne des Satzes IV einer bestimmten Lösung V der partiellen Differentialgleichnng (12).

Deutet man die Substitution der eben gewonnenen Lösungen (20) der Differentialgleichungen (7) durch einen oberen horizontalen Strich an, und definiert V durch die Formel:

$$(23) \qquad V \equiv A(a, a_1, \ldots, a_n) + \int_a^x \Big\{ \sum_1^n v_h \frac{\partial H}{\partial v_h} - H \Big\} dx^1)$$

als Funktion von $x, a_1, \ldots, a_n$, so erhält man durch partielle Differentiation nach a_k:

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} \equiv \frac{\partial A}{\partial a_k} + \int_a^x \sum_1^n \Big\{ \bar{v}_h \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{\partial H}{\partial v_h} - \frac{\partial H}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \Big\} dx.$$

Nach (7) ist aber:

$$\frac{\partial H}{\partial v_h} \equiv \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_h} \equiv - \frac{\partial v_h}{\partial x},$$

also besitzt die Summe unter dem Integralzeichen den Wert:

$$\sum_1^n \Big\{ \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x \partial a_k} + \frac{\partial v_h}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \Big\} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k},$$

Überdies wird für $x = a$:

$$\bar{y}_h \equiv a_h, \quad \bar{v}_h \equiv \frac{\partial A}{\partial a_h}$$

und damit:

$$\Big[\sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \Big]_a^x \equiv \sum_1^n \Big(\bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} - \frac{\partial A}{\partial a_h} \frac{\partial a_h}{\partial a_k} \Big) \equiv \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} - \frac{\partial A}{\partial a_k},$$

es bleibt also nur:

$$(24) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_k} \equiv \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\partial y_h}{\partial a_k}.$$

Dies festgesetzt seien:

$$(25) \qquad a_i = a_i(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv (a_i)$$

die Auflösungen der n ersten Gleichungen (20), also der n Gleichungen:

$$(26) \qquad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \ldots, a_n)$$

---

1) Das Integral in dieser Formel ist identisch mit dem, welches aus

$$\int_a^x \Omega \, dx \qquad \text{oder} \qquad \int_a^x f dx$$

durch Substitution der Lösungen (21) entsteht, während andrerseits das Folgende selbst zugleich auch die Cauchysche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichung (12) liefert.

nach ihren n willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$. Die Substitution dieser Auflösungen, die durch ( ) hervorgehoben werden soll, führt die Funktion (23) über in die Funktion:

$$(V) \equiv W(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{27}$$

Nun reduzieren sich die Gleichungen (26) für $x = a$ auf $y_i = a_i$, daher müssen auch ihre Auflösungen (25) für $x = a$ ergeben $a_i = y_i$. Nach (23) wird aber für $x = a$:

$$V = A(a, a_1, \ldots, a_n).$$

Die neue Funktion W besitzt also zunächst die Eigenschaft, für $x = a$ den Wert anzunehmen:

$$W = A(a, y_1, \ldots, y_n).$$

Weiter folgt aus ihrer Entstehungsart:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i},$$

also nach (24):

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n{}_h (\bar{v}_h) \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}\right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i}.$$

Da aber die Gleichungen (25) die Auflösungen der Gleichungen (26) sind, so hat man:

$$y_h \equiv (\bar{y}_h)$$

und damit zugleich:

$$\frac{\partial y_h}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}\right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i};$$

man erhält also einfach:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv (\bar{v}_i). \tag{28}$$

Aus der Definition (23) folgt endlich noch:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \sum_1^n{}_h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h} - \bar{H}. \tag{29}$$

Überdies sind die Gleichungen (26) umgekehrt wieder die Auflösungen ihrer Auflösungen (25). Die Substitution der letzteren wird daher wieder aufgehoben durch die Substitution der Werte (26). Man hat daher nach (27)

$$V \equiv \overline{W}, \tag{27'}$$

und nach (28)

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial y_i} \equiv \bar{v}_i. \tag{28'}$$

Andererseits ist daher auch:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x},$$

oder nach (28') und, weil der obere Strich die Substitution der Lösungen (20) des Systems (7) anzeigt,

$$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + \sum_1^n \bar{v}_h \frac{\overline{\partial H}}{\partial v_h},$$

und hieraus folgt nach (29) und (28')

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + \bar{H} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + H\left(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_n}\right) \equiv 0.$$

In dieser Identität kann man aber die Substitutionen (26) durch die Substitution ihrer Auflösungen (25) wieder aufheben und erkennt auf diese Weise, daß $V = W$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) = 0. \tag{12}$$

Beachtet man schließlich noch, daß die Gleichungen (5''), denen unsere Lösungen (21) der Differentialgleichungen (2) identisch genügen, durch die Identitäten (28') übergehen in die Gleichungen:

$$y_i' = p_i\left(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_n}\right),$$

$$\lambda_\varrho = \mu_\varrho\left(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_n}\right),$$

so kann man nunmehr den Satz aussprechen:

V. *Hat man die Differentialgleichungen (2) vollständig integriert und eliminiert nun aus den gewonnenen vollständigen Lösungen:*

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \; \lambda_\varrho = \Theta_\varrho(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$

die $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$ mit Hilfe der $2n$ Gleichungen:

$$\varphi_i(a, c_1, \ldots, c_{2n}) = a_i, \; \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right]_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

in denen a eine neue willkürliche Konstante oder auch ein passend

gewählter bestimmter Wert von x ist, so erhält man ein neues System Lösungen dieser Differentialgleichungen:

$$y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \ldots, a_n),\ \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho(x, a_1, \ldots, a_n),$$

dessen n willkürliche Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ die Anfangswerte der Variabeln $y_1, \ldots, y_n$ für $x = a$ sind, und diese neuen Lösungen der Differentialgleichungen (2) gehören einer bestimmten Lösung $V = W$ der partiellen Differentialgleichung (12), und zwar einer Lösung, die für $x = a$ den Wert

$$W = A(a, y_1, \ldots, y_n)$$

annimmt, in solcher Weise zu, daß sie für $V = W$ den $n + r$ Gleichungen (5') identisch genügen.

§ 4.

Tragweite des Satzes V.

Lassen wir im Vorhergehenden den Anfangswert a von x ganz willkürlich, so können wir die Formel (23) auch nach a partiell differentiieren[1]) und erhalten dann auf demselben Wege, der zur Formel (24) führte, zunächst:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} - \Big[\sum_1^n{}_h \bar{v}_h \frac{\overline{\partial H}}{\partial v_h} - \overline{H}\Big]_{x=a} + \sum_1^n{}_h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} - \Big[\sum_1^n{}_h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}\Big]_{x=a},$$

d. h., da für $x = a$:

$$\bar{y}_h = a_h, \quad \bar{v}_h = \frac{\partial A}{\partial a_h}, \quad \frac{\overline{\partial H}}{\partial v_h} = \Big[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x}\Big]_{x=a}$$

wird:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\Big(a, a_1, \ldots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\Big) + \sum_1^n{}_h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} -$$

$$- \sum_1^n{}_h \frac{\partial A}{\partial a_h}\Big[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}\Big]_{x=a}.$$

Nunmehr aber hat $\bar{y}_h$ die Form:

$$\bar{y}_h \equiv \bar{y}_h(x, a, a_1, \ldots, a_n).$$

---

1) Die folgende Rechnung ist im wesentlichen dieselbe, die zu der zweiten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung des Problems I führt.

Aus: $a_k \equiv [\bar{y}_k]_{x=a}$ folgt daher durch partielle Differentiation nach a:

$$0 \equiv \frac{\partial a_k}{\partial a} \equiv \left[\frac{\partial \bar{y}_k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}_k}{\partial a}\right]_{x=a},$$

und demnach bleibt nur:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \ldots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) + \sum_1^n \bar{c}_k \frac{\partial \bar{y}_k}{\partial a}.$$

Andrerseits erhält man indirekt aus der Formel

$$V \equiv \overline{W} \tag{27'}$$

durch partielle Differentiation nach a:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial W}{\partial a} + \sum_1^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_k} \frac{\partial \bar{y}_k}{\partial a},$$

oder nach (28')

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial a} + \sum_1^n \bar{c}_k \frac{\partial \bar{y}_k}{\partial a},$$

und der Vergleich dieser beiden Werte von $\frac{\partial V}{\partial a}$ liefert sofort die Formel:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \ldots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right). \tag{30}$$

Ist daher im besondern die von a freie Funktion:

$$V = A(x, y_1, \ldots, y_n)$$

selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (12), so ergibt sich:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial a} \equiv 0,$$

und damit zugleich, wenn man die Substitution der Lösungen (26) durch die Substitution ihrer Auflösungen (25) wieder aufhebt,

$$\frac{\partial W}{\partial a} \equiv 0,$$

d. h. es ist dann auch die aus (23) abgeleitete neue Lösung $V = W$ der partiellen Differentialgleichung (12) frei von a. Sie erhält aber für $x = a$ den Wert

$$W = A(a, y_1, \ldots, y_n),$$

und fällt also, da jede von der willkürlichen Konstante a freie Funktion $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ bereits unmittelbar gegeben ist durch ihren Wert $F(a, y_1, \ldots, y_n)$ für $x = a$, überhaupt zusammen mit der Lösung

$$V = A(x, y_1, \ldots, y_n)$$

Um daher ein System Lösungen der Differentialgleichungen (2) zu erhalten, das für eine beliebig gegebene Lösung:

$$V = F(x, y_1, \ldots, y_n)$$

der partiellen Differentialgleichung (12) den Gleichungen (5′) genügt, braucht man nur im Satze V die Konstante a ganz willkürlich zu lassen, und:

$$A(a, a_1, \ldots, a_n) \equiv F(a, a_1, \ldots, a_n)$$

zu nehmen.

Nach Satz III hängt aber jedes System Lösungen $p_1, \ldots, p_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ des Problems II mit einer Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12) durch die Gleichungen (5′) zusammen, und nach Satz IV entspricht jeder solchen Lösung V ein System Lösungen $y_1, \ldots, y_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ der Differentialgleichungen (2), das den Gleichungen (5′) genügt. Man sieht somit:

VI. Nach vollständiger Integration der Differentialgleichungen (2) gestattet Satz V überhaupt jedes System Lösungen dieser Differentialgleichungen zu erhalten, welches mit irgend einem System Lösungen des Problems II in den Beziehungen steht:

$$y_i' = p_i, \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho.$$

Damit soll aber natürlich nicht gesagt sein, daß der Satz, wenn es nur darauf ankommt, ein bestimmtes solches Lösungssystem der Differentialgleichungen (2) zu gewinnen, auch immer das einfachste Mittel darböte, zu diesen Lösungen zu gelangen.

Um z. B. das besondere System Lösungen, welches ich in meiner ersten Note direkt abgeleitet hatte, aus dem Satze V zu erhalten, müßte man vor allem die ihm zugehörige Lösung der partiellen Differentialgleichung (12) berechnen, d. h. man müßte durch Substitution der vollständigen Lösungen (17) des kanonischen Systems (7) und Ausführung der Quadratur das Integral

$$V = \int_{x_0}^{x} \left\{ \sum_1^n v_h \frac{\partial H}{\partial v_h} - H \right\} dx$$

als Funktion von $x, c_1, \ldots, c_{2n}$ berechnen und hierauf die $2n$ Integrationskonstanten $x, c_1, \ldots, c_{2n}$ mittels der $2n$ Gleichungen:

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}),\ y_{i0} = \varphi_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n})$$

aus dieser Funktion eliminieren. Das Resultat der Elimination:

$$V = F(x, y_1, \ldots, y_n)$$

verschwindet identisch für $x = x_0$ und enthält keine willkürliche Konstante, sobald man die Anfangswerte $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ als fest gegeben betrachtet, während es andrerseits, wenn man diese Anfangswerte willkürlich läßt, nichts anderes ist als die Jacobi-Hamiltonsche Lösung der partiellen Differentialgleichung (12).[1]) Erst nachdem man diese Lösung F berechnet hat, kann man nunmehr zu den verlangten Lösungen der Differentialgleichungen (2) durch Anwendung des Satzes V kommen, in welchem zu dem Ende die Funktion

$$A(a, a_1, \ldots, a_n) \equiv F(a, a_1, \ldots, a_n)$$

zu nehmen ist.

Diese Ableitung jenes besonderen Systems von Lösungen ist offenbar sehr viel umständlicher als die in meiner ersten Note auseinandergesetzte. Man muß erst, was ganz auf dem in § 3 eingeschlagenen Wege geschehen kann, die partiellen Differentialquotienten der Funktion F nach den Variabeln y berechnen, d. h. man muß erst so ziemlich die ganze dort durchgeführte Rechnung wiederholen, um zu erkennen, daß dies Verfahren sich in der Tat schließlich auf das in jener Mitteilung direkt abgeleitete reduziert.[2])

---

1) Vgl. *Mathematische Annalen*, Bd. III p. 437.

2) Auf dem angegebenen Werte ergibt sich das Endresultat zunächst in der Form, daß man aus den vollständigen Lösungen (18) der Differentialgleichungen (2) die $2n$ Integrationskonstanten c mit Hilfe der $2n$ Gleichungen

$$a_i = \varphi_i(a, c_1, \ldots, c_{2n}),$$

$$y_{i0} = \varphi_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n})$$

eliminieren muß. Da man aber natürlich n von den c selbst an Stelle von $a_1, \ldots, a_n$ als willkürliche Konstante beibehalten kann, so kommt dies selbst wieder darauf zurück, daß man nur n von den Integrationskonstanten c mittels der n letzten Gleichungen aus den Lösungen (18) zu eliminieren braucht, und das ist eben die frühere Methode.

Digitized by Google

§ 5.

Die Grenzen der Anwendbarkeit des Unabhängigkeitssatzes selbst.

Gleichzeitig mit der Jacobi-Hamiltonschen Lösung der partiellen Differentialgleichung (12) existieren auch die eben besprochenen besonderen zusammengehörigen Lösungen der Differentialgleichungen (2) und des Problems II nur, solange das Problem I wirklich möglich und bestimmt ist, solange also die vollständigen Lösungen

$$y_i = \varphi_i(x, c, \ldots, c_{2n})$$

seiner Differentialgleichungen gerade $2n$ Integrationskonstanten in solcher Art enthalten, daß man diesen Lösungen für zwei gegebene Werte von x festgegebene Werte vorschreiben kann. Satz V dagegen setzt nur voraus, daß die $n + r$ Gleichungen (4) auflösbar seien nach den $n + r$ Unbekannten $y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ oder daß das System Differentialgleichungen (2) wirklich von der Ordnung $2n$ sei, und er gilt unter dieser Voraussetzung auch dann noch, wenn die vollständigen Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ dieser Differentialgleichungen weniger als $2n$ willkürliche Konstanten enthalten. Dies tritt im besonderen immer dann ein, wenn im Problem I die Funktion f ein vollständiger Differentialquotient ist. Daraus folgt aber leider noch durchaus nicht, daß ein *Hilbertscher Unabhängigkeitssatz* auch für das folgende Problem der Variationsrechnung existierte:

VII. Unter allen stetigen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, die $r < n$ gegebenen, nach $y_1', \ldots, y_r'$ auflösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n', y_1', \ldots, y_n') = 0,$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots, r,$$

genügen, und von denen die $n - 1$ letzten für zwei gegebene Werte x_0 und $x_1 > x_0$ von x gegebene Werte besitzen, während von y_1 nur der Wert für $x = x_0$ fest vorgeschrieben ist, diejenigen zu finden, denen ein größter oder kleinster Wert dieser ersten Funktion für $x = x_1$ zugehört,

was umso auffallender ist, als es bekanntlich doch auch in diesem Problem eine Funktion gibt, die vollständig die Rolle der Weierstrassschen E-Funktion übernimmt.

Versteht man nämlich unter $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ irgend ein bestimmtes System Lösungen des Problems II, so bewahrt

für alle, nach den Bedingungen des Problems I zulässigen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, welche den Ausdruck (8), oder, was wegen der Bedingungen (1′) dasselbe ist, den Ausdruck:

$$|f| + \sum_1^n (y_k' - p_k) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k}$$

im Integrationsintervall stetig erhalten, das Integral:

$$(31) \qquad I^* \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left\{ |f| + \sum_1^n (y_k' - p_k) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k} \right\} dx$$

unveränderlich denselben Wert, da es ja nur abhängt von den Grenzen x_0, x_1 und den Werten jener Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ an den beiden Grenzen und alle diese Grenzwerte fest gegeben sind, und dies Resultat erst ist der eigentliche *Hilbertsche Unabhängigkeitssatz.*

Für ein solches System Lösungen:

$$y_i = \bar{y}_i, \qquad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho$$

des Problems I aber, welches den Gleichungen:

$$y_i' = p_i, \qquad \lambda_\varrho = \mu_\varrho$$

genügt, erhält dies Integral den Wert:

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \bar{f} dx.$$

Setzt man daher:

$$(32) \qquad E \equiv f - |f| - \sum_1^n (y_k' - p_k) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_k},$$

so kann man — immer die Stetigkeitsforderung als erfüllt vorausgesetzt — die Änderung

$$\Delta I \equiv \int_{x_0}^{x_1} f dx - \int_{x_0}^{x_1} \bar{f} dx,$$

welche das vorgelegte Integral

$$I \equiv \int_{x_0}^{x_1} f dx$$

erfährt, wenn es erst mit einem bestimmten System solcher Lösungen und dann mit irgend welchen anderen, den Bedingungen des Problems I genügenden Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ gebildet wird, so ausdrücken:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} E dx. \tag{33}$$

Das Problem VII dagegen, obgleich es seiner äußeren Form nach für $f \equiv y_1'$ mit dem Problem I zusammenfällt, unterscheidet sich doch dadurch ganz wesentlich von diesem, daß man bei ihm den Wert von y_1 für $x = x_1$ nicht mehr fest vorschreiben kann, sondern vielmehr notwendig ganz willkürlich lassen muß. Bezieht man daher, indem man f durch y_1' ersetzt, das Integral (31) auf das Problem VII, so bleibt sein Wert nun nicht mehr für alle mit den Problembedingungen verträglichen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x unveränderlich, sondern wird abhängig von dem Werte y_1, den die erste dieser Funktionen für $x = x_1$ annimmt, und die fundamentale Formel (33) ist daher auf das Problem VII gar nicht mehr anwendbar. —[1])

1) Die vorliegende Note berührt sich eng mit dem zweiten Teile des inhaltsreichen Aufsatzes von Hilbert *„Zur Variationsrechnung"*, Göttinger Nachrichten 1905, den ich aber erst erhielt, nachdem meine Note bereits gesetzt war. Die Berührungspunkte nachträglich noch hervorzuheben, würde zu weit führen, ich darf mir in betreff des ersten dort behandelten Gegenstandes aber wohl die Bemerkung gestatten, daß ich meine Begründung der Lagrangeschen Differentialgleichungen der Variationsrechnung schon 1895 in diesen Berichten ausgedehnt hatte auf das allgemeine Problem VII.

Druckfertig erklärt 6. VI. 1905.]

Bemerkung über das elektrische Potential bei geradlinigen Elektroden.

Von

J. Thomae.

In den Acta Leop.-Carolina B. LI Nr. 4 hat Herr F. Bennecke eine Untersuchung veröffentlicht „über die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene für den Fall, daß die Zuleitung der beiden verschiedenen Elektrizitäten in zwei parallelen geradlinigen Strecken erfolgt". Über die experimentellen Voraussetzungen ist darin wenig gesagt. Daß die Elektrizitätsmenge, die durch die eine Elektrode einfließt, gleich groß ist als die entgegengesetzte der andern Elektrode, darf wohl als selbstverständlich angesehen werden. Mit welcher Stärke aber die Elektrizität in den verschiedenen Teilen jeder Elektrode in die Ebene läuft, ist nicht ohne weiteres zu erkennen. Es wird auf den Satz hingewiesen, daß bei winkeltreuer Abbildung zweier Flächen aufeinander ein Strömungsnetz in der einen Platte stets ein Strömungsnetz in der andern ergibt. Die Ebene wird auf ein Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen abgebildet. In diesem Bilde werden die konzentrischen Kreise, zu denen die Randkurven gehören, als Spannungskurven in Anspruch genommen, so daß also die Ränder, und nach dem zitierten Satze die Elektroden als Niveaukurven erscheinen. Mit welchen Mitteln ein solcher Zustand herbeizuführen ist, wird nicht gesagt. Insbesondere ist die Verteilung der Stromstärke in dem Falle, daß eine Elektrode unendlich lang wird, in dieser Elektrode schwer zu erkennen. Überhaupt aber steht die Zulässigkeit einer unendlich langen Elektrode oder beider in Frage, weil dann die Spannung im Unendlichen nicht mehr gleich Null oder konstant angenommen werden kann. Diese Annahme gehört aber mit zu

Digitized by Google

den Voraussetzungen, unter denen die Laplacesche Differentialgleichung mit den Nebenbedingungen in den Elektroden ein bestimmtes Potential ergibt.

Im Folgenden versuche ich, diese Aufgabe auf einem andern Wege, nämlich durch einen Grenzübergang, zu lösen. Die erhaltenen Resultate sind von denen des Herrn Bennecke gänzlich verschieden. Die Intensität des einfließenden Stromes wird bei mir in jeder einzelnen Elektrode als eine gleichförmig verteilte vorausgesetzt.

§ 1. *Das elektrische Potential für den Fall punktförmiger Elektroden.* Unter dem elektrischen oder logarithmischen Potential einer ebenen leitenden Platte, in der xy rechtwinklige Koordinaten sind, versteht man eine Funktion U, die der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Genüge leistet, und wenn sie begrenzt ist, am Rande der Nebenbedingung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \tag{2}$$

unterliegt, d. h. daß der nach der Normale genommene Differentialquotient am Rande den Wert Null hat. Ist die Platte die ganze unendliche Ebene, so tritt für (2) die Bedingung ein, *daß U im Unendlichen konstant, spezieller gleich Null sein soll.* Strömt Elektrizität in die Platte in einzelnen Punkten $A_1 A_2 \cdots A_n$ bez. mit den Intensitäten $E_1 E_2 \cdots E_n$, wo

$$\sum E_\mu = 0, \ \mu = 1, 2 \cdots n \tag{3}$$

ist, so wird dort U unendlich groß wie

$$\sum E_\mu \, lg \, (PA_\mu), \tag{4}$$

wo (PA_μ) die Entfernung eines beliebigen Punktes P von dem festen Einströmungspunkte A_μ ist. Die Gleichung (3) bewirkt, daß ein stationärer Zustand eintritt, der bei einer unendlichen Platte im Grunde erst nach unendlich langer Zeit, tatsächlich aber in starker Näherung sehr bald eintritt. In diesem stationären Zustande gibt U die Spannung an jeder Stelle an. Durch diese Bedingungen ist U bei einer unendlichen Platte vollständig, bei einer berandeten Platte bis auf eine additive Konstante, die von der Ladung der Platte abhängt, völlig bestimmt.

Wird $z = x + yi$ gesetzt, so ist für die unendliche Ebene U der reelle Teil der Funktion

$$(5) \quad W = U + iV = \sum E_\mu \, lg\,(z - z_\mu) = \sum E_\mu \, lg\left(1 - \frac{z_\mu}{z}\right),$$

wenn z_μ die Zahl ist, die dem Punkte A_μ entspricht. Die zweite Form von W läßt erkennen, daß W und also U im Unendlichen verschwindet.

Nehmen wir an, daß in die Punkte $z_1 z_2 z_3 \cdots z_n$ positive Elektrizität je mit der Intensität $E:n$, in die Punkte $z_1' z_2' \cdots z_m'$ negative Elektrizität mit der Intensität $E:m$ einströme, so ist U der reelle Teil der Funktion

$$(6) \quad W = (E:n)\,(lg\,(z - z_1) + lg\,(z - z_2) + \cdots + lg\,(z - z_n)) \\ - (E:m)\,(lg\,(z - z_1') + lg\,(z - z_2') + \cdots + lg\,(z - z_m')).$$

§ 2. *Das Potential bei zwei parallelen geradlinigen Elektroden.* In der Formel (6) verdichten wir die Punkte A_μ so, daß sie zwei geradlinige parallele Strecken überall je gleich dicht bedecken. Wir setzen

$$z_1 = a = \alpha + hi, \qquad z_2 = a + \frac{s}{n-1}, \qquad \cdots z_\mu = a + \frac{\mu - 1}{n-1}\, s,$$

$$z_1' = a' = \alpha' + h'i, \quad z_2' = a' + \frac{s'}{m-1}, \quad \cdots z_\mu' = a' + \frac{\mu - 1}{m-1}\, s',$$

$$\cdots z_n = b = \beta + hi,$$

$$\cdots z_m' = b' = \beta' + h'i,$$

$$s = \beta - \alpha = b - a, \quad s' = \beta' - \alpha' = b' - a'.$$

Ferner werde $E:s = H$, $E:s' = H'$ gesetzt, so daß H die in die Einheit der Länge der einen Elektrode, $-H'$ die in die Einheit der Länge der andern Elektrode einströmende Elektrizitätsmenge ist. Das Potential ist dann der reelle Teil der Funktion

$$(7) \begin{cases} W = \overline{W} - W', \\ \overline{W} = H \frac{n-1}{n} \frac{s}{n-1} (lg(z - z_1) + lg(z - z_2), + \cdots + lg(z - z_n)), \\ \overline{W'} = H' \frac{m-1}{m} \cdot \frac{s'}{m-1} (lg(z - z_1') + lg(z - z_2') + \cdot + lg(z - z_m')), \end{cases}$$

und wenn man mit m und n zur Grenze Unendlich übergeht, und z bei der Integration als konstant ansieht,

$$(8)\quad W = H\int_0^s lg(z-a-x)\,dx, \quad W' = H'\int_0^{s'} lg(z-a'-x)\,dx.$$

Führt man die Integrationen aus, so folgt

$$(9)\quad W = H(b-z)\,lg(z-b) + H(z-a)\,lg(z-a) - H'(b'-z)\,lg(z-b') - H'(z-a')\,lg(z-a').$$

Um zu sehen, wie sich diese Funktion im Unendlichen verhält, schreiben wir

$$W = H(b-z)\,lg\left(1-\frac{b}{z}\right) + H(z-a)\,lg\left(1-\frac{a}{z}\right) + H(b-a)\,lg\,z - H'(b'-z)\,lg\left(1-\frac{b'}{z}\right) - H'(z-a')\,lg\left(1-\frac{a'}{z}\right) - H'(b'-a')\,lg\,z.$$

Die Ausdrücke $H(b-a)\,lg\,z = E\,lg\,z$, $-H'(b'-a')\,lg\,z = -E\,lg\,z$ heben sich fort. Entwickelt man die andern Logarithmen nach Potenzen von $1:z$, so darf man für wachsende z die zweiten Potenzen vernachlässigen und erhält so für W den Ausdruck

$$H(z-b)\frac{b}{z} - H(z-a)\frac{a}{z} - H'(z-b')\frac{b'}{z} + H'(z-a')\frac{a'}{z}$$
$$= H(b-a) - H'(b'-a') + H\frac{a^2-b^2}{z} - H'\frac{a'^2-b'^2}{z}$$
$$= (H(a^2-b^2) - H'(a'^2-b'^2)) : z,$$

der für $z=\infty$ verschwindet. Nimmt man b unendlich wenig von a verschieden an, so erhält man für W den Ausdruck

$$E\,lg(z-a) - E - H'(b'-z)\,lg(z-b') - H'(a'-z)\,lg(z-a'),$$

und wenn man auch noch b' unendlich nahe an a' heranrücken läßt, so erhält man in

$$W = E\,lg(z-a) - E\,lg(z-a')$$

die für zwei punktförmige Elektroden gültige Formel wieder.

§ 3. *Stetigkeit der Funktion U.* Nimmt man für die Logarithmen die Hauptwerte, so ist W eine unstetige Funktion von xy, weil sich die Logarithmen an beiden Seiten der Linien, in denen

ihr Argument negativ reell ist, um $2i\pi$ unterscheiden. Wir müssen ermitteln, welchen Einfluß dies auf den reellen Teil U der Funktion W ausübt. Dabei verstehen wir unter $arc\ z = artg(y:x)$ den Hauptwert dieser Funktion, der sich zu beiden Seiten der Linie $y = 0 \quad x < 0$ um 2π unterscheidet. Es ist

$$\begin{aligned} W = {} & H(\beta + hi - x - yi)\left(\tfrac{1}{2} lg((x-\beta)^2 + (y-h)^2) + i\,arc\,(z-b)\right) \\ & + H(x + yi - \alpha - hi)\left(\tfrac{1}{2} lg((x-\alpha)^2 + (y-h)^2) + i\,arc\,(z-a)\right) \\ & - H'(\beta' + h'i - x - yi)\left(\tfrac{1}{2} lg((x-\beta')^2 + (y-h')^2) + i\,arc\,(z-b')\right) \\ & - H'(x + yi - \alpha' - h'i)\left(\tfrac{1}{2} lg((x-\alpha')^2 + (y-h')^2) + i\,arc\,(z-a')\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10)\ U = {} & H(\beta - x)\tfrac{1}{2} lg\,((x-\beta)^2 + (y-h)^2) + H(y-h)\,arc\,(z-b) \\ & + H(x-\alpha)\tfrac{1}{2} lg\,((x-\alpha)^2 + (y-h)^2) - H(y-h)\,arc\,(z-a) \\ & - H'(\beta' - x)\tfrac{1}{2} lg\,((x-\beta')^2 + (y-h')^2) + (y-h')\,arc\,(z-b') \\ & - H'(x-\alpha')\tfrac{1}{2} lg\,((x-\alpha')^2 + (y-h')^2) + H'(y-h')\,arc\,(z-a'). \end{aligned}$$

Hier sind die Logarithmen von selbst überall stetige Funktionen und nur die Enden der Elektroden können eine besondere Betrachtung als wünschenswert erscheinen lassen. Nehmen wir das Ende b, so ist der in Betracht kommende logarithmische Teil

$$\tfrac{1}{2} H(\beta - x)\, lg\,((x-\beta)^2 + (y-h)^2).$$

Es ist stets $(x-\beta)^2 + (y-h)^2 = (x-\beta)^2(1+\varepsilon)$, wo ε positiv ist, und folglich ist dieser Teil gleich

$$H(\beta - x)\, lg\,(x-\beta) + \tfrac{1}{2} H(\beta - x)\, lg\,(1+\varepsilon).$$

Aus dieser Form ist ersichtlich, daß sich dieser Teil dem Werte Null stetig nähert. Der andere in Betracht kommende Teil ist

$$H(y-h)\,(arc\,(z-b) - arc\,(z-a)).$$

Auch dieser Teil nähert sich der Null stetig, wenn xy in das Ende b rückt. Bei der Frage nach der Stetigkeit der Funktion U handelt es sich demnach nur um den mit einem *arcus* als einer unstetigen Funktion behafteten Teile, also um die Größen

$$H(y-h)\,(arc\,(z-b) - arc\,(z-a)),$$

$$H'(y-h')\,(arc\,(z-b') - arc\,(z-a')).$$

Die *arcus* sind stetige Funktionen mit Ausnahme der Linien, in denen ihr Argument negativ wird. In der Verlängerung der Elektroden fällt die Unstetigkeit fort, weil wir es mit der Differenz zweier *arcus* zu tun haben. Außerdem aber sind die *arcus* in diesen Verlängerungen sowohl als auch in den Elektroden selbst mit einem verschwindenden Faktor behaftet, so daß auch längs der Elektroden selbst Stetigkeit herrscht. Die Funktion U ist eine überall stetige Funktion.

§ 4. *Die Elektroden sind keine Niveaukurven.* Machen wir $y = h$, $\alpha < x < \beta$, so befinden wir uns auf der Elektrode s. Dort ist

$$(11)\quad \begin{aligned} U = {} & H(\beta - x)\, lg\, abs\,(x-\beta) + H(x-\alpha)\, lg\, abs\,(x-\alpha) \\ & - H'(\beta' - x)\, lg\, abs\,(x-\beta) - H'(x-\alpha')\, lg\, abs\,(x-\alpha') \\ & - H'(h-h')(arc(x-\beta'+i(y-h)) - arc(x-\alpha+i(x-h'))) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nicht von x unabhängig. Die Elektrode ist daher keine Niveaukurve.

§ 5. *Spezialisierungen.* Nehmen wir die Elektroden gleichlang als gegenüberliegende Seiten eines Rechtecks an, so können wir das Koordinatensystem so wählen, daß

$$a = -\alpha + hi, \quad b = \alpha + hi, \quad a' = -\alpha - hi, \quad b' = \alpha - h'i,$$
$$s = s', \quad H = H'$$

wird. Dann ergibt sich

$$(12)\quad \begin{aligned} U = {} & H(\alpha - x)\tfrac{1}{2} lg\,((x-\alpha)^2 + (y-h)^2) + H(y-h)\, arc\,(x-\alpha+i(y-h)) \\ & + H(\alpha + x)\tfrac{1}{2} lg\,((x+\alpha)^2 + (y-h)^2) - H(y-h)\, arc\,(x+\alpha+i(y-h)) \\ & - H(\alpha - x)\tfrac{1}{2} lg\,((x+\alpha)^2 + (y+h)^2) - H(y+h)\, arc\,(x-\alpha+i(y+h)) \\ & + H(\alpha + x)\tfrac{1}{2} lg\,((x+\alpha)^2 + (y+h)^2) + H(y+h)\, arc\,(x+\alpha+i(y+h)) \\ = {} & H\frac{\alpha - x}{2}\, lg\,\frac{(x-\alpha)^2 + (y-h)^2}{(x-\alpha)^2 + (y+h)^2} + H\frac{\alpha + x}{2}\, lg\,\frac{(x+\alpha)^2 + (y-h)^2}{(x+\alpha)^2 + (y+h)^2} \\ & + H(y-h)\,(arc\,(x-\alpha+i(y-h)) - arc\,(x+\alpha+i(y+h))) \\ & + H(y+h)\,(arc\,(x+\alpha+i(y+h)) - arc\,(x-\alpha+i(y+h))) \end{aligned}$$

Für $y = 0$ verschwindet der logarithmische Teil, der andere Teil wird

$$Hh\,(arc\,(x+\alpha+hi) + arc\,(x+\alpha-hi) - arc\,(x-\alpha+hi) - arc\,(x-\alpha-hi))$$

Da die Summe der *arcus* konjugierter Zahlen Null ist, so verschwindet auch dieser Teil, U ist in der x-Achse überall gleich Null, sie ist eine Niveaukurve. Die y-Achse ist aus Gründen der Symmetrie eine Strömungskurve, und zwar ist in ihr

$$U = 2\alpha H\,(lg\,(\alpha^2 + (y-h)^2) - lg\,(\alpha^2 + (y+h)^2)).$$

In einer weiteren Spezialisierung nehmen wir $b' = a = 0$, $b = -a' = +\alpha$, $h = h' = 0$, $H = H'$ an, dann ist

$$\begin{aligned}(13)\quad W &= H(\alpha - z)\,lg\,(z-\alpha) + H z\,lg\,z \\ &\quad + Hz\,lg\,z - H(z+\alpha)\,lg\,(z+\alpha) \\ &= 2Hz\,lg\,z - Hz\,lg\,(z^2-\alpha^2) + \alpha\,(lg\,(z-\alpha) - lg\,(z+\alpha)) \\ &= -Hz\,lg\left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) + \alpha\,lg\frac{z-\alpha}{z+\alpha}.\end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist der reelle Teil von W Null, die y-Achse ist also eine Niveaukurve. Die x-Achse ist eine Strömungskurve, auf ihr ist

$$U = -Hx\,lg\,abs\left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) + \alpha\,lg\,abs\,\frac{x-\alpha}{x+\alpha}.$$

Für entgegengesetzt gleiche x erhält man entgegengesetzt gleiche Werte von U. Für $x = \alpha$ ergibt sich $U = 2\alpha H\,lg\,\alpha$. — Man kann mit α nicht an Grenze Unendlich übergehen.

§ 6. *Zu einander senkrechte Elektroden.* Stehen die Elektroden senkrecht aufeinander, so kann man die eine auf die x-Achse, die andere auf die y-Achse legen, so daß $a = \alpha$, $b = \beta$, $a' = i\alpha'$, $b' = i\beta'$ wird. Bedienen wir uns einer analogen Bezeichnungsweise wie unter (6) und (7), so erhalten wir

$$W = \overline{W} - \overline{W}'$$

$$\overline{W} = H\,\frac{n-1}{n}\,\frac{s}{n-1}\,(lg\,(z-z_1) + lg\,(z-z_2) + \cdots + lg\,(z-z_n))$$

$$\begin{aligned}\overline{W}' &= H'\,\frac{m-1}{m}\,\frac{s}{m-1}\,lg\,(z-z_1') + lg\,(z-z_2') + \cdots + lg\,(z-z_m')) \\ &= H'\frac{m-1}{m}\,\frac{s'}{m-1}\left(lg\,(z-\alpha' i) + lg\left((z-\alpha' i - \frac{is'}{m-1}\right) + \cdots\right. \\ &\quad \left. + lg\left(z-\alpha' i - \frac{\mu-1}{m-1}\,s' i\right) + \cdots + lg\,(z-\beta' i)\right),\end{aligned}$$

und wenn wir mit m und n zur Grenze Unendlich übergehen

$$W = H(b-z)\,lg\,(z-b) + H(z-a)\,lg\,(z-a) - H'\int_0^{s'} lg\,(z-\alpha' i - iy)\,dy,$$

wo z bei der Integration als fest gedacht ist. Endlich folgt

$$\begin{aligned} W &= H(b-z)\,lg\,(z-b) + H(z-a)\,lg\,(z-a) \\ &\quad + iH'(b'-z)\,lg\,(z-b') + iH'(z-a')\,lg\,(z-a') \\ &= H(b-z)\,lg\left(1-\frac{b}{z}\right) + H(z-a)\,lg\left(1-\frac{a}{z}\right) \\ &\quad + iH'(b'-z)\,lg\left(1-\frac{b'}{z}\right) + iH'(z-a')\,lg\left(1-\frac{a'}{z}\right). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Form geht hervor, daß W im Unendlichen Null ist. Schreiben wir statt dessen

$$\begin{aligned} (15)\quad W &= H(b-z)\,lg\,(z-b) + H(z-a)\,lg\,(z-a) \\ &\quad + iH'(b'-z)\,lg\,i(z-b') + iH'(z-a')\,lg\,i(z-a') \end{aligned}$$

so ändern wir W um eine rein imaginäre Konstante, die auf den reellen Teil U ohne Einfluß ist, die aber bewirkt, daß der reelle Teil sofort in einer stetigen Darstellung erhalten wird. Diese Stetigkeit bleibt eben noch zu untersuchen. Es ist

$$\begin{aligned} (16)\quad U &= \frac{H(\beta-x)}{2}\,lg\,((x-\beta)^2+y^2) + \frac{H(x-\alpha)}{2}\,lg\,((x-\alpha)^2+y^2) \\ &\quad + Hy(arc\,(x-\beta+yi) - arc\,(x-\alpha)+yi) \\ &\quad - \frac{H'(\beta'-y)}{2}\,lg(x^2+(y-\beta')^2) - \frac{H'(y-\alpha')}{2}\,lg(x^2+(y-\alpha')^2) \\ &\quad - H'x\,(arc\,(\beta'-y+xi) - arc\,(\alpha'-y+xi)). \end{aligned}$$

In dieser Form sind die mit dem arcus behafteten Teile stetig, weil längs ihrer Unstetigkeitslinien die Arcusfnnktionen mit einem verschwindenden Faktor behaftet sind.

§ 7. *Geradlinige Elektroden in der Halbebene.* Es soll jetzt wenigstens ein spezieller Fall betrachtet werden, in dem die leitende Platte die Halbebene ist, sodaß $\partial U : \partial n$ längs der

x-Achse Null ist. — Wir nehmen vier geradlinige Elektroden an. In den beiden ersten Elektroden zwischen $a = \alpha i$ und $b = \beta i$ und zwischen $-\beta i$ und $-\alpha i$ ströme auf die Einheit der Länge die Elektrizitätsmenge H in die Ebene ein, in den beiden anderen Elektroden zwischen $a = \alpha' i$ und $b' = \beta' i$, und zwischen $-\beta' i$ und $-\alpha' i$ ströme auf die Einheit der Länge die Menge $-H'$ in die Ebene ein, wo HH' in der Beziehung stehen, daß die Gesamtmenge der einströmenden Elektrizität Null ist. Alsdann ist

$$(17)\quad W = -iH((z-b)lg(z-b) + (a-z)lg(z-a) + (z+a)lg(z+a) - (z+b)lg(z+b)) + iH'((z-b')lg(z-b') + (a'-z)lg(z-a') + (z+a')lg(z+a') - (z+b')lg(z+b')).$$

$$(18)\quad \frac{dW}{dz} = -iH(lg(z-b) - lg(z-a) + lg(z+a) - lg(z+b)) + iH'(lg(z-b') - lg(z-a') + lg(z+a') - lg(z+b')).$$

Daraus ergibt sich für $y = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dz} &= -iH\left(lg\frac{x-\beta i}{x+\beta i} + lg\frac{x+\alpha i}{x-\alpha i}\right) \\ &\quad + H'\left(lg\frac{x-\beta' i}{x+\beta' i} + lg\frac{x+\alpha' i}{x-\alpha' i}\right) \\ &= +2H(arc(x-\beta i) + arc(x+\alpha i)) \\ &\quad - 2H'(arc(x-\beta' i) + arc(x+\alpha' i)).\end{aligned}$$

Dies ist eine reelle Größe. Setzen wir $dz = idy$, so folgt, wenn $W = U + Vi$ gesetzt wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= 2iH(arc(x-\beta i) + arc(x+\alpha i)) \\ &\quad - 2H'i(arc(x-\beta' i) + arc(x+\alpha i)),\end{aligned}$$

$$(19)\qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

auf der ganzen x-Achse. Fließt demnach in die von der x-Achse begrenzte Ebene in die geradlinige Elektrode zwischen $a = \alpha i$ und $b = \beta i$ in bezug auf die Einheit der Länge die Elektrizitätsmenge H ein, in die Elektrode zwischen $a' = \alpha' i$, und $b' = \beta' i$ in bezug auf die Einheit der Länge die Menge $-H'$, so jedoch,

Digitized by Google

daß die Summe der einströmenden Menge Null ist, so wird im stationären Zustande die Spannung in jedem Punkte der Platte durch den reellen Teil der unter (17) stehenden Funktion W gegeben. — Wollte man die Halbebene durch die Substitution $\zeta = (z - i) : (z + i)$ auf den Einheitskreis winkeltreu abbilden, so würden sich die beiden Elektroden zwar auf geradlinige Stücke im Innern des Kreises abbilden. Es kann aber damit die Aufgabe des Potentials für den Kreis nicht gelöst werden, weil die Bildströme je längs einer Elektrode nicht konstant wären.

§ 8. *Die Kreisplatte.* Ist die Platte durch eine Kreislinie, deren Radius Eins sein mag, begrenzt, so soll nur ein spezieller Fall noch besprochen werden, nämlich der, in dem zwischen $z = \alpha$ und $z = \beta$, $\alpha > 0$, $\alpha < \beta < 1$ die Menge H in bezug auf die Einheit der Strecke einströmt, und in die Elektrode zwischen $-\beta$ und $-\alpha$ die Menge $-H$ in bezug auf die Einheit der Strecke in die Platte einströmt.

Für punktförmige Elektroden ist das Potential bei einer Kreisplatte von einer additiven Konstanten abgesehen, der reelle Teil der Funktion

$$W = \sum E_\mu \, lg\,(z - z_\mu) + \sum E_\mu \, lg\,(\bar{z}_\mu z - 1), \quad \sum E_\mu = 0,$$

wenn $\bar{z}_\mu$ die zu z_μ konjugierte Zahl bedeutet. Nun nehmen wir je n Punkte $z_1, z_2 \ldots z_n$ auf den beiden Strecken, nämlich

$$z_1 = \alpha, \quad z_n = \beta, \quad z_\mu = \alpha + \frac{\mu - 1}{n - 1} s,$$

$$z'_1 = -\beta, \quad z'_n = -\alpha, \quad z'_\mu = -\beta + \frac{\mu - 1}{n - 1} s,$$

an, in die die Mengen bez. $E : n$ und $-E : n$ einfließen. Die Lösung ist alsdann der reelle Teil der Funktion

$$W = H\frac{n-1}{n}\frac{s}{n-1}\left(lg(z-\alpha) + \cdots + lg\left(z-\alpha-\frac{\mu-1}{n-1}s\right) + \cdots lg(z-\beta)\right)$$

$$+ H\frac{n-1}{n}\frac{s}{n-1}\left(lg(\alpha z-1) + \cdots + lg\left(\left(\alpha+\frac{\mu-1}{n-1}s\right)z-1\right) + \cdots lg(\beta z-1)\right)$$

$$- H\frac{n-1}{n}\frac{s}{n-1}\left(lg(z+\beta) + \cdots + lg\left(z+\beta-\frac{\mu-1}{n-1}s\right) + \cdots + lg(z+\alpha)\right)$$

$$- H\frac{n-1}{n}\frac{s}{n-1}\left(lg(\beta z+1) + \cdots + lg\left(\left(\beta-\frac{\mu-1}{n-1}s\right)z+1\right) + \cdots + (\alpha z+1)\right).$$

und wenn wir mit n zur Grenze Unendlich übergehen und z bei der Integration als fest annehmen

$$(20)\quad W = H\int_0^x lg(z-\alpha-x)\,dx + H\int_0^x lg((\alpha+x)z-1)\,dx$$
$$- H\int_0^x lg(z+\beta-x)\,dx - H\int_0^x lg((\beta-x)z+1)\,dx$$
$$= H(\beta-z)\,lg(z-\beta) + H(z-\alpha)\,lg(z-\alpha)$$
$$+ \frac{H(\beta z-1)}{z}\,lg(\beta z-1) - H\frac{\alpha z-1}{z}\,lg(\alpha z-1)$$
$$+ H(\alpha+z)lg(z+\alpha) - H(z+\beta)lg(z+\beta) + H\frac{\alpha z+1}{2}lg(\alpha z+1)$$
$$- H\frac{\beta z+1}{2}\,lg(\beta z+1).$$

Für $x = 0$ fließt hieraus

$$W = H\beta\,lg\frac{yi-\beta\,y\beta i-1}{yi+\beta\,y\beta i+1} + H\alpha\,lg\frac{yi+\alpha\,y\alpha i+1}{yi-\alpha\,y\alpha i-1}$$
$$+ H\frac{1}{yi}lg\frac{1+\alpha^2y^2}{1+\beta^2y^2}.$$

Dies ist eine rein imaginäre Zahl. Der reelle Teil U der Funktion W ist demnach Null, die y-Achse ist eine Niveaukurve.

Druckfertig erklärt 26 V. 1905.]

Winkeltreue Abbildung einer durch zwei auf einander senkrecht stehende geradlinige Schlitze begrenzten Ebene auf ein Rechteck.

Von

J. Thomae.

In seiner Inauguraldissertation „über die winkeltreue Abbildung einer durch zwei geradlinige auf einander senkrecht stehende Schlitze begrenzten Ebene auf ein durch zwei konzentrische Kreise begrenztes Ebenenstück", Jena 1905, hat Herr Bähr einige Fälle einer solchen Abbildung vollständig durchgeführt. Der heuristische Weg führt durch eine Riemannsche vierblättrige Fläche. Das Problem ist gelöst, wenn es gelingt, die aufgerissene Ebene auf ein Rechteck so abzubilden, daß zwei parallelen Seiten des Rechtecks je die beiden Ufer eines Schlitzes entsprechen, während den gegenüberliegenden Punkten der beiden andern Seiten *dieselben* Punkte in der z-Ebene, oder gegenüber liegende Punkte der beiden Ufer einer die beiden Schlitze verbindenden Kurve entsprechen. Es sollen hier ein paar dort nicht durchgeführte Beispiele einer solchen Abbildung gegeben werden. Dabei bediene ich mich der Bezeichnung, die in meiner „Sammlung von Sätzen und Formeln aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen", Leipzig bei Teubner 1905, angewandt ist, und die eingestreuten Nummern beziehen sich auf diese Sammlung.

Es sei p eine positiv reelle Konstante und k, der Modul der elliptischen Funktionen, sei reell und kleiner als Eins. Die Ebene wird mit komplexen Zahlen $z = x + yi$ bedeckt gedacht, und die Bildebene mit komplexen Zahlen $w = u + vi$. Wir untersuchen die durch die Beziehung

$$pz = sa'w = ca\,w\,da\,w \tag{1}$$

gegebene Abbildung. Die Perioden dieser Funktion seien $4K$ und $2iK'$.

Wo verzweigt sich die Funktion z als Funktion von w. Da wo

$$\frac{dpz}{dw} = sa''a = -sa\,a(1 + k^2 - 2k^2\,sa^2 w) \tag{2}$$

verschwindet, also für $w = 0$, $w = 2K$, und für die Werte von w, für die

$$sa^2 w = \frac{1 + k^2}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2} \tag{3}$$

ist. Die rechte Seite ist größer als Eins und kleiner als $1 : k^2$. Demnach wird die Gleichung (3) für Werte von w erfüllt, die in der Form enthalten sind

$$w = \pm K + iv_0, \qquad w = \pm K + 2iK' - iv_0,$$

wo v_0 zwischen 0 und K' liegt. Außerdem verzweigt sich z für $z = \infty$, $w = iK'$ und $w = 2K + iK'$, weil z dort unendlich groß zweiter Ordnung wird.

Für $w = 0$ hat z den Wert $1 : p$, den wir gleich μ setzen, so daß

$$z = \mu\,sa'w \tag{4}$$

die Abbildungsfunktion wird. Lassen wir w monoton von 0 bis K wachsen, so nimmt z von μ bis 0 monoton ab. Setzen wir $w = K + iv$, und lassen v von 0 bis K' wachsen, so ist

$$z = -\mu k'^2\,sa\,iv : da^2\,iv \tag{5}$$

(X 6) rein imaginär. Dieser Ausdruck ist für wachsende v zunächst negativ imaginär und wächst absolut genommen, bis w die Stelle $K + iv_0$ erreicht, wo

$$z = -\frac{k'^2\mu\,sa\,iv_0}{du^2\,iv_0} = -\frac{i\mu k'^2}{2k} = -\frac{i}{\lambda} \tag{6}$$

wird, wenn λ eine Abkürzung bedeutet. Dort ist $dz : dw = 0$, der Bildwinkel in der z-Ebene das Doppelte des Winkels in der w-Ebene. Demnach geht z um den Punkt $-i : \lambda$ herum und nimmt rein imaginär zu, bis z für $v = iK'$, $w = K + iK'$ den Wert Null erreicht. Wächst v weiter, so wächst z rein imaginär bis zu $i : \lambda$, welchen Wert z für $v = 2K' - v_0$, $w = K + 2iK' - iv_0$ annimmt. Dort ist wieder $dz : dw = 0$, und z nimmt, nachdem es den Punkt $i : \lambda$ umkreist hat, rein imaginär ab, um bei $v = 2K'$, $w = K + 2iK'$ wieder den Wert Null zu erlangen. — Führt man w über eine gerade Linie von $K - \varepsilon$ bis $K - \varepsilon + 2iK'$, wo

ε eine kleine positive Zahl ist, so durchläuft s eine der Linie $0 \cdots -i:\lambda \cdots 0 \cdots i:\lambda \cdots 0$, die wir den Schlitz I nennen wollen, nahe benachbarte Schlinge. Wir können deshalb sagen, z durchlaufe die beiden Ufer dieses Schlitzes, wenn w von K bis zu $K + 2iK'$ geradlinig vorrückt. Dabei besteht Winkeltreue von den beiden Stellen $w = K + iv_0$, $z = -i:\lambda$, $w = K + 2iK' - v_0 i$, $z = i:\lambda$ abgesehen, wo die Winkel in der z-Ebene doppelt so groß sind, als in der w-Ebene.

Führt man nun w geradlinig über die Strecke von $K + 2iK'$ bis $2iK'$, so durchläuft z wegen der Periodizität das, wie wir sagen, obere Ufer der Linie von 0 bis μ.

Durchläuft $w = iv$ rein imaginär die Zahlen von 0 bis $2iK'$, so ist $\mu\, ca\, w\, da\, w$ zunächst positiv reell bis zu $v = K'$, z durchläuft das obere Ufer der mit der reellen Achse der z-Ebene zusammenfallenden Linie von μ bis ∞. Geht w in derselben Richtung weiter, so kehrt z um und durchläuft nun das untere Ufer derselben Linie von ∞ bis μ, die wir den Schlitz II nennen wollen, denn es ist $sa'(iK' - vi) = sa'(iK' + vi)$.

Das Rechteck

$$K \cdots K + 2iK' \cdots 2iK' \cdots 0 \cdots K$$

bildet sich also auf die z-Ebene so ab, daß den beiden der imaginären Achse parallelen Seiten bez. die Linien von $-i:\lambda$ bis $i:\lambda$ (Schlitz I) auf der imaginären Achse und von μ bis ∞ (Schlitz II) auf der positiv reellen Achse der z-Ebene entsprechen. Die beiden andern Rechteckseiten aber entsprechen der geraden Strecke von 0 bis μ so, daß gegenüberliegenden Punkten der Rechteckseiten, gegenüberliegende Punkte auf den beiden Ufern dieser Linie entsprechen.

Denkt man sich also die z-Ebene durch die Schlitze I und II, die auf einander senkrecht stehen, aufgerissen, so wird durch die Beziehung

$$z = \mu\, sa'\, w = \mu\, ca\, w\, da\, w \tag{4}$$

die aufgerissene z-Ebene so winkeltreu auf ein Rechteck der w-Ebene abgebildet, wie es unsere Aufgabe vorschreibt.

Es ist nun leicht dies Rechteck, und damit die durch I und II begrenzte z-Ebene auf einen Kreisring etwa in der ζ-Ebene eindeutig winkeltreu abzubilden. Dies geschieht durch die Beziehung

$$\zeta = e^{w\pi:K'}, \qquad w = \frac{1}{\pi} K' \lg \zeta.$$

Die Gerade von 0 bis K der w-Ebene, und ebenso die Gerade von $2iK'$ bis $K + 2iK'$ entspricht in der ζ-Ebene der Geraden von $\zeta = 1$ bis $\zeta = e^{\pi K:K'}$, gegenüberliegenden Punkten dieser Rechteckseiten entsprechen dieselben Punkte ζ. Der geraden Linie von K bis $K + 2iK'$ entspricht ein Kreis mit dem Radius $e^{\pi K:K'}$, der geraden Linie von 0 bis $2iK'$ entspricht in der ζ-Ebene der Einheitskreis. Die durch die Schlitze I und II begrenzte z-Ebene wird durch die Beziehung

$$z = \mu\, sa' \frac{K'}{\pi} \lg \zeta, \tag{7}$$

eineindeutig und winkeltreu auf das Innere eines Kreisringes in der ζ-Ebene abgebildet.

Es erübrigt noch, den Modul k unserer elliptischen Funktion durch die gegebenen Größen λ und μ auszudrücken. Wir fanden unter (6)

$$1 - k^2 = \frac{2k}{\lambda\mu}, \qquad k^2 + \frac{2k}{\lambda\mu} - 1 = 0,$$

und daraus

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \lambda^2\mu^2}}{\lambda\mu}. \tag{8}$$

Das Produkt der beiden Wurzeln ist -1, eine davon und zwar die positive ist reell und kleiner als Eins. — Ist $\lambda = 1 : \mu$, so ist der Modul $\sqrt{2} - 1$.

Durch die Beziehung

$$z = 1 : \mu\, sa'\, w \tag{9}$$

bildet sich das besprochene Rechteck in analoger Weise auf die geradlinig zwischen 0 und μ, und zwischen $i:\lambda \cdots \infty \cdots -i:\lambda$ aufgeschlitzte z-Ebene ab.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Fall, in dem die z-Ebene durch einen Schlitz I längs der positiv imaginären Achse von Null bis Unendlich, und durch den Schlitz II längs der positiv reellen Achse zwischen den Punkten μ und ν aufgerissen ist. Daß es möglich ist, diese begrenzte z-Ebene auf ein Rechteck der w-Ebene, dessen Ecken 0, $\frac{1}{2}K$, $\frac{1}{2}K + 2iK'$, $2iK'$ sind, so abzubilden, daß die Schlitzufer sich bez. auf zwei parallele Seiten des Rechtecks, die gegenüberliegenden Punkte der beiden andern Rechteckseiten aber auf zusammenfallende Punkte der z-Ebene abbilden, ist durch die Untersuchungen des Herrn SCHOTTKY festgestellt. Aus dem Spiegelungsprinzip des Herrn SCHWARZE folgt,

daß die Abbildung durch eine doppelt periodische Funktion vierter Ordnung vermittelt wird, und aus den Darlegungen des Herrn E. Bähr ergibt sich, daß die Beziehung zwischen z und w in der Form enthalten sein muß

$$z = C_1\left(\frac{1}{sa^2(w-K)} - \frac{1}{sa^2 w}\right) + C_2\left(Z_{11}(w-K) - Z_{11}(w)\right) + C_3,$$

worin $C_1 C_2 C_3$ Konstanten sind, die nebst der positiv reellen Jacobischen Größe $q = e^{\pi}$ aus den Daten des Problems zu bestimmen sind. Dem Punkte $w = 0$ entspricht der Punkt $z = \infty$. Die Perioden der elliptischen Funktion z sind $2K$ und $2iK'$.

Setzt man $w = iv$, so ist das erste Glied der rechten Seite rein imaginär, wenn $C_1 = ip$ und p reell ist. Das zweite Glied ist für dieselben w ebenfalls rein imaginär, wenn C_2 reell ist. Soll z für rein imaginäre w rein imaginär sein, wenn p und $C_2 = ep$ reell sind, so muß C_3 rein imaginär sein.

Die Funktion

$$\psi(w) = \frac{1}{sa^2(w-K)} - \frac{1}{sa^2 w} = \frac{da^2 w}{ca^2 w} - \frac{1}{sa^2 w}$$

ist für kleine rein imaginäre Werte von w positiv, und es ist demnach p positiv reell zu nehmen, wenn dort z positiv imaginär sein soll. Die Funktion $\psi(w)$ wechselt ihr Zeichen nicht, wenn v $(w = iv)$ von 0 bis $2K'$ wächst, ist also dort immer positiv reell.

Setzt man $w = \frac{1}{2}K + iv$, so folgt

$$\begin{aligned} z &= ip\left(\frac{1}{sa^2(\frac{1}{2}K - iv)} - \frac{1}{sa^2(\frac{1}{2}K + iv)}\right) \\ &+ ep\left(Z_{11}(iv - \tfrac{1}{2}K) - Z_{11}(iv + \tfrac{1}{2}K)\right) + C_3 \\ &= ip\left(\frac{1}{sa^2(\frac{1}{2}K - iv)} - \frac{1}{sa^2(\frac{1}{2}K + iv)}\right) \\ &- ep\left(Z_{11}(\tfrac{1}{2}K - iv) + Z_{11}(\tfrac{1}{2}K + iv)\right) + C_3. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck soll reell sein, den Schlitz II durchlaufen, deshalb muß $C_3 = 0$ sein. Er soll aber für $v = 0$ positiv reell sein, wo (Tabelle XXIV) $z = -pe(1 + k')$ wird. Es muß demnach e eine negative Zahl sein. Wir ersetzen deshalb e durch $-e$ und erhalten (XXII 3)

$$(10)\quad \frac{z}{p} = i\left(\frac{da^2 w}{ca^2 w} - \frac{1}{sa^2 w}\right) + e\,\frac{da\,w}{sa\,w\,ca\,w} = i\psi(w) + e\varphi(w),$$

$$\varphi(w) = da\,w : sa\,w\,ca\,w.$$

Für das Schlitzende $z = 0$, wo $w = iv_0$ sein mag, muß $dz : dw$ verschwinden. Es muß deshalb

$$e = -i\psi(iv_0) : \varphi(iv_0)$$

sein. Bildet man die Ableitung von (10) und setzt sie gleich Null, so findet man mit Rücksicht darauf, daß v_0 zwischen 0 und $2K'$ liegen muß,

(11) $$v_0 = \tfrac{3}{2}K', \qquad e = 2,$$

sodaß wir die Abbildungsgleichung erhalten

(12) $$\frac{z}{p} = i\left(\frac{da^2 w}{ca^2 w} - \frac{1}{sa^2 w}\right) + \frac{2\,da\,w}{sa\,w\,ca\,w} = i\psi(w) + 2\varphi(w).$$

Es ist nun zu ermitteln, welche Werte von $sa\,w$, $\varphi(w)$, z den Schlitzenden von II entsprechen. In ihnen ist $dz : p\,dw = 0$, woraus folgt:

(13) $$\frac{dz}{2p\,dw} = \frac{i\,da\,w}{sa^2 w\,ca^3 w}(1 - 2\,sa^2 w + (2 - k^2)\,sa^4 w) + \frac{2\,sa^2 w - k^2 sa^4 w - 1}{sa^2 w\,ca^2 w}.$$

Dieser Ausdruck ist von der sechsten Ordnung, soll er verschwinden, so muß

$$da^2 w(1 - 2\,sa^2 w + (2 - k^2)\,sa^4 w)^2 + (2\,sa^2 w - k^2 sa^4 w - 1)^2\,sa^2 w\,ca^2 w$$

verschwinden, oder wenn man $sa^2 w = \zeta$ setzt, so muß

(14) $$0 = g(\zeta) = (1 - k^2\zeta)(1 - 2\zeta + (2 - k^2)\zeta^2)^2 + \zeta(1 - \zeta)(1 - 2\zeta + k^2\zeta^2)^2$$

sein. Dieser Ausdruck verschwindet für $\zeta = \pm 1 : k$, enthält also den Faktor $1 - k^2\zeta^2$, dem kein Wert von w auf der Linie $\frac{1}{2}K$ bis $\frac{1}{2}K + 2iK'$ entspricht, und der deshalb unterdrückt werden kann. Setzt man $g(\zeta) = (1 - k^2\zeta^2)h(\zeta)$, so ergibt sich nach einigen Reduktionen

(15) $$h(\zeta) = (1 - k^2\zeta^2)(1 - k^2\zeta) + \zeta(1 - \zeta)(1 - k^2\zeta^2 - 4(1 - k^2\zeta)) = 1 - (3 + k^2)\zeta + 3(1 + k^2)\zeta^2 + k^2(k^2 - 5)\zeta^3 + k^2\zeta^4.$$

Um die Gleichung $h(\zeta) = 0$ aufzulösen, setzen wir

(16) $$\zeta' = \zeta + \frac{1 - \zeta}{1 - k^2\zeta} = \frac{1 - k^2\zeta^2}{1 - k^2\zeta} = 1 + \frac{k^2\zeta(1 - \zeta)}{1 - k^2\zeta} = 1 + \frac{k^2}{\varphi^2},$$

und schreiben

$$\frac{h(\zeta)}{(1-k^2\zeta)^3} = \frac{1-k^2\zeta^2}{1-k^2\zeta} + \frac{\zeta(1-\zeta)}{1-k^2\zeta}\left(\frac{1-k^2\zeta^2}{1-k^2\zeta} - 4\right) = \zeta' + \frac{\zeta'-1}{k^2}(\zeta'-4),$$

$$\frac{k^2 h(\zeta)}{(1-k^2\zeta)^3} = \zeta'\zeta' - (5-k^2)\zeta' + 4 = \zeta'\zeta' - (4+k'^2)\zeta' + 4.$$

Durch Nullsetzen dieses Ausdruckes ergeben sich für ζ' die beiden Werte

$$(17)\quad \zeta_1', \zeta_2' = \frac{4+k'^2 \pm \sqrt{(4+k'^2)^2-16}}{2} = \frac{4+k'^2 \pm k'\sqrt{8+k'^2}}{2}.$$

Hieraus werden die zugehörigen Werte von ζ mittels einer quadratischen Gleichung gefunden. Löst man sie auf, so ergeben sich vier Werte von ζ und aus (17) die zugehörigen Werte der Ableitung, sodaß vier Werte von w daraus fließen, von denen zwei zum Schlitz II gehören. Für unsern wesentlichen Zweck, die zugehörigen Werte von z zu finden, ist die Auflösung nicht nötig. Es ist nämlich

$$\left(\frac{1-k^2\zeta}{1-\zeta} - \frac{1}{\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1-k^2\zeta}{1-\zeta} + \frac{1}{\zeta}\right)^2 - 4\varphi^2 = \left(\frac{1-k^2\zeta^2}{\zeta(1-\zeta)}\right)^2 - 4\varphi^2$$

$$= \left(\frac{1-k^2\zeta^2}{1-k^2\zeta}\cdot\frac{1-k^2\zeta}{\zeta(1-\zeta)}\right)^2 - 4\varphi^2$$

$$= \zeta'^2\varphi^4 - 4\varphi^2 = \varphi^2(\zeta'^2\varphi^2 - 4),$$

$$\frac{1-k^2\zeta}{1-\zeta} - \frac{1}{\zeta} = \varphi\sqrt{\left(\frac{k^2+\varphi^2}{\varphi^2}\right)^2 - 4} = \frac{1}{\varphi}\sqrt{k^4+2k^2\varphi^2-3\varphi^4},$$

und wenn φ aus (17) bestimmt wird (die Gleichung ist aber auch allgemein richtig),

$$(18)\qquad \frac{z}{p} = \frac{i\sqrt{k^4+2k^2\varphi^2-3\varphi^4}+2\varphi^2}{\varphi}.$$

Die beiden in Betracht kommenden Werte von φ sind positiv reell, das Wurzelzeichen aber ist beidemal so zu bestimmen, daß $z:p$ positiv wird. Nun setzt man für den einen der beiden Werte φ $p = \mu\varphi : (i\sqrt{k^4+2k^2\varphi^2-3\varphi^4}+2\varphi^2)$, damit das eine Schlitzende auf den Punkt p falle. Soll für den andern Wert von φ $z = \nu$ werden, auf das andere Schlitzende fallen, so ergibt sich daraus eine algebraische Gleichung für k. Sie muß eine Wurzel kleiner als Eins besitzen, sie ist zu wählen. Damit ist das Problem gelöst. Zwischen φ und z besteht die Gleichung

$$(19)\qquad \varphi^4 - 4\varphi^3\frac{z}{p} + 2k^2\varphi^2 + \frac{z^2}{p^2}\varphi^2 + k^4 = 0.$$

Es ist φ eine wie eine vierblättrige Riemannsche Fläche verzweigte Funktion, deren überall endliches Integral dem Problem entspricht.

Liegen die beiden Schlitze, statt senkrecht aufeinander zu stehen, in gerader Linie, so ist die betreffende Abbildungsaufgabe bereits von Herrn Bennecke in Weierstrassschen Funktionen gelöst. Da mir die Lösung in den Jacobischen Funktionen durchsichtiger zu sein scheint, so mag noch ein solcher Fall, auf den der allgemeine immer reduziert werden kann, hier Platz finden. Es sei

$$z = tga^2 w. \tag{20}$$

Führt man w von 0 bis K reell vorwärts, so wächst z kontinuierlich von 0 bis ∞. Führt man w weiter von K bis $2K$, so nimmt z wieder bis zu Null ab. Es durchläuft z die beiden Ufer des Schlitzes II, der von 0 reell nach ∞ führt, kontinuierlich. Setzt man $w = u + iK'$, so ist (X 14)

$$z = tga^2(iK' + u) = -1 : da^2 u.$$

Für $u = 0$, $w = iK'$ ist $z = -1$, für $u = K$, $w = K + iK'$ ist $z = -1 : k'^2$, es durchläuft z, wenn u die Werte von 0 bis $2K$ durchführt, die beiden Ufer des Schlitzes II zwischen -1 und $-1 : k'^2$ kontinuierlich. Führt man w von 0 an rein imaginär bis iK', so durchläuft z die Strecke von 0 bis -1, und führt man w über die gegenüberliegende Linie von $2K$ bis $2K + iK'$, so durchläuft z dieselbe Linie. Es wird also durch die Beziehung (20) die durch die Schlitze I und II aufgerissene z-Ebene in der Weise, wie es das Problem erfordert, auf das Rechteck $0 \ldots 2K \ldots 2K + iK' \ldots iK' \ldots 0$ winkeltreu abgebildet. Das Rechteck läßt sich leicht auf einen Kreisring abbilden.

Druckfertig erklärt 5. VI. 1905.]

Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation.

Von

W. Scheibner.

1.

Meiner Arbeit über die Theorie der linearen Transformationen habe ich einige Anwendungen der algebraischen Invariantentheorie folgen lassen und dabei namentlich von der *typischen* Gleichung Hermite's für

$$z = \frac{f}{x-y} = f_1, \quad f = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} \ldots, \quad f_1 = \frac{1}{m} f' x,$$

während

$$fy = a_0 \prod_{k=0}^{m-1} (y - x_k) = 0,$$

Gebrauch gemacht. In den *Comptes rendus* vom 24. Mai 1858 nun hat Hermite an den Ausdruck

$$z = \eta_1 x^{m-2} + \eta_2 x^{m-3} \cdots + \eta_{m-2} x + \eta_{m-1},$$

wo

$$\eta_i(y) = a_0 y^i + \widehat{m}_1 a_1 y^{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} y + \widehat{m-1}_{i-1} a_i,$$

die wichtige Bemerkung geknüpft, daß wenn

$$g\binom{m-2}{x} = b_0 x^{m-2} + \widehat{m-2}_1 b_1 x^{m-3} + \widehat{m-2}_2 b_2 x^{m-4} \cdots + b_{m-2}$$

gesetzt wird, die in den Koeffizienten a und b bilineare Tschirnhaus-Transformation

$$w = b_0 \eta_{m-1} - b_1 \eta_{m-2} + b_2 \eta_{m-3} \cdots + (-1)^m b_{m-2} \eta_1 = \varphi\binom{m-1}{y},$$

angewandt auf die Gleichung $fy = 0$, zu einer Gleichung $m$ten Grades von der Form führt:

$$w^m + \widehat{m}_2 c_2 w^{m-2} + \widehat{m}_3 c_3 w^{m-3} \cdots + c_m = \psi(w) = 0,$$

deren Koeffizienten *simultane Invarianten* von f und g sind, während der Koeffizient von w^{m-1} verschwindet.

In der Tat erhält man vermöge der NEWTON'schen Formeln

$$\sum_k \eta_i(x_k) = a_0 s_i + \widehat{m}_1 a_1 s_{i-1} \cdots \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} s_1 + \widehat{m-1}_{i-1} a_i s_0 = 0,$$

und damit $\sum w_k = 0$, wenn die Summe auf die Wurzeln x_k ausgedehnt wird. Es bleibt dann zu zeigen, daß, wenn infolge linearer Transformation für

$$\varrho = \delta_2 \xi + \delta_3, \quad \varrho y = \delta \xi + \delta_1, \quad \varepsilon = (\delta_2 \xi + \delta_3)(\delta - \delta_2 y) = \delta \delta_3 - \delta_1 \delta_2,$$

$$\varrho^m f(y a) = f(\xi \alpha) \quad \text{und} \quad \varrho^{m-2} g(y b) = g(\xi \beta),$$

gesetzt wird, auch

$$\varepsilon^{m-1} w(y a b) = w(\xi \alpha \beta)$$

sein muß.[1])

Man kann dabei von dem Falle $w = z$ oder $b_i = (-x)^i$ ausgehen, wodurch

$$g(y b) = (y - x)^{m-2}$$

und

$$\beta_i = (\delta_1 - \delta_3 x)^i (\delta - \delta_2 x)^{m-i-2} = b_0 \delta^{m-i-2} \delta_1^i + \cdots + b_{m-2} \delta_2^{m-i-2} \delta_3^i$$

oder nach Art. 4 S. 210 der *Berichte* vom 6. Juli 1903

$$\varepsilon^{m-2} b_i = (-1)^i \{ \beta_0 \delta_1^i \delta_3^{m-i-2} \mp \cdots + (-1)^m \beta_{m-2} \delta^i \delta_2^{m-i-2} \}$$

wird, während die Gleichung $\psi(w) = 0$ einfach mit der typischen Gleichung zusammenfällt, deren Koeffizienten Kovarianten von f sind. Die Funktion

$$\varphi(y a b) = w = b_0 \eta_{m-1} - b_1 \eta_{m-2} \pm \cdots$$

hat die Eigenschaft, für $b_i = (-x)^i$ überzugehen in

$$z = \frac{f(x a)}{x - y} - f_1(x a).$$

Bildet man nun für $\eta_i(\xi \alpha) = \eta_i'$ den entsprechenden Ausdruck

$$\varphi(\xi \alpha b') = w' = b_0' \eta_{m-1}' - b_1' \eta_{m-2}' \pm \cdots$$

und schreibt

$$x' = \frac{\delta_3 x - \delta_1}{\delta - \delta_2 x} \quad \text{oder} \quad x = \frac{\delta x' + \delta_1}{\delta_2 x' + \delta_3},$$

so reduziert sich w' für $b_i' = (-x')^i$ auf

$$z' = \frac{f(x' \alpha)}{x' - \xi} - f_1(x' \alpha) = \varepsilon (\delta_2 x' + \delta_3)^{m-2} \left\{ \frac{f(x a)}{x - y} - f_1(x a) \right\}$$

$$= \varepsilon (\delta_2 x' + \delta_3)^{m-2} z = \frac{\varepsilon^{m-1}}{(\delta - \delta_2 x)^{m-2}} z,$$

---

1) WEBER, *Algebra* Bd. I, § 69 (75); vergl. auch CAYLEY's *Notes on* TSCHIRNHAUSEN's *Transformation* (*Math. Papers* IV, Nr. 273—275).

wie sich leicht ergibt wegen

$$f(x'\alpha) = (\delta_2 x' + \delta_3)^m f(x\alpha),$$

$$f_1(x'\alpha) = \delta_2(\delta_2 x' + \delta_3)^{m-1} f(x\alpha) + \varepsilon(\delta_2 x' + \delta_3)^{m-2} f_1(x\alpha).$$

Die gefundene Gleichung

$$(\delta - \delta_2 x)^{m-2}(\eta_1' x'^{m-2} + \eta_2' x'^{m-3} + \cdot\cdot) = \varepsilon^{m-1}(\eta_1 x^{m-2} + \eta_2 x^{m-3} + \cdot\cdot)$$

wird identisch vermöge der zwischen x und x' aufgestellten Beziehung, und da es sich hier nur um *lineare* Relationen zwischen den Koeffizienten b_i und b_i' handelt, so darf man in den identischen Gleichungen die Werte $(-x)^i = b_i$ und $(-x')^i = b_i'$ einführen. Dadurch erhält man zunächst

$$(\delta - \delta_2 x)^{m-2} b_i' = (\delta_1 - \delta_3 x)^i (\delta - \delta_2 x)^{m-i-2} = \beta_i$$

und weiter

$$(\delta - \delta_2 x)^{m-2} \varphi(\xi\alpha b') = \varphi(\xi\alpha\beta) = \varepsilon^{m-1}\varphi(y a b)$$

oder

$$\varepsilon^{m-1} w(x_k a b) = w(\xi_k \alpha\beta).$$

Da nun die Koeffizienten c_i in ψ durch homogene Funktionen der Potenzsummen $\sum_k w_k^i = \sigma_i$ ausgedrückt werden, so folgt aus

$$\varepsilon^{i(m-1)} \sum_k w_k^i(y a b) = \sum_k w_k^i(\xi\alpha\beta),$$

$$\varepsilon^{i(m-1)} c_i(a b) = c_i(\alpha\beta),$$

d. h. c_i ist eine simultane Invariante der Funktionen f und g von den Dimensionen $\mu = \nu = i$ und dem Gewicht $i(m-1)$. Zugleich läßt sich für

$$\sigma = \delta - \delta_2 y, \quad \sigma\xi = \delta_3 y - \delta_1$$

die identische Gleichung bilden:

$$\varepsilon^{m-1}(\delta - \delta_2 y)^{m-1} w(y a b) = f \cdot v + \sigma^{m-1} w(\xi\alpha\beta),$$

wo $v\binom{m-2}{y}$ auf den $m-2$ten Grad steigt und das Produkt $f \cdot v$ für $x = x_k$ verschwindet.

2.

Dem Ausdruck für w kann man verschiedene Formen geben. Die Gleichung $w = \varphi\binom{m-1}{y}$ z. B. liefert für $y = x_k$, $k = 0, 1 \ldots m-1$:

$$w_k = \gamma_0 x_k^{m-1} + \gamma_1 x_k^{m-2} + \gamma_2 x_k^{m-3} \cdots + \gamma_{m-1},$$

und hier lassen sich die Koeffizienten γ_i durch die zusammengehörigen Werte x_k und w_k ausdrücken. Man erhält[1])

$$\gamma_i = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_0 x_k^i + \widehat{m}_1 a_1 x_k^{i-1} \cdots + \widehat{m}_i a_i}{f_r(x_k)} w_k$$

und verifiziert damit ohne Schwierigkeit für $y = x_k$ die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i y^{m-i-1} = w .$$

Die TSCHIRNHAUS-Transformation $w = (m - \mapsto) f_r(y)$ führt direkt zur typischen Gleichung für $x = x_k$.

Übrigens ist es nicht schwer, die Gleichung für ψw in der Form einer Determinante $m$ter Ordnung zu entwickeln, wenn man für $i = 1, 2 \ldots m-1$ die Produkte berechnet (WEBER, *Algebra* I, § 72/78):

$$w \cdot \eta_i = \delta_0^{(i)} \eta_{m-1} + \delta_1^{(i)} \eta_{m-2} + \delta_2^{(i)} \eta_{m-3} \cdots + \delta_{m-2}^{(i)} \eta_1 - \varrho_i ,$$

wozu für $i = 0$ und $\delta_k = (-1)^k b_k$ die Gleichung tritt

$$w = \delta_0 \eta_{m-1} + \delta_1 \eta_{m-2} + \delta_2 \eta_{m-3} \cdots + \delta_{m-2} \eta_1 .$$

Dann ergibt die Elimination der Größen $\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{m-1}$:

$$\pm \psi w = \begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots \delta_{m-3} & \delta_{m-2} & w \\ \delta_0' & \delta_1' & \delta_2' & \cdots \delta_{m-3}' & \delta_{m-2}' - w & \varrho_1 \\ \delta_0'' & \delta_1'' & \delta_2'' & \cdots \delta_{m-3}'' - w & \delta_{m-2}'' & \varrho_2 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ \delta_0^{(m-2)} & \delta_1^{(m-2)} - w & \delta_2^{(m-2)} & \cdots \delta_{m-3}^{(m-2)} & \delta_{m-2}^{(m-2)} & \varrho_{m-2} \\ \delta_0^{(m-1)} - w & \delta_1^{(m-1)} & \delta_2^{(m-1)} & \cdots \delta_{m-3}^{(m-1)} & \delta_{m-2}^{(m-1)} & \varrho_{m-1} \end{vmatrix} .$$

Hier sind noch die Koeffizienten $\delta_k^{(i)}$ und ϱ_i zu bilden. Dies kann geschehen, indem man mittels des Gleichungensystems

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_0 y + a_1 , \\ \eta_2 &= y \eta_1 + \widehat{m-1}_1 (a_1 y + a_2) , \\ \eta_3 &= y \eta_2 + \widehat{m-1}_2 (a_2 y + a_3) , \\ &\cdots \\ \eta_{i+1} &= y \eta_i + \widehat{m-1}_i (a_i y + a_{i+1}) , \\ &\cdots \\ \eta_{m-1} &= y \eta_{m-2} + \widehat{m-1}_1 (a_{m-2} y + a_{m-1}) , \end{aligned}$$

1) Vergl. z. B. BALTZER's *Determinanten* § 10, 11.

...ffizientengleichungen

$$\begin{aligned}
&\delta_{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \delta_1 + \widehat{m-1}_{i-1} a_i \delta_0,\\
&{}_1 a_1 \delta_i \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \delta_2 + \widehat{m-1}_{i-1} a_i \delta_1,\\
&\qquad \cdots\\
&\cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \delta_{m-1} + \widehat{m-1}_{i-1} a_i \delta_{m-2},
\end{aligned}$$

$$\varrho^{(i)} + \widehat{m}_1 a_1 \varrho^{(i-1)} \cdots + \widehat{m}_{i-1} a_{i-1} \varrho'.$$

$m-1$ lassen sich die Werte von $\delta_k^{(i)}$ durch ...ilfsgrößen $\delta_{m-1}\delta_m\delta_{m+1}\cdots$ vereinfachen. Man

$$\begin{aligned}
&a_i \delta_{m-i} - \widehat{m}_{i+1} a_{i+1} \delta_{m-i-1} \cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_1 - a_m \delta_0,\\
&{}_1 a_i \delta_{m-i+1} - \widehat{m}_{i+1} a_{i+1} \delta_{m-i} \cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_2 - a_m \delta_1,\\
&\qquad \cdots\\
&{}_1 a_i \delta_{m-2} - \widehat{m}_{i+1} a_{i+1} \delta_{m-3} \cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1} \delta_{i-1} - a_m \delta_{i-2}.
\end{aligned}$$

... die in der Diagonale stehenden Elemente $\delta^{(i)}_{m-i-1}$ ...ei der Elimination von δ_{m-1} ohne Nenner, so daß ... $= 1$ die Koeffizienten c_k in ψw *ganze* Funktionen von ...rden.

4.

... wollen jetzt noch die Ausdrücke für die Potenzen von ...chen und schreiben

$$w^i = \varepsilon_0^{(i)} \eta_{m-1} + \varepsilon_1^{(i)} \eta_{m-2} \cdots + \varepsilon_{m-2}^{(i)} \eta_1 + \frac{1}{m} \sigma_i.$$

...rgibt die Multiplikation durch w:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0^{(i+1)} &= \delta_0^{(m-1)} \varepsilon_0^{(i)} + \delta_0^{(m-2)} \varepsilon_1^{(i)} \cdots + \delta_0' \varepsilon_{m-2}^{(i)},\\
\varepsilon_1^{(i+1)} &= \delta_1^{(m-1)} \varepsilon_0^{(i)} + \delta_1^{(m-2)} \varepsilon_1^{(i)} \cdots + \delta_1' \varepsilon_{m-2}^{(i)},\\
&\qquad \cdots\\
\varepsilon_{m-2}^{(i+1)} &= \delta_{m-2}^{(m-1)} \varepsilon_0^{(i)} + \delta_{m-2}^{(m-2)} \varepsilon_1^{(i)} \cdots + \delta_{m-2}' \varepsilon_{m-2}^{(i)},\\
-\frac{1}{m} \sigma_{i+1} &= \varrho_1 \varepsilon_{m-2}^{(i)} + \varrho_2 \varepsilon_{m-3}^{(i)} \cdots + \varrho_{m-1} \varepsilon_0^{(i)}.
\end{aligned}$$

Als Beispiel berechnen wir für $m = 5$, $i = 1$ den Wert von σ_2. Man hat

Setzt man nun

$$\begin{aligned} w\eta_{i+1} &= \delta_0^{(i+1)}\eta_{m-1} + \delta_1^{(i+1)}\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}^{(i+1)}\eta_1 - \varrho_{i+1} \\ &= yw\eta_i + \widehat{m-1}_i a_i yw + \widehat{m-1}_i a_{i+1} w \\ &= \delta_1^{(i)}\eta_{m-1} + \delta_2^{(i)}\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-1}^{(i)}\eta_1 - \varrho_i' + \\ &\quad + \widehat{m-1}_i a_i(\delta_1\eta_{m-1} + \delta_2\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-1}\eta_1 - \varrho') + \\ &\quad + \widehat{m-1}_i a_{i+1}(\delta_0\eta_{m-1} + \delta_1\eta_{m-2} \cdots + \delta_{m-2}\eta_1), \end{aligned}$$

so ergeben sich die Relationen:

$$\begin{aligned} \delta_0^{(i+1)} &= \delta_1^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_1 + \widehat{m-1}_i a_{i+1}\delta_0, \\ \delta_1^{(i+1)} &= \delta_2^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_2 + \widehat{m-1}_i a_{i+1}\delta_1, \\ &\cdots \\ \delta_{m-2}^{(i+1)} &= \delta_{m-1}^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-1} + \widehat{m-1}_i a_{i+1}\delta_{m-2}, \\ \varrho_{i+1} &= \varrho_i' + \widehat{m-1}_i a_i\varrho'. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß auch $\delta_{m-1}^{(i)} + \widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-1}$ keinen Nenner hat, das Gleiche gilt dann von selbst für $\varrho_i' + \widehat{m-1}_i a_i\varrho'$. Die entwickelten Relationen reichen aus, um die Koeffizienten $\delta_k^{(i)}$, also die Elemente der Determinante für ψw, als bilineare Funktionen der a und b auszudrücken, während ϱ_i in Bezug auf a auf die zweite Dimension steigt.

3.

Man kann indessen noch einen anderen Weg zur Bestimmung der $\delta_k^{(i)}$ einschlagen, wenn man die sukzessiven Produkte bildet

$$y^l w = \delta_l\eta_{m-1} + \delta_{l+1}\eta_{m-2} \cdots + \delta_{l+m-2}\eta_1 - \varrho^{(l)},$$

wo die Hilfsgrößen $\delta_m\delta_{m+1}\delta_{m+2}\cdots$ für $l > 1$ durch die Gleichungen gegeben sind:

$$0 = a_0\delta_{l+m-2} + \widehat{m}_1 a_1\delta_{l+m-3} + \widehat{m}_2 a_2\delta_{l+m-4} \cdots + \widehat{m}_1 a_{m-1}\delta_{l-1} + a_m\delta_{l-2},$$

während

$$\varrho^{(l)} = a_1\delta_{l+m-2} + \widehat{m-1}_1 a_2\delta_{l+m-3} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-1}\delta_l + a_m\delta_{l-1}.$$

Summiert man dann

$$\begin{aligned} w\eta_i &= \widehat{m-1}_{i-1} a_i w + \sum_{l=1}^{i} \widehat{m}_{i-l} a_{i-l} y^l w \\ &= \widehat{m-1}_{i-1} a_i(\delta_0\eta_{m-1} \cdots + \delta_{m-2}\eta_1) + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{i} \widehat{m}_{i-l} a_{i-l}\{\delta_l\eta_{m-1} \cdots + \delta_{l+m-2}\eta_1 - \varrho^{(l)}\}, \end{aligned}$$

so ergeben sich die Koeffizientengleichungen

$$\delta_0^{(i)} = a_0\delta_i + \widehat{m}_1 a_1\delta_{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1}a_{i-1}\delta_1 + \widehat{m-1}_{i-1}a_i\delta_0,$$
$$\delta_1^{(i)} = a_0\delta_{i+1} + \widehat{m}_1 a_1\delta_i \cdots + \widehat{m}_{i-1}a_{i-1}\delta_2 + \widehat{m-1}_{i-1}a_i\delta_1,$$
$$\cdots$$
$$\delta_{m-2}^{(i)} = a_0\delta_{i+m-2} + \cdots + \widehat{m}_{i-1}a_{i-1}\delta_{m-1} + \widehat{m-1}_{i-1}a_i\delta_{m-2},$$

nebst

$$\varrho_i = a_0\varrho^{(i)} + \widehat{m}_1 a_1\varrho^{(i-1)} \cdots + \widehat{m}_{i-1}a_{i-1}\varrho'.$$

Für $i+k > m-1$ lassen sich die Werte von $\delta_k^{(i)}$ durch Elimination der Hilfsgrößen $\delta_{m-1}\delta_m\delta_{m+1}\cdots$ vereinfachen. Man erhält leicht

$$\delta_{m-i}^{(i)} = -\widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-i} - \widehat{m}_{i+1}a_{i+1}\delta_{m-i-1}\cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1}\delta_1 - a_m\delta_0,$$
$$\delta_{m-i+1}^{(i)} = -\widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-i+1} - \widehat{m}_{i+1}a_{i+1}\delta_{m-i}\cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1}\delta_2 - a_m\delta_1,$$
$$\cdots$$
$$\delta_{m-2}^{(i)} = -\widehat{m-1}_i a_i\delta_{m-2} - \widehat{m}_{i+1}a_{i+1}\delta_{m-3}\cdots - \widehat{m}_1 a_{m-1}\delta_{i-1} - a_m\delta_{i-2}.$$

Hier bleiben die in der Diagonale stehenden Elemente $\delta_{m-i-1}^{(i)}$ wie die ϱ_i bei der Elimination von δ_{m-1} ohne Nenner, so daß auch für $c_0 = 1$ die Koeffizienten c_k in ψw *ganze* Funktionen von a und b werden.

4.

Wir wollen jetzt noch die Ausdrücke für die Potenzen von w untersuchen und schreiben

$$w^i = \varepsilon_0^{(i)}\eta_{m-1} + \varepsilon_1^{(i)}\eta_{m-2}\cdots + \varepsilon_{m-2}^{(i)}\eta_1 + \frac{1}{m}\sigma_i.$$

Dann ergibt die Multiplikation durch w:

$$\varepsilon_0^{(i+1)} = \delta_0^{(m-1)}\varepsilon_0^{(i)} + \delta_0^{(m-2)}\varepsilon_1^{(i)}\cdots + \delta_0'\varepsilon_{m-2}^{(i)},$$
$$\varepsilon_1^{(i+1)} = \delta_1^{(m-1)}\varepsilon_0^{(i)} + \delta_1^{(m-2)}\varepsilon_1^{(i)}\cdots + \delta_1'\varepsilon_{m-2}^{(i)},$$
$$\cdots$$
$$\varepsilon_{m-2}^{(i+1)} = \delta_{m-2}^{(m-1)}\varepsilon_0^{(i)} + \delta_{m-2}^{(m-2)}\varepsilon_1^{(i)}\cdots + \delta_{m-2}'\varepsilon_{m-2}^{(i)},$$
$$-\frac{1}{m}\sigma_{i+1} = \varrho_1\varepsilon_{m-2}^{(i)} + \varrho_2\varepsilon_{m-3}^{(i)}\cdots + \varrho_{m-1}\varepsilon_0^{(i)}.$$

Als Beispiel berechnen wir für $m=5$, $i=1$ den Wert von σ_2. Man hat

$$-\tfrac{1}{5}\sigma_2 = \varrho_1\varepsilon_3' + \varrho_2\varepsilon_2' + \varrho_3\varepsilon_1' + \varrho_4\varepsilon_0' = b_0\varrho_4 - b_1\varrho_3 + b_2\varrho_2 - b_3\varrho_1,$$

$$\varrho_1 = a_0\varrho', \qquad \varrho_2 = a_0\varrho'' + 5a_1\varrho',$$

$$\varrho_3 = a_0\varrho''' + 5a_1\varrho'' + 10a_2\varrho',$$

$$\varrho_4 = a_0\varrho^{IV} + 5a_1\varrho''' + 10a_2\varrho'' + 10a_3\varrho',$$

$$\varrho' = a_1\delta_4 + 4a_2\delta_3 + 6a_3\delta_2 + 4a_4\delta_1 + a_5\delta_0,$$

$$\varrho'' = a_1\delta_5 + 4a_2\delta_4 + 6a_3\delta_3 + 4a_4\delta_2 + a_5\delta_1,$$

$$\varrho''' = a_1\delta_6 + 4a_2\delta_5 + 6a_3\delta_4 + 4a_4\delta_3 + a_5\delta_2,$$

$$\varrho^{IV} = a_1\delta_7 + 4a_2\delta_6 + 6a_3\delta_5 + 4a_4\delta_4 + a_5\delta_3,$$

und wenn man die Koeffizienten δ_i eliminiert:

$$\varrho_1 = b_0(03) - 4b_1(13) + 6b_2(23) - 4b_3(33),$$

$$\varrho_2 = 4b_0(02) - b_1(12) + 4b_2(22) - 6b_3(23),$$

$$\varrho_3 = 6b_0(01) - 4b_1(11) + b_2(12) - 4b_3(13),$$

$$\varrho_4 = 4b_0(00) - 6b_1(01) + 4b_2(02) - b_3(03).$$

Damit geht der gesuchte Wert hervor:

$$-\tfrac{1}{5}\sigma_2 = 4c_2 = 4(00)b_0^2 - 12(01)b_0b_1 + 8(02)b_0b_2 - 2(03)b_0b_3 +$$
$$+ 4(11)b_1^2 - 2(12)b_1b_2 + 8(13)b_1b_3 + 4(22)b_2^2 - 12(23)b_2b_3 + 4(33)b_3^2,$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist:

$$(00) = a_3a_5 - a_4^2, \qquad (01) = a_2a_5 - a_3a_4,$$

$$(02) = a_1a_5 - a_2a_4, \qquad (03) = a_0a_5 - a_1a_4,$$

$$(11) = a_1a_5 + 5a_2a_4 - 6a_3^2, \qquad (12) = a_0a_5 + 15a_1a_4 - 16a_2a_3,$$

$$(13) = a_0a_4 - a_1a_3, \qquad (22) = a_0a_4 + 5a_1a_3 - 6a_2^2,$$

$$(23) = a_0a_3 - a_1a_2, \qquad (33) = a_0a_2 - a_1^2,$$

5.

Für $a_0 = b_0 = A$, $a_1 = b_1 = B$, $a_2 = b_2 = C$,
$a_3 = b_3 = D$, $a_4 = E$, $a_5 = F$

oder $g = f_{II}$ erhält man

$$2c_2 = A^2DF - 2A^2E^2 - 3ABCF + 11ABDE - 2AC^2E -$$
$$- 4ACD^2 + 2B^3F - 5B^2CE - 18B^2D^2 + 32BC^2D - 12C^4.$$

Immerhin ist die direkte Berechnung von $\psi(w)$ resp. den Koeffizienten c_i schon für kleine Werte von m recht weitläufig, wie man bei Cayley (Crelle's *Journal* Bd. 58, S. 259—69 und *Philosoph. Transact.* 1861, S. 561—78) nachsehen kann.

Seite 315 des vorigen Jahrgangs dieser Berichte ist für die Cayley'sche Funktion $w = \varphi\left(\frac{4}{x}\right)$ die zugehörige Gleichung

$$\psi w = w^5 + 5Gw^4 + 10c_2w^3 + 10c_3w^2 + 5c_4w + c_5$$

untersucht. Um die Hermite'sche Form herbeizuführen, ist das Glied $5Gw^4$ zu entfernen. Dies geschieht durch die bemerkenswerte Substitution:

$$\begin{aligned}\omega = \tfrac{1}{2}(w + G) = b_0\eta_4 - b_1\eta_3 + b_2\eta_2 - b_3\eta_1 &= Af_{,} - 5g_{\mathrm{IV}} + 2G^{1})\\ &= A(Ax^4 + 5Bx^3 + 10Cx^2 + 10Dx + 4E) -\\ &- B(Ax^3 + 5Bx^2 + 10Cx + 6D) +\\ &+ C(Ax^2 + 5Bx + 4C) - D(Ax + B),\end{aligned}$$

welche der Gleichung entspricht

$$\omega^5 + 10\gamma_2\omega^3 + 10\gamma_3\omega^2 + 5\gamma_4\omega + \gamma_5 = 0.$$

Der Koeffizient $2\gamma_2$ erhält dann den oben angeführten Wert von $2c_2$. Für $B = D = 0$ wird

$$\gamma_2 = -(A^2E^2 + AC^2E + 6C^4),$$

und dieser Wert ist mit dem a. a. O. S. 317 entwickelten Ausdruck von c_2 durch die Gleichung $c_2 = 4\gamma_2 + G^2$ verbunden.

Wir erinnern hier noch an die gleichfalls auf Hermite zurückzuführende[2]) Benutzung des Ausdruckes

$$w = b_0\eta_{m-1} - b_1\eta_{m-2} \pm \cdots + (-1)^m b_{m-2}\eta_1,$$

als *erzeugender* Funktion zur Bestimmung der Anzahl der innerhalb gegebener Grenzen enthaltenen reellen Wurzeln der Gleichung $fy = 0$. Bildet man nämlich für einen reellen Wert r, als quadratische Form der reellen Koeffizienten b_i die Summe

$$\sum_k (x_k - r)w_k^2,$$

1) Siehe a. a. O. S. 150: $g = A_1x^6 + 6B_1x^5 + 15C_1x^4 + \cdots$

2) *Comptes rendus* 1853 I, vergl. Borchardt in Crelle's *Journal* Bd. 53, S. 281.

so ist vermöge des sogen. JACOBI-SYLVESTER'schen Trägheitsgesetzes die Zahl der positiven (p) und der negativen Glieder (n) der Summe unabhängig von der Wahl der b, resp. der Funktion g, sodaß die Zerfällung $m = n + p$ nur noch durch r und f bestimmt wird. Dabei ist zu beachten, daß wegen $\mathrm{S}\, w_k = 0$ die m linearen Aggregate w_k nur von $m - 1$ Größen b_i abhängen. Da x_k und w_k gleichzeitig reell und komplex werden, so ist im *ersten* Falle das Glied $(x_k - r) w_k^2$ positiv für $x_k > r$, negativ für $x_k < r$, während im *zweiten* Falle zwei konjugierte Wurzeln x_k und $x_{k'}$ ein positives und ein negatives Glied geben. Daraus folgt, daß die Zahl p zusammengesetzt ist aus der Zahl der komplexen Wurzelpaare und der Zahl der reellen Wurzeln $> r$. Will man daher die Zahl der reellen Wurzeln zwischen r und $r' > r$ berechnen, so hat man einfach die Differenz $p - p'$ zu untersuchen.

6.

Will man sich zur Entwickelung von ψw der sukzessiven Elimination bedienen, so kann man dabei von verschiedenen Ausdrücken ausgehen. Die Gleichungen

$$w^i = \varepsilon_0^{(i)} \eta_{m-1} + \varepsilon_1^{(i)} \eta_{m-2} \cdots + \varepsilon_{m-2}^{(i)} \eta_1 + \varepsilon_{m-1}^{(i)}$$

für $i = 1, 2 \ldots l$ ergeben nach Elimination von $\eta_{m-1} \eta_{m-2} \cdots \eta_{m-l+1}$ oder $y^{m-1} y^{m-2} \ldots y^{m-l+1}$:

$$c w^l + c' w^{l-1} + c'' w^{l-2} \cdots + c^{(l-1)} w = \varepsilon \eta_{m-l} + \varepsilon' \eta_{m-l-1} \cdots +$$
$$+ \varepsilon^{(m-l+1)} \eta_1 + \varepsilon^{(m-l)} = \gamma y^{m-l} + \gamma' y^{m-l-1} \ldots + \gamma^{(m-l-1)} y + \gamma^{(m-l)}.$$

Jede solche Gleichung kann zur Elimination von y aus $fy = 0$ verwandt werden und enthält m *willkürliche* Koeffizienten c und γ, weil nur die gegenseitigen Verhältnisse derselben in Betracht kommen. Das Gleiche gilt für Ausdrücke von der Form

$$(a y^l + a' y^{l-1} \cdots + a^{(l)}) w = \alpha y^{m-l-1} + \alpha' y^{m-l-2} \ldots + \alpha^{(m-l-1)}$$

oder

$$(b \eta_l + b' \eta_{l-1} \cdots + b^{(l)}) w = \beta \eta_{m-l-1} + \beta' \eta_{m-l-2} \cdots + \beta^{(m-l-1)},$$

wo wiederum die Größen $a\alpha$ oder $b\beta$ die Stelle von m willkürlichen Konstanten vertreten. Für besondere Zwecke können noch andere Formen vorteilhaft sein, wie GORDAN und KIEPERT für $m = 5$ bei der Reduktion anf die BRIOSCHI'sche Resolvente gezeigt haben.

Vermöge der gegenseitigen Zusammengehörigkeit der Wurzeln x_k und w_k der Gleichungen $fy = 0$ und $\psi w = 0$ hat man nicht allein $w = \varphi(\overset{m-1}{y})$, sondern auch $y = \Phi(\overset{m-1}{w})$, sodaß durch Elimination von y aus $f = 0$ und $w = \varphi$ die Gleichung $\psi = 0$, und durch Elimination von w aus $\psi = 0$ und $y = \Phi$ die Gleichung $f = 0$ erhalten wird. Zugleich erhellt, daß für

$$\psi = c_0 w^m + \widehat{m}_1 c_1 w^{m-1} + \widehat{m}_2 c_2 w^{m-2} \cdots + c_m$$

und

$$\zeta_i(w) = c_0 w^i + \widehat{m}_1 c_1 w^{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1} c_{i-1} w + \widehat{m-1}_{i-1} c_i,$$

$$\Phi = b_0' \zeta_{m-1} - b_1' \zeta_{m-2} \cdots + (-1)^m b_{m-2}' \zeta_1 - \frac{a_1}{a_0}$$

gesetzt werden kann. Dann wird

$$\mathrm{S}\,\Phi(w_k) = \mathrm{S}\,x_k = -m\frac{a_1}{a_0} = b_0' \mathrm{S}\,\zeta_{m-1}(w_k) - b_1' \mathrm{S}\,\zeta_{m-2}(w_k) \pm \cdots - m\frac{a_1}{a_0},$$

wo

$$\mathrm{S}\,\zeta_i(w_k) = c_0 \sigma_i + \widehat{m}_1 c_1 \sigma_{i-1} \cdots + \widehat{m}_{i-1} c_{i-1} \sigma_1 + \widehat{m-1}_{i-1} c_i \sigma_0.$$

Die Gleichungen für $y = \Phi(w)$ und $w = \varphi(y)$ aber nehmen die Formen an

$$\zeta_1 = b_0 \eta_{m-1} - b_1 \eta_{m-2} \cdots + (-1)^m b_{m-2} \eta_1,$$

$$\eta_1 = b_0' \zeta_{m-1} - b_1' \zeta_{m-2} \cdots + (-1)^m b_{m-2}' \zeta_1,$$

weil $\underset{k}{\mathrm{S}}\,\eta_i(x_k)$ und $\underset{k}{\mathrm{S}}\,\zeta_i(w_k)$ gleichzeitig verschwinden.

7.

Wir wollen nun nicht allein $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, also $\zeta_1 = w$, sondern auch $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ oder $\eta_1 = y$ annehmen, sodaß $\mathrm{S}\,w_k = \sigma_1$ und $\mathrm{S}\,x_k = s_1$ gleichzeitig verschwinden. Überhaupt werden wir uns für fy auf die Hermite'sche *kanonische* Form beschränken und schreiben:

$$fy = y^5 + Cy^3 + Ey + F,$$

nebst

$$s_0 = 5, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -2C, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 2(C^2 - 2E),$$

$$s_5 = -5F, \quad s_6 = -2C(C^2 - 3E), \quad s_7 = 7CF,$$

$$s_8 = 2(C^4 - 4C^2E + 2E^2), \quad s_9 = -9(C^2 - E)F,$$

$$s_{10} = -2C^5 + 10C^3E - 10CE^2 + 5F^2, \quad s_{11} = 11(C^3 - 2CE)F,$$

$$s_{12} = 2(C^6 - 6C^4E + 9C^2E^2 - 2E^3 - 6CF^2).$$

Ferner sei

$$w = ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = b_0\eta_4 - b_1\eta_3 + b_2\eta_2 - b_3\eta_1,$$

$$a = b_0, \quad b = -b_1, \quad c = Cb_0 + b_2, \quad d = -(Eb_1 + b_3),$$

$$e = \tfrac{2}{5}(2Eb_0 + Cb_2);$$

wir fragen, wann auch ψw die kanonische Form annimmt. Zunächst wird

$$\sigma_1 = as_4 + bs_3 + cs_2 + ds_1 + es_0 = as_4 + cs_2 + 5e = 0,$$

und wenn man zu w^2 übergeht:

$$\sigma_2 = a^2s_8 + 2abs_7 + (2ac + b^2)s_6 + 2(ad + bc)s_5 + \\ + (2ae + 2bd + c^2)s_4 + (2ce + d^2)s_2 + 5e^2,$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma_2 = \tfrac{2}{5}E^2b_0^2 + 3CFb_0b_1 + \tfrac{2}{5}CEb_0b_2 + 5Fb_0b_2 - 6Eb_6^2 - \\ - 5Fb_1b_2 - 4Eb_1b_3 + \tfrac{2}{5}C^2b_2^2 - 2Eb_2^2 - Cb_3^2.$$

Durch Kubierung des Ausdrucks für w ergibt sich:

$$\sigma_3 = a^3s_{12} + 3a^2bs_{11} + 3(a^2c + ab^2)s_{10} + (3a^2d + 6abc + b^3)s_9 + \\ + 3(a^2e + 2abd + ac^2 + b^2c)s_8 + 3(2abe + 2acd + b^2d + bc^2)s_7 + \\ + (6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)s_6 + \\ + 3(2ade + 2bce + bd^2 + c^2d)s_5 + \\ + 3(ae^2 + 2bde + c^2e + cd^2)s_4 + 3(ce^2 + d^2e)s_2 + 5e^3.$$

$$\tfrac{1}{3}\sigma_2 = (CF^2 + \tfrac{4}{25}E^3)b_0^3 - \tfrac{1}{5}CEFb_0^2b_1 + (\tfrac{6}{25}CE^2 + 5F^2)b_0^2b_2 - EFb_0^2b_3 + \\ + (\tfrac{2}{5}CE^2 + 5F^2)b_0b_1^2 + (\tfrac{12}{5}C^2F - 10EF)b_0b_1b_2 + \tfrac{6}{5}E^2b_0b_1b_3 - \\ - (\tfrac{2}{25}C^2E - \tfrac{4}{5}E^2)b_0b_2^2 + \tfrac{2}{5}CEb_0b_3^2 + (C^2F - 3EF)b_1^3 - \\ - (\tfrac{4}{5}C^2E - 4E^2)b_1^2b_2 + 3CFb_1^2b_3 + 2CFb_1b_2^2 + \tfrac{4}{5}CEb_1b_2b_3 + \\ + 5Fb_1b_2^2 - (\tfrac{2}{25}C^3 - \tfrac{2}{5}CE)b_2^3 + 5Fb_2^2b_3 + (\tfrac{6}{5}C^2 - 4E)b_1b_3^2.$$

Dieser Wert muß verschwinden, wenn ψw die kanonische Form haben soll. Selbstverständlich wird $\sigma_2 = 0$ für $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, weil alsdann $w = -b_3\eta_1$ eine identische Transformation darstellt.

Um die gefundenen Ausdrücke homogen zu machen, führen wir jetzt die Formen ein:

$$fy = Ay^5 + 10Cy^3 + 5Ey + F,$$

$$\psi w = w^5 + 10c_2w^3 + 10c_3w^2 + 5c_4w + c_5,$$

wodurch

$$10c_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2,\quad 10c_3 = -\tfrac{1}{3}\sigma_3,\quad 5c_4 = -\tfrac{1}{4}(\sigma_4 - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2),\quad c_5 = -\tfrac{1}{5}(\sigma_5 - \tfrac{5}{6}\sigma_2\sigma_3).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}2c_2 = &-2E^2b_0^2 - 6CFb_0b_1 - 4CEb_0b_2 - AFb_0b_3 + 10CEb_1^2 - \\ &- AFb_1b_2 + 4AEb_1b_3 + 2(AE - 6C^2)b_2^2 + 2ACb_3^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2c_3 = &-2(CF^2 + 2E^3)b_0^3 + 2CEFb_0^2b_1 - (AF^2 + 12CE^2)b_0^2b_2 + \\ &+ AEFb_0^2b_3 - (AF^2 + 20CE^2)b_0b_1^2 + 2(5AE - 24C^2)Fb_0b_1b_2 - \\ &- 8AE^2b_0b_1b_3 - 4(AE - 2C^2)Eb_0b_2^2 - 4ACEb_0b_3^2 + \\ &+ (3AE - 20C^2)Fb_1^3 - 20(AE - 4C^2)Eb_1^2b_2 - 6ACFb_1^2b_3 - \\ &- 4ACFb_1b_2^2 - 8ACEb_1b_2b_3 - A^2Fb_1b_3^2 - 4(AE - 4C^2)Cb_2^3 - \\ &- A^2Fb_2^2b_3 + 4(AE - 6C^2)Ab_2b_3^2.\end{aligned}$$

8.

Nach dem Früheren sind die berechneten Werte simultane Invarianten der beiden Funktionen

$$fy = Ay^5 + 10Cy^3 + 5Ey + F \quad \text{und} \quad gy = b_0y^3 + 3b_1y^2 + 3b_2y + b_3,$$

und zwar enthält c_2 kein in b_2b_3 und c_3 kein in b_3^2 multipliziertes Glied. Mithin reicht die Auflösung *einer quadratischen* Gleichung aus, um c_2 oder c_3 zum Verschwinden zu bringen. Indessen kann das Gleiche auch auf rationalem Wege erreicht werden, denn c_2 verschwindet, wenn

$$Cb_3 = (\tfrac{1}{4}F + \sqrt{\frac{C\delta}{A\alpha}})b_0 - Eb_1 \quad \text{und}$$

$$(6C^2 - AE)b_2 = -(CE + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}})b_0 - (\tfrac{1}{4}AF + \sqrt{\alpha})b_1,$$

oder

$$Cb_3 = \tfrac{1}{4}Fb_0 - (E + \sqrt{\frac{C\delta}{A\gamma}})b_1 \quad \text{und}$$

$$(6C^2 - AE)b_2 = -(CE + \sqrt{\gamma})b_0 - (\tfrac{1}{4}AF + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}})b_1$$

gesetzt werden, während zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{A^2E^3}{C} + \tfrac{1}{16}A^2F^2 - 11ACE^2 + 30C^3E,$$

$$\beta = -\frac{A^2E^2F}{4C} + \tfrac{13}{4}ACEF - 4C^3F,$$

$$\gamma = \frac{A^2EF^2}{16C} - \tfrac{3}{8}ACF^2 + AE^3 - 5C^2E^2,$$

$$\delta = \frac{A^2F^4}{256C} + \frac{A^2E^5}{C} + \tfrac{5}{8}A^2E^2F^2 - \tfrac{45}{8}AC^2EF^2 - \\ - 10ACE^4 + \tfrac{27}{2}C^4F^2 + 25C^5E^3,$$

$$\beta^2 = \alpha\gamma + (6C^2 - AE)\delta$$

geschrieben sind.[1])

In analoger Weise kann man die in Bezug auf b_3 quadratische Gleichung $c_3 = 0$ durch *zwei* rationale Bedingungsgleichungen ersetzen, indem man die Form herbeiführt:

$$c_3 = B_1 b_3^2 - B_2 b_3 + B_3.$$

Hier bedeuten $B_1 B_2 B_3$ Formen erster, zweiter und dritter Dimension von $b_0 b_1 b_2$, und c_3 verschwindet, wenn man $B_1 = 0$ und $b_3 = \frac{B_3}{B_2}$ setzt, also z. B. neben b_3 auch b_2 mittels B_1 eliminiert. Nach der gebräuchlichen Terminologie führt die Bedingung $c_2 = 0$ auf eine sogenannte *Hauptgleichung* fünften Grades

$$w^5 + 10c_3w^2 + 5c_4w + c_5 = 0,$$

während die Gleichung $c_3 = 0$ die *kanonische* Form liefert:

$$w^5 + 10c_2w^3 + 5c_4w + c_5 = 0.$$

---

1) Vermöge einer bekannten Eigenschaft der quadratischen Formen hat man

$$c_2 = \frac{A}{C}\{[\tfrac{1}{4}Fb_0 - Eb_1 - Cb_2]^2 - \frac{C\delta}{A\gamma}b_1^2\} - \\ - \frac{1}{6C^2 - AE}\{[CEb_0 + \tfrac{1}{4}AFb_1 + (6C^2 - AE)b_2]^2 - [b_0\sqrt{\gamma} + b_1\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}]^2\}$$

$$= \frac{A}{C}\{[\tfrac{1}{4}Fb_0 - Eb_1 - Cb_2]^2 - \frac{C\delta}{A\alpha}b_0^2\} - \\ - \frac{1}{6C^2 - AE}\{[CEb_0 + \tfrac{1}{4}AFb_1 + (6C^2 - AE)b_2]^2 - [b_0\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + b_1\sqrt{\alpha}]^2\}.$$

Es ist dabei zu bemerken einerseits, daß bei der Herstellung der *Hauptgleichung* die in den beiden linearen Gleichungen vorkommenden Radikale nicht als Irrationalitäten bezeichnet worden sind, weil sie von den Transformationskoeffizienten b unabhängig sind, während andererseits die ursprüngliche Ableitung der kanonischen Form Hermite's bereits die Wurzel $\sqrt{D_5}$ aus der Diskriminante eingeführt hat.

Selbstverständlich kann man auch einen Ausdruck vierter Dimension, wie c_4 oder $\gamma_4 = \alpha c_4 - \beta c_2^2 = \alpha' \sigma_4 - \beta' \sigma_2^2$, durch Auflösung einer Gleichung vierten Grades zum Verschwinden bringen. Komplizierter ist die Aufstellung der notwendigen Bedingungen, wenn *zwei* Gleichungen $c_2 = c_3 = 0$ oder $c_2 = c_4 = 0$ oder $c_3 = \gamma_4 = 0$ gleichzeitig erfüllt werden sollen. Will man c_2 und c_3 zugleich verschwinden lassen, so kann man allerdings mittels der beiden *linearen* Bedingungen, welche b_2 und b_3 durch b_0 und b_1 ausdrücken, b_0 und b_1 aus c_3 eliminieren, aber dann würden in b_3^3 multiplizierte Glieder erscheinen, so daß statt der quadratischen Gleichung eine kubische Gleichung auftritt, wie schon Bring-Jerrard bemerkt haben. Die Einführung von $c_3 = 0$ in c_2 würde im allgemeinen sogar einen Ausdruck sechsten Grades zur Folge haben, wie bei der Gleichung $c_2^2 + c_3^2 = 0$. Die Gleichungen $c_2 = c_4 = 0$ erfordern analog die Auflösung einer Gleichung vierten Grades, während die Bedingungen $c_3 = c_4 = 0$ nebst der Gleichung $w^5 + 10 c_2 w^3 + c_5 = 0$ sich auf den vorigen Fall zurückführen lassen, da für

$$w = \frac{1}{\omega}, \quad \gamma_3 = \frac{c_2}{c_5}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{c_5}, \quad \omega^5 + 10\gamma_3 \omega^2 + \gamma_5 = 0$$

erhalten wird. Die Bedingungen $c_3 = \gamma_4 = 0$ steigen im allgemeinen wegen $c_3^2 + \gamma_4^2 = 0$ mindestens auf den achten Grad, so daß eine weitere Graderniedrigung nur unter besonderen Verhältnissen eintreten kann.

9.

Da mittels der elementaren Operationen der Radizierung die Gleichung

$$w^5 + 5 c_4 w + c_5 = 0$$

herstellbar ist und nur die *Verhältnisse* der Koeffizienten der Tschirnhaus-Transformation bestimmt sind, so kann man b_0 so wählen, daß die Eisenstein'sche Gleichung $\chi^5 + \chi = \lambda$ hervorgeht,

wodurch die Wurzel χ Funktion eines einzigen Arguments wird. Schreibt man in der kanonischen Form

$$c_2 = b, \qquad c_4 = 9b^2 - 4ac, \qquad c_6 = 8\Delta,$$

$$\Delta^2 = 16a^5c^2 - 40a^4b^2c + 25a^3b^4 - 20a^2bc^2 + 45ab^3c - 27b^5 + c^3,$$

so folgt die Gleichung

$$w^5 + 10bw^3 + 5(9b^2 - 4ac)w = \pm 8\Delta,$$

von der Brioschi gezeigt hat, daß auf Grund der Galois-Hermite'schen Untersuchungen die sogenannte *allgemeine* Jacobi-sche Gleichung sechsten Grades in der Kronecker'schen Form

$$(z^2 - a)^6 - 4a(z^2 - a)^5 + 10b(z^2 - a)^3 - 4c(z^2 - a) + 5b^2 - 4ac = 0$$

auf jene Gleichung fünften Grades zurückgeführt werden kann. Die Bedingung $b = 0$ ergibt dann die Jerrard'sche *Normalform mit einem wesentlichen Parameter*, welche namentlich von Hermite zur Wurzeldarstellung mittels elliptischer Modulfunktionen benutzt worden ist. Doch läßt sich eine solche Darstellung, wie Kronecker's Untersuchungen gelehrt haben, auch bei anderen Formen herbeiführen.

Für $a = 0$ oder $c = 0$, d. i. $\gamma_4 = c_4 - 9c_2^2 = 20\sigma_4 - \sigma_2^2 = 0$, erhält man die zuerst wohl von Gordan so genannte Brioschi'sche Resolvente (*Math. Annalen*, Bd. 13, S. 399)

$$y^5 + 10by^3 + 45b^2y = 8\sqrt{c^3 - 27b^5} \quad \text{resp.} \quad = 8\sqrt{25a^3b^4 - 27b^5},$$

gleichfalls mit nur *einem* wesentlichen Parameter, während Klein (*Ikosaeder* S. 151, vgl. auch S. 105) das Verdienst, zuerst auf den Fall $a = 0$ seine Aufmerksamkeit gerichtet zu haben, für Kronecker in Anspruch nimmt. Kiepert und Gordan haben gezeigt, wie sich die Brioschi'sche Form auf elementarem Wege ergibt, und zwar benutzt ersterer eine Substitution, welche für $B = D = 0$ die Form annimmt:

$$b_2\eta_2 - b_3\eta_1 = \frac{cw + c'}{w^2 + 1}, \quad ACb_3^2 = (6C^2 - AE)b_2^2,$$

wo c und c' gleichfalls von der Aufstellung quadratischer Gleichungen abhängen. Die Lösung erfolgt dann wie bei der Jerrard-schen Normalform durch Modulfunktionen.

Nicht minder kann man für $9b^2 = 4ac$, wie bereits bemerkt, die Normalform $w^5 + 10c_2w^3 + c_5 = 0$ elementar herleiten. Dagegen ist eine derartige Herleitung durch Radizierung nicht mehr

möglich bei verschwindender Diskriminante D_5, sowie für $\Delta = 0$ oder $c_5 = 0$, noch auch für $5b^2 = 4ac$, weil in diesen Fällen die Gleichung für w elementar lösbar wird. In der Tat erhält für $D_5 = 0$ die Gleichung $\psi w = 0$ *gleiche Wurzeln*, für $\Delta = 0$ verschwindet eine Wurzel $w = 0$, und für $\gamma_4 = c_4 - 4c_2^2 = 10\sigma_4 - 3\sigma_2^2 = 0$ folgt

$$w^5 + 10c_2w^3 + 20c_2^2w + c_5 = 0,$$

während bekanntlich für $z = 2\sin u$: $z^5 - 5z^3 + 5z = 2\sin 5u$ wird.

10.

Zur Berechnung von σ_4 oder c_4 kann man folgenden Weg einschlagen. Schreiben wir

$$w^2 = a'y^4 + b'y^3 + c'y^2 + d'y + e',$$

so folgt neben

$$0 = 2(C^2 - 2E)a - 2Cc + 5e,$$
$$\sigma_2 = 2(C^2 - 2E)a' - 2Cc' + 5e'.$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, gehen wir aus von der Gleichung

$$w^2 = (ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e)^2$$
$$= (a^2y^8 + \alpha y^7 + \beta y^6 + \gamma)(y^5 + Cy^3 + Ey + F) + a'y^4 + b'y^3 + c'y^2 + d'y + e',$$

und erhalten:

$$\alpha = 2ab, \quad \beta = -Ca^2 + 2ac + b^2, \quad \gamma = -2Cab + 2ad + 2bc,$$
$$a' = (C^2 - E)a^2 - 2Cac + 2ae - Cb^2 + 2bd + c^2,$$
$$b' = -Fa^2 + 2(C^2 - E)ab - 2C(ad + bc) + 2(be + cd),$$
$$c' = CEa^2 - 2Fab - 2Eac - Eb^2 + 2ce + d^2,$$
$$d' = CFa^2 + 2CEab - 2Fac - 2Ead - Fb^2 - 2Ebc + 2dc,$$
$$e' = 2CFab - 2Fad - 2Fbc + e^2.$$

Damit ergibt sich

$$\sigma_2 = 2(C^4 - 4C^2E + 2E^2)a^2 + 14CFab - 2C(C^2 - 3E)(2ac + b^2) -$$
$$- 10F(ad + bc) + 2(C^2 - 2E)(2ae + 2bd + c^2) - 2C(2ce + d^2) + 5e^2,$$

wo bei Einführung von $b_0b_1b_2b_3$ die Übereinstimmung mit dem früher abgeleiteten Werte von σ_2 erhellt. Vertauscht man aber $abcde$ mit $a'b'c'd'e'$, oder w mit w^2, so geht σ_2 in σ_4 über und man erhält:

$$\sigma_4 = 2(C^4 - 4C^2E + 2E^2)a'^2 + 14CFa'b' - 2C(C^2 - 3E)(2a'c' + b'^2) -$$
$$- 10F(a'd' + b'c') + 2(C^2 - 2E)(2a'e' + 2b'd' + c'^2) - 2C(2c'e' + d'^2) + 5e'^2,$$

während

$$\sigma_2^2 = 4(C^4 - 4C^2E + 4E^2)a'^2 - 8C(C^2 - 2E)a'c' + 20(C^2 - 2E)a'e' + \\ + 4C^2c'^2 - 20Cc'e' + 25e'^2.$$

Hier hat man nun, um $c_4 = -\frac{1}{4}(\sigma_4 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)$ zu berechnen, die Werte zu substituieren:

$$a' = \tfrac{3}{5}Eb_0^2 + \tfrac{4}{5}Cb_0b_2 + Cb_1^2 + 2b_1b_3 + b_2^2,$$

$$b' = -Fb_0^2 + \tfrac{2}{5}Eb_0b_1 - \tfrac{4}{5}Cb_1b_2 - 2b_1b_3,$$

$$c' = \tfrac{3}{5}Cb_0^2 + \tfrac{2}{5}Fb_0b_1 + \tfrac{2}{5}(2C^2 - E)b_0b_2 + (C^2 - E)b_1^2 + \\ + 2Cb_1b_3 + \tfrac{4}{5}Cb_2^2 + b_3^2,$$

$$d' = -CFb_0^2 + \tfrac{2}{5}CEb_0b_1 - 2Fb_0b_2 + \tfrac{2}{5}Eb_0b_3 - Fb_1^2 - \\ - (\tfrac{4}{5}C^2 - 2E)b_1b_2 - \tfrac{4}{5}Cb_2b_3,$$

$$e' = \tfrac{16}{25}E^2b_0^2 + 2CFb_0b_1 + \tfrac{16}{25}CEb_0b_2 + 2Fb_0b_3 + 2Fb_1b_2 + \tfrac{4}{25}C^2b_2^2,$$

sowie durch Einführung von $a_0 = A$ die Ausdrücke homogen zu machen. Da die Rechnung ziemlich weitläufig ist, so mag hier wenigstens die Abhängigkeit von b_2 und b_3 untersucht werden. Wir setzen demnach $b_0 = b_1 = 0$ oder $w = b_2\eta_2 - b_3\eta_1$ und erhalten:

$$a' = b_2^2, \quad b' = 0, \quad c' = \tfrac{4}{5}Cb_2^2 + b_3^2, \quad d' = -\tfrac{4}{5}Cb_2b_3, \quad e' = \tfrac{4}{25}C^2b_2^2.$$

Alsdann wird

$$\sigma_4 = 2(C^2 - 2E)b_3^4 - \tfrac{4}{5}C(\tfrac{17}{5}C^2 - 2E)b_2^2b_3^2 + 8CFb_2^3b_3 + \\ + 2(\tfrac{21}{125}C^4 - \tfrac{28}{25}C^2E + 2E^2)b_2^4,$$

$$\tfrac{1}{4}\sigma_2^2 = C^2b_3^4 - \tfrac{2}{5}C(3C^2 - 10E)b_2^2b_3^2 + \tfrac{1}{25}(3C^2 - 10E)^2b_2^4,$$

$$c_2 = ACb_3^2 + (AE - 6C^2)b_2^2,$$

$$c_4 = A^2Eb_3^4 + 2AC(3AE + 8C^2)b_2^2b_3^2 - 4A^2CFb_2^3b_3 + \\ + (AE - 2C^2)(5AE - 24C^2)b_2^4,$$

$$2c_3 = b_2\{4A(AE - 6C^2)b_3^2 - A^2Fb_2b_3 - 4C(AE - 4C^2)b_2^2\}.$$

Letzterer Ausdruck verschwindet nicht allein für $b_2 = 0$ und $w = -Ab_3y$, sondern auch wenn

$$b_2 : b_3 = \alpha\Delta + \alpha A^2F + 8\beta A(6C^2 - AE) : \\ : \beta\Delta - \beta A^2F + 8\alpha C(4C^2 - AE),$$

und zwar für *beliebige* Werte der Faktoren α und β, während

$$\Delta^2 = A^4F^2 + 64AC(4C^2 - AE)(6C^2 - AE).$$

II.

Zum Schlusse mögen noch einige Bemerkungen Platz finden über die Berechnung von ψw durch direkte Elimination von y aus den Gleichungen $fy = 0$ und $w = \varphi y$. Abgesehen von der Weitläufigkeit der Rechnung besteht die Schwierigkeit darin, zu bewirken, daß ψw nicht auf einen höheren Grad als den $m$ten steige, denn die Art. 9* S. 160 ausgesprochene Behauptung, wonach der direkte Rest r_i vom Grade i in Bezug auf x oder w werden soll, so daß r_m keine höhere Potenz als w^m erhalte, ist im allgemeinen nicht zutreffend. Vielmehr zeigt schon die S. 316 geführte Rechnung für $m = 5$, daß der letzte Rest r_m nach Elimination von x dort die Form annimmt

$$r_5 = \varphi_0 = C(w + 3G + 8C^2)^2 \psi\left(\frac{5}{w}\right).$$

Man wird also in solchem Falle einen zu ermittelnden Faktor abzutrennen haben.

Sei

$$f = y^5 + Cy^3 + Ey + F = 0,$$

$$w = y^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = \varphi_4$$
$$= y^4 - b_1 y^3 + (C + b_2)y^2 - (Cb_1 + b_3)y + \tfrac{2}{5}(2E + Cb_2),$$

so wird

$$f + (y + b_2)(w - \varphi_4) = b'y^3 + c'y^2 + d'y + e' = \varphi_3 = 0,$$

$$b' = b_1^2 - b_2, \qquad c' = -(b_1 b_2 - b_3),$$

$$d' = w' - \tfrac{2}{5} Cb_2 + b_1(Cb_1 + b_3),$$

$$e' = b_1(w' - E - \tfrac{2}{5} Cb_2) + F,$$

wo zur Abkürzung $w' = w + \frac{1}{5}E$ geschrieben ist. Ferner

$$b'^2(w - \varphi_4) + (b'y - b'b_1 - c')\varphi_2 = c''y^2 + d''y + e'' = \varphi_2 = 0,$$

$$c'' = -b'^2(C + b_2) - c'(b'b_1 + c') + b'd'$$
$$= (b_1^2 - b_2)(w' + \tfrac{3}{5} Cb_2) + 2b_1 b_2 b_3 - b_2^3 - b_3^2,$$

$$d'' = b'^2(Cb_1 + b_3) - d'(b'b_1 + c') + b'e'$$
$$= (b_1 b_2 - b_3)(w' + \tfrac{3}{5} Cb_2) + (b_1^2 - b_2)(F - Eb_1 - Cb_3) + (b_2^2 - b_1 b_3)b_3,$$

$$e'' = b'^2(w' - E - \tfrac{2}{5} Cb_2) - e'(b'b_1 + c')$$
$$= (b_2^2 - b_1 b_3)(w' - E - \tfrac{2}{5} Cb_2) - F(b_1^3 - 2b_1 b_2 + b_3).$$

Um eine verschwindende lineare Funktion φ_1 abzuleiten, kann man drei verschiedene Ausdrücke bilden:

$$\varphi_1 = e_0 y + e_1 = c''^2\varphi_3 - (b'c''y - b'd'' + c'c'')\varphi_2,$$

oder

$$\varphi_1 = e_1 y + e_2 = \frac{1}{y}\{(b'e''y + c'c'') - c''e''\varphi_3\},$$

oder endlich

$$\varphi_1 = e_2 y + e_3 = \frac{1}{y^2}\{e''^2\varphi_3 - [(d'c'' - e'd'')y + e'c'']\varphi_2\},$$

$$e_0 = b'(d''^2 - c''e'' - c'c''d'' + d'c''^2),$$
$$e_1 = b'd''e'' - c'c''e'' + e'c''^2,$$
$$e_2 = b'c''^2 - d'c''e'' + e'c''d'',$$
$$e_3 = c'c''^2 - d'd''e'' + e'(d''^2 - c''e'').$$

Da $d'e'c''d''e''$ in Bezug auf w oder w' linear sind, so steigen $e_0 e_1 e_2 e_3$ auf den dritten Grad, nnd zwar sind die Glieder höchster Dimension

$$d' = w\,.., \quad e' = b_1 w, \quad c'' = b'w,$$
$$d'' = (b_1 b_2 - b_3)w, \quad e'' = (b_2^2 - b_1 b_3)w,$$
$$e_0 = b'^2 w^3, \quad e_1 = b'^2 b_1 w^3,$$
$$e_2 = b'^2 b_2 w^3, \quad e_3 = b'^2 b_3 w^3.$$

Daraus folgt, daß

$$e_1^2 - e_0 e_2 = b'^5 w^6 + b'' w^5 + \cdots$$
$$= (b'^5 w + b'')(w^5 + 10 c_2 w^3 + 10 c_3 w^2 + 5 c_4 w + c_5).$$

Entsprechende Ausdrücke kann man für $e_2^2 - e_1 e_3$ und $e_1 e_2 - e_0 e_3$ aufstellen, wenn auch die Berechnung der Koeffizienten einigermaßen beschwerlich bleibt. Deshalb ist es nicht unwichtig, in dem Umstande, daß für $b_i = (-x)^i\, w$ in die Wurzel z der typischen Gleichung, folglich $\psi w = 0$ in die letztere selbst übergeht, eine wirksame Kontrolle für die Rechnung zu besitzen. So muß für $b_i = (-x)^i$

$$c_2 = f_2 = -g, \quad c_3 = -h, \quad c_4 = f^2 g_2 - 3g^2, \quad c_5 = f^2 g_5 - 2gh$$

werden, wie man leicht direkt verifiziert; für $x = x_k$ folgt identisch wegen

$$w = 4 f_i(y), \quad g = f_i^2(y), \quad h = 2 f_i^3(y),$$
$$w^5 = 10 g w^3 + 10 h w^2 + 15 g^2 w + 2gh.$$

Druckfertig erklart 23. V 1905.]

Zur Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Größen.

Von

M. Krause.

Im Folgenden soll die Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Größen nach bestimmter Richtung hin in Betracht gezogen werden.

In der Theorie der Funktionen einer veränderlichen Größe gibt es eine Anzahl endlicher Summenformeln, die sich nach verschiedenen Richtungen, vor allem auch in der Differenzenrechnung von Bedeutung gezeigt haben, so z. B. die Taylorsche Formel, die Mac-Laurinsche Summenformel und die Lagrangesche Interpolationsformel. In der Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Größen sind analoge endliche Formeln aufgestellt worden. Während nun in der Theorie der unendlichen Doppelsummen vor allem in neuester Zeit vielfach auf das wichtige Moment der verschiedenen Anordnung der Glieder hingewiesen worden ist, ist etwas Analoges bei den endlichen Doppelsummen bisher weit weniger hervorgetreten.

Um bei der endlichen Taylorschen Reihe stehen zu bleiben, so wird dieselbe, soweit dem Verfasser bekannt, in den gebräuchlichen Lehrbüchern der Differentialrechnung durchweg in der Form dargestellt:

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial x}k\right)+\cdots\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)}+R_n.$$

Setzt man:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^r\partial y^s}\frac{h^r k^s}{r!s!}=a_{rs},$$

so kann man die Glieder der rechten Seite, vom Reste abgesehen, folgendermaßen anordnen:

$$
\begin{array}{llll}
a_{00} & + a_{10} + \cdots & a_{n-20} + a_{n-10} + a_{n0} \\
+ a_{01} & + a_{11} + \cdots & a_{n-21} + a_{n-11} \\
+ a_{02} & + a_{12} + \cdots & a_{n-22} \\
 & \cdots & \\
+ a_{0n-1} & + a_{1n-1} & \\
+ a_{0n} & &
\end{array}
$$

Man kann füglich sagen, daß bei der üblichen Darstellungsweise die Glieder in ein Dreieck eingeordnet sind, daß sie eine Dreiecksanordnung besitzen.

Der Rest besitzt hierbei eine schwerfällige Form, die sich für Anwendungen sehr wenig eignet. Nun gibt es aber außer dieser Taylorschen Reihendarstellung noch unendlich viele weitere, bei welchen die Anordung der Glieder eine andere ist, vor allem eine solche, bei welcher die Glieder in ein Rechteck eingeordnet werden können. Derartige Darstellungen haben auch ihren Wert, ja es muß hervorgehoben werden, daß die Rechtecksanordnung die sich zunächst darbietende ist, wenn man von einer einfachen endlichen Summe zu einer Doppelsumme übergeht und auch deswegen von besonderer Bedeutung ist, weil der Rest sich in einfacher Weise darstellen läßt.

Was von der Taylorschen Reihe gilt, gilt von der Mac-Laurinschen Summenformel und der Lagrangeschen Interpolationsformel. Auch hier können neben der Dreiecksanordnung unendlich viele andere in Betracht gezogen werden, vor allem die Rechtecksanordnung. Letztere hat auch hier den Vorzug einer einfachen Restdarstellung.

Hierauf soll im Folgenden näher eingegangen werden und zwar in durchaus elementarer Weise. Die Betrachtungen beziehen sich zunächst auf den Taylorschen Lehrsatz zweier veränderlichen Größen, der auf mehrfachem Wege sowohl in der Dreiecks- als in der Rechtecksform entwickelt werden soll. Die letztere Form gibt die Möglichkeit, analog wie es Pringsheim für die Funktionen einer veränderlichen Größe gemacht hat, die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür aufzustellen, daß eine reelle Funktion zweier veränderlichen Größen in eine unendliche Taylorsche Reihe entwickelt werden kann.

Es soll dann die Mac-Laurinsche Summenformel in der Rechtecksform für Funktionen zweier veränderlichen Größen ge-

geben werden und endlich die Lagrangesche Interpolationsformel in ähnlicher Weise verallgemeinert werden. Die letzten Betrachtungen geben Anlaß auf das mehrfach behandelte Problem der angenäherten Kubatur näher einzugehen und einige praktisch brauchbare Annäherungsformeln aufzustellen, die sich auf die Integration über die Fläche eines Rechtecks und eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks beziehen. Die Formeln haben den Vorzug, eine Abschätzung des begangenen Fehlers zu ermöglichen. Die Beziehungen der im Folgenden entwickelten Theorien zu den Arbeiten anderer Autoren werden an den betreffenden Stellen näher angegeben werden.

§ 1.

Erste Ableitung von Taylorschen Sätzen zweier veränderlichen Größen in verschiedenen Formen.

Es seien $F(x, y)$ und $G(x, y)$ zwei eindeutige Funktionen der reellen Veränderlichen x und y. Wir wollen dann die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{r+s} F(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

kurz durch (r, s) bezeichnen und analog die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{r+s} G(-x, -y)}{\partial(-x)^r \partial(-y)^s}$$

durch $(r, s)'$ und die Funktionen bilden:

$$(1) \qquad \varphi^{(r\,s)}(x, y) = (r-1,\ s-1)(m-r,\ n-s)'.$$

Durch zweimaliges Differenzieren folgt:

$$(1a) \quad \frac{\partial^2 \varphi^{(r\,s)}(x, y)}{\partial x \partial y} = (r, s)(m-r, n-s)' - (r, s-1)(m-r, n-s+1)'$$

$$-(r+1, s)(m-r+1, n-s)' + (r-1, s-1)(m-r+1, n-s+1)'.$$

Nun kann in sehr verschiedener Weise vorgegangen werden. Wir wollen erstens r festhalten und s der Reihe nach die Werte $1, 2, \ldots . n$ durchlaufen lassen, dann ergibt sich das System von Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(r1)}(x,y)}{\partial x \partial y} = (r,1)(m-r,n-1)' - (r,0)(m-r,n)' -$$
$$(r-1,1)(m-r+1,n-1)' + (r-1,0)(m-r+1,n)',$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(r2)}(x,y)}{\partial x \partial y} = (r,2)(m-r,n-2)' - (r,1)(m-r,n-1)' -$$
$$(r-1,2)(m-r+1,n-2)' + (r-1,1)(m-r+1,n-1)',$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial^2 \varphi^{(rn)}(x,y)}{\partial x \partial y} = (r,n)(m-r,0)' - (r,n-1)(m-r,1)'$$
$$-(r-1,n)(m-r+1,0)' + (r-1,n-1)(m-r+1,1)'.$$

Wir addieren die linken und die rechten Seiten, so ergibt sich die Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial^2 \varphi^{(rs)}(x,y)}{\partial x \partial y} = (r,n)(m-r,0)' - (r,0)(m-r,n)'$$
$$-(r-1,n)(m-r+1,0)' + (r-1,0)(m-r+1,n)'$$

Setzt man nunmehr an Stelle von r der Reihe nach: $1, 2, \ldots m$ und addiert, so ergibt sich die Formel:

$$\sum_1^m \sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi^{(rs)}(x,y)}{\partial x \partial y} = (m,n)(0,0)' - (m,0)(0,n)' - (0,n)(m,0)'$$
$$+ (0,0)(m,n)',$$

oder wir erhalten durch zweimalige Integration die Formel (2):

$$\sum_1^m \sum_1^n \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 \varphi^{(rs)}(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} M dx dy$$

$$M = (m,n)(0,0)' - (m,0)(0,n)' - (0,n)(m,0)' + (0,0)(m,n)'.$$

Diese Formel stellt im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen das Analogon zu der Formel (J) dar, welche KRONECKER in einer Arbeit: „Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel" im Jahre 1885 in den Berichten der Berliner Akademie für die Funktionen einer veränderlichen Größe aufgestellt hat.

Auch sie kann, ähnlich wie die KRONECKERsche Formel, zu den mannigfachsten Anwendungen benutzt werden. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, wie aus ihr der TAYLORsche Satz für Funktionen zweier Veränderlichen abgeleitet werden kann.

Wir führen dazu die Integrationsveränderlichen u und v statt x und y ein, setzen:

$$F(u, v) = \int\int f(u, v)\, du\, dv$$

und wählen für $G(u, v)$ die spezielle Funktion:

$$G(u, v) = \frac{(x+u)^m}{m!}\,\frac{(y+v)^n}{n!}.$$

Es nehmen dann die Glieder der Summe auf der linken Seite die Form an:

$$\varphi^{(r\,s)}(x, y) - \varphi^{(r\,s)}(x_0, y) - \varphi^{(r\,s)}(x, y_0) + \varphi^{(r\,s)}(x_0, y_0)$$

oder also:

$$\left[\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r\, \partial y^s}\right]_{x_0 y_0} \frac{(x-x_0)^r (y-y_0)^s}{r!\qquad s!}$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite kann geschrieben werden:

$$f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0),$$

während die anderen sich als Doppelintegrale darstellen.

Unter solchen Umständen finden wir für den Ausdruck:

$$f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

die Darstellung (3):

$$\sum_1^m \sum_1^n \left[\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r\, \partial y^s}\right]_{x_0 y_0} \frac{(x-x_0)^r (y-y_0)^s}{r!\qquad s!} + R_1^{(m\,n)} + R_2^{(m\,n)} - R_3^{(m\,n)},$$

wobei gesetzt worden ist:

$$R_1^{(m\,n)} = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{m+2} f(u, v)}{\partial u^{m+1}\, \partial v}\,\frac{(x-u)^m}{m!}\, du\, dv,$$

$$R_2^{(m\,n)} = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{n+2} f(u, v)}{\partial u\, \partial v^{n+1}}\,\frac{(y-v)^n}{n!}\, du\, dv,$$

$$R_3^{(m\,n)} = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{m+n+2} f(u, v)}{\partial u^{m+1}\, \partial v^{n+1}}\,\frac{(x-u)^m}{m!}\,\frac{(y-v)^n}{n!}\, du\, dv.$$

Die Größen $R_1^{(m\,n)}$ und $R_2^{(m\,n)}$ können durch einfache Integrale dargestellt werden und zwar wird:

$$R_1^{(m\,n)} = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial^{m+1} f(u,y)}{\partial u^{m+1}} - \frac{\partial^{m+1} f(u,y_0)}{\partial u^{m+1}} \right) \frac{(x-u)^m}{m!}\, du\,,$$

$$R_2^{(m\,n)} = \int_{y_0}^{y} \left(\frac{\partial^{n+1} f(x,v)}{\partial v^{n+1}} - \frac{\partial^{n+1} f(x_0,v)}{\partial v^{n+1}} \right) \frac{(y-v)^n}{n!}\, dv.$$

Wir können das Resultat etwas anders aussprechen, wenn wir die Gleichungen erwägen:

$$f(x,y_0) = f(x_0,y_0) + \sum_1^m \left[\frac{\partial^r f(x,y_0)}{\partial x^r} \right]_{x_0} \frac{(x-x_0)^r}{r!} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{m+1} f(u,y_0)}{\partial u^{m+1}} \frac{(x-u)^m}{m!}\, du,$$

$$f(x_0,y) = f(x_0,y_0) + \sum_1^n \left[\frac{\partial^s f(x_0,y)}{\partial y^s} \right]_{y_0} \frac{(y-y_0)^s}{s!} + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{n+1} f(x_0,v)}{\partial v^{n+1}} \frac{(y-v)^n}{n!}\, dv.$$

Dann folgt für die Funktion $f(x,y)$ die Darstellung (4):

$$\sum_0^m \sum_0^n \left[\frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r\, \partial y^s} \right]_{x_0 y_0} \frac{(x-x_0)^r}{r!} \frac{(y-y_0)^s}{s!} + R_1^{(m\,n)} + R_2^{(m\,n)} - R_3^{(m\,n)},$$

wobei gesetzt ist:

$$R_1^{(m\,n)} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{m+1} f(u,y)}{\partial u^{m+1}} \frac{(x-u)^m}{m!}\, du, \quad R_2^{(m\,n)} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{n+1} f(x,v)}{\partial v^{n+1}} \frac{(y-v)^n}{n!}\, dv,$$

$$R_3^{(m\,n)} = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{m+n+2} f(u,v)}{\partial u^{m+1}\, \partial v^{n+1}} \frac{(x-u)^m}{m!} \frac{(y-v)^n}{n!}\, du\, dv.$$

Dieselbe Formel findet NICCOLETTI[1]) in einer Arbeit, auf die ich nach Fertigstellung dieses Aufsatzes aufmerksam wurde, auf etwas anderem Wege.

Wir können der gefundenen Darstellung noch eine andere Form geben.

Setzt man an Stelle von u und v resp.:

$$\frac{u-x_0}{x-x_0} \quad \text{und} \quad \frac{v-y_0}{y-y_0}$$

ferner

$$x = x_0 + h, \qquad y = y_0 + k$$

---

1) Sulle serie doppie di Taylor. Roma. Acc. L. Rend. (5) 10. pag. 467 sequ.

und schließlich an Stelle von x_0, y_0 resp. x, y, so erhalten wir für

$$f(x+h, y+k)$$

die Darstellung (5):

$$\sum_0^m \sum_0^n \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{h^r k^s}{r!\,s!} + \frac{h^{m+1}}{m!} R_1^{(m\,n)} + \frac{k^{n+1}}{n!} R_2^{(m\,n)} - \frac{h^{m+1} k^{n+1}}{m!\;\;n!} R_3^{(m\,n)},$$

wobei gesetzt ist:

$$R_1^{(m\,n)} = \int_0^1 \frac{\partial^{m+1} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{m+1}} (1-u)^m du,$$

$$R_2^{(m\,n)} = \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} f(x+h, y+kv)}{\partial y^{n+1}} (1-v)^n dv,$$

$$R_3^{(m\,n)} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n+2} f(x+hu, y+kv)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} (1-u)^m (1-v)^n du\, dv.$$

Die Größen R haben wir in zwei verschiedenen Formen dargestellt. Unter Anwendung des ersten Mittelwertsatzes können wir sie auch schreiben:

$$R_1^{(m\,n)} = \frac{1}{m+1} \frac{\partial^{m+1} f(x+\theta h,\ y+k)}{\partial x^{m+1}},$$

$$R_2^{(m\,n)} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial^{n+1} f(x+h,\ y+\theta' k)}{\partial y^{n+1}},$$

$$R_3^{(m\,n)} = \frac{1}{m+1 \cdot n+1} \frac{\partial^{m+n+2} f(x+\theta_1 h,\ y+\theta_1' k)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}}.$$

Diese Sätze, bei denen anzunehmen ist, daß die sämtlichen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{r+s+2} f(x,y)}{\partial x^{r+1} \partial y^{s+1}}$$

für r und s resp. gleich $0, 1, \ldots m$ und $0, 1, \ldots n$ im Rechteck x, y; $x+h$, $y+k$ existieren, können als Taylorsche Sätze im Gebiete der Funktionen zweier Veränderlichen bezeichnet werden. Freilich sind sie nicht die einzigen. In der Art der Summation bleibt eine Willkür. Wir haben nach den Summationsbuchstaben r und s unabhängig von einander von 0 bis m resp. 0 bis n summiert. Die Form, in welcher sich dann der Taylorsche Satz ergibt, kann füglich als Rechtecksform bezeichnet werden. Es

ist nun nicht der Zweck dieses Aufsatzes die sonstigen Anordnungen genauer zu untersuchen, hier von dieser Stelle möge nur kurz auf diejenige Art der Summierung hingewiesen werden, die zu der gewöhnlichen Form des TAYLORschen Satzes führt, die füglich als Dreiecksform bezeichnet werden kann.

Wir gehen dazu zu der Gleichung (1a) zurück, bilden aber jetzt die Summe:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=1}^{s=n-r} \frac{\partial^2 \varphi^{(r,s)}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

Für dieselbe ergibt sich der Ausdruck:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} (\varrho, n-\varrho)\ (n-\varrho-1, \varrho-1)'$$

$$-\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} (\varrho, n-\varrho-1)\,(n-\varrho-1, \varrho)' + F(x,y)\,(n-1, n-1)'.$$

Wir setzen:

$$G(u,v) = \frac{(x+u)^{n-1}}{n-1!} \frac{(y+v)^{n-1}}{n-1!}$$

und gehen im übrigen wie vorhin vor.

Dann ergibt sich auf der linken Seite zunächst der Ausdruck:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=1}^{s=n-r} \left[\frac{\partial^{s+r} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}\right]_{x_0 y_0} \frac{(x-x_0)^r}{r!} \frac{(y-y_0)^s}{s!}$$

Auf der rechten Seite erhalten wir die Größe:

$$f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0)$$

und neben ihr eine Summe von Integralen, die wir schreiben können:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{n+2} f(u,v)}{\partial u^{\varrho+1} \partial v^{n-\varrho+1}} \frac{(x-u)^\varrho}{\varrho!} \frac{(y-v)^{n-\varrho}}{n-\varrho!}\, du\, dv$$

$$-\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^{n+1} f(u,v)}{\partial u^{\varrho+1} \partial v^{n-\varrho}} \frac{(x-u)^\varrho}{\varrho!} \frac{(y-v)^{n-\varrho-1}}{n-\varrho-1!}\, du\, dv.$$

Mit Hilfe leichter Betrachtungen ergibt sich hieraus für die Größe:

$$f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0)$$

die Darstellung (6):

$$\sum_{1}^{n-1}\sum_{1}^{n-r}\left[\frac{\partial^{r+s}f(x,y}{\partial x^r\partial y^s}\right]_{x_0y_0}\frac{(x-x_0)^r}{r!}\frac{(y-y_0)^s}{s!}+R_n,$$

wobei gesetzt ist:

$$R_n=\sum_{0}^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n+1}f(u,y_0)}{\partial u^{\varrho+1}\partial y_0{}^{n-\varrho}}\frac{(x-u)^\varrho}{\varrho!}\frac{(y-y_0)^{n-\varrho}}{n-\varrho!}du$$

$$+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial^{n+1}f(x,v)}{\partial v^{n+1}}-\frac{\partial^{n+1}f(x_0,v)}{\partial v^{n+1}}\right)\frac{(y-v)^n}{n!}dv.$$

Zu der gewöhnlichen Form des Taylorschen Satzes zweier Veränderlichen gelangen wir, wenn wir die Entwickelungen hinzunehmen:

$$f(x,y_0)=f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right]_{x_0}(x-x_0)$$

$$+\cdots\left[\frac{\partial^n f(x,y_0)}{\partial x^n}\right]_{x_0}\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n+1}f(u,y_0)}{\partial u^{n+1}}\frac{(x-u)^n}{n!}du,$$

$$f(x_0,y)=f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f(x_0y)}{\partial y}\right]_{y_0}(y-y_0)$$

$$+\cdots\left[\frac{\partial^n f(x_0,y)}{\partial y^n}\right]_{y_0}\frac{(y-y_0)^n}{n!}+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial^{n+1}f(x_0,v)}{\partial v^{n+1}}\frac{(y-v)^n}{n!}dv.$$

Es ergibt sich das Resultat:

Die Funktion $f(x,y)$ kann in der Form dargestellt werden:

$$\sum_{0}^{n}\sum_{0}^{n-r}\left[\frac{\partial^{r+s}f(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}\right]_{x_0y_0}\frac{(x-x_0)^r}{r!}\frac{(y-y_0)^s}{s!}+R_n',$$

wobei gesetzt ist:

$$R_n'=\sum_{0}^{n}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n+1}f(u,y_0)}{\partial u^{\varrho+1}\partial y_0{}^{n-\varrho}}\frac{(x-u)^\varrho}{\varrho!}\frac{(y-y_0)^{n-\varrho}}{n-\varrho!}du$$

$$+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial^{n+1}f(x,v)}{\partial v^{n+1}}\frac{(y-v)^n}{n!}dv.$$

Der Rest kann in andere Formen gebracht werden, indessen kann davon abgesehen werden.

§ 2.

Zweite Ableitung des Taylorschen Lehrsatzes zweier veränderlichen Größen in der Rechtecksform.

In einer anderen noch einfacheren Weise können wir die Rechtecksform des TAYLORschen Satzes folgendermaßen erhalten:

Wir legen die Funktion zugrunde:

$$(1) \qquad F(x,y) = f(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots \frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

die wir auch schreiben können:

$$(2) \quad F(x,y) = f(x,y+k) - \frac{k^{n+1}}{n!}\int_0^1 \frac{\partial^{n+1} f(x,y+kv)}{\partial y^{n+1}}(1-v)^n\,dv.$$

Sehen wir dieselbe als Funktion von x allein an, so folgt:

$$F(x+h,y) = F(x,y) + h\frac{\partial F}{\partial x} + \cdots \frac{h^m}{m!}\frac{\partial^m F}{\partial x^m} + \frac{h^{m+1}}{m!}\int_0^1 \frac{\partial^{m+1} F(x+hu,y)}{\partial x^{m+1}}(1-u)^m\,du,$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$(3) \qquad F(x+h,y) + \sum_0^m\sum_0^n \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}\frac{h^r k^s}{r!\,s!} + \frac{h^{m+1}}{m!}\int_0^1 \frac{\partial^{m+1} F(x+hu,y)}{\partial x^{m+1}}(1-u)^m\,du.$$

Andrerseits folgt:

$$F(x+h,y) = f(x+h,y+k) - \frac{k^{n+1}}{n!}\int_0^1 \frac{\partial^{n+1} f(x+h,y+kv)}{\partial y^{n+1}}(1-v)^n\,dv,$$

$$\frac{\partial^{m+1} F(x+hu,y)}{\partial x^{m+1}} = \frac{\partial^{m+1} f(x+hu,y+k)}{\partial x^{m+1}} - \frac{k^{n+1}}{n!}\int_0^1 \frac{\partial^{m+n+2} f(x+hu,y+kv)}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}}\,dv.$$

Berücksichtigen wir diese Relationen, so erhalten wir für:

$$f(x+h, y+k)$$

die Darstellung (4)

$$\sum_0^m \sum_0^n \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{h^r}{r!} \frac{k^s}{s!} + \frac{h^{m+1}}{m!} R_1^{(mn)}$$

$$+ \frac{k^{n+1}}{n!} R_2^{(mn)} - \frac{h^{m+1} \cdot k^{n+1}}{m!\, n!} R_3^{(mn)},$$

wobei gesetzt ist:

$$R_1^{(mn)} = \int_0^1 \frac{\partial^{m+1} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{m+1}} (1-u)^m du,$$

$$R_2^{(mn)} = \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} f(x+h, y+kv)}{\partial y^{n+1}} (1-v)^n dv,$$

$$R_3^{(mn)} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n+2} f(x+hu, y+kv)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}} (1-u)^m (1-v)^n du\, dv.$$

Es ist das genau dieselbe Darstellung, die wir auf anderem Wege im ersten Paragraphen gefunden haben. Dieselbe setzt den Taylorschen Satz für Funktionen einer Veränderlichen als bekannt voraus und beruht auf einer Iterierung des Prozesses.

Wir haben bei dem Taylorschen Satz für eine veränderliche Größe eine bestimmte Restform zugrunde gelegt. Unter Hinzunahme anderer Restformen werden sich für den Taylorschen Satz zweier veränderlicheu Größen auch andere Restformen ergeben, z. B. die letzte im vorigen Paragraphen für die Rechtecksform gefundene. Daneben machen wir auf die Form aufmerksam:

$$R_1^{(mn)} = (1-\theta)^m \frac{\partial^{m+1} f(x+\theta h, y+k)}{\partial x^{m+1}},$$

$$R_2^{(mn)} = (1-\theta')^n \frac{\partial^{n+1} f(x+h, y+\theta' k)}{\partial y^{n+1}},$$

$$R_3^{(mn)} = (1-\theta_1)^m (1-\theta_1')^n \frac{\partial^{m+n+2} f(x+\theta_1 h, y+\theta_1' k)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}},$$

die sich auch schon bei Niccoletti findet.

§ 3.

Über die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Funktionen zweier reellen Variablen nach der Taylorschen Reihe.

Wir wollen nunmehr die Resultate der letzten Paragraphen dazu verwenden, um das in der Überschrift dieses Paragraphen genannte Problem zu lösen.

Wir senden einige allgemeine Bemerkungen voraus:

Es sei die Doppelsumme vorgelegt:

$$\begin{aligned} &a_{00} + a_{10} + \cdots a_{m0} \\ &+ a_{01} + a_{11} + \cdots a_{m1} \\ &+ a_{0n} + a_{1n} + \cdot \cdot a_{mn} \end{aligned}$$

die wir durch S_{mn} bezeichnen wollen. Lassen wir m und n unendlich groß werden, so geht dieselbe in eine konvergierende unendliche Doppelreihe über, wenn:

$$\lim_{m=\infty,\ n=\infty} S_{mn}$$

einen bestimmten Wert besitzt. Hieraus folgt, daß jedenfalls sein muß:

$$\begin{aligned} &\lim a_{mn} = 0, \\ &\lim (S_{mn} - S_{m-1\,n}) = 0, \\ &\lim (S_{mn} - S_{m\,n-1}) = 0, \end{aligned}$$

die drei Grenzwerte in der bekannten Weise genommen. Die beiden letzten Bedingungen können wir schreiben:

$$\begin{aligned} &\lim (a_{m0} + a_{m1} + \cdots a_{mn}) = 0, \\ &\lim (a_{0n} + a_{1n} + \cdots a_{mn}) = 0. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbemerkungen nehmen wir an, daß für alle h und k, die den Ungleichungen genügen:

$0 \leqq h < R, \quad 0 \leqq k < R'$ (R, R' beliebige positive Größen),

die Darstellung möglich sei:

$$(1) \qquad f(x+h,\ y+k) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{h^r k^s}{r!\,s!}.$$

Sicherlich werden dann die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

für endliche Werte von r und s bestimmte Werte besitzen müssen, ferner wird für die genannten Werte von h und k die gliedweise Differentiation erlaubt sein.

Wir erhalten demgemäß:

$$\frac{\partial^{m+n} f(x+h,\, y+k)}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_r \sum_s \frac{\partial^{r+m+s+n} f(x,y)}{\partial x^{r+m} \partial y^{s+n}} \frac{h^r k^s}{r!\, s!}$$

insbesondere wird für $k = 0$ und $m = 0$ resp. $h = 0$, $n = 0$ sich ergeben:

$$\frac{\partial^n f(x+h,\, y)}{\partial y^n} = \sum_r \frac{\partial^{r+n} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^n} \frac{h^r}{r!},$$

$$\frac{\partial^m f(x,\, y+k)}{\partial x^m} = \sum_s \frac{\partial^{m+s} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^s} \frac{k^s}{r!}.$$

Setzen wir nun in Gleichung (1):

$$\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{h^m k^n}{m!\, n!} = a_{mn},$$

so erhalten wir die am Anfang dieses Paragraphen untersuchte unendliche Doppelreihe.

Da sie konvergiert, so müssen sicherlich die Bedingungen erfüllt sein:

$$\lim a_{mn} = \lim \frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{h^m k^n}{m!\, n!} = 0$$

$$\lim (a_{m0} + a_{m1} + \cdots a_{mn}) = \lim \frac{h^m}{m!} \sum_0^n \frac{\partial^{m+s} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^s} \frac{k^s}{s!} = 0$$

oder also:

$$\lim \frac{h^m}{m!} \frac{\partial^m f(x,\, y+k)}{\partial x^m} = 0.$$

Genau so folgt:

$$\lim \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n f(x+h,\, y)}{\partial y^n} = 0.$$

Aus diesen drei Bedingungen, die jedenfalls erfüllt sein müssen, können wir die folgenden weiteren Folgerungen ziehen:

Wir bilden den Ausdruck:

$$f(x+h+h',\, y+k+k')$$

unter der Voraussetzung, daß die Ungleichungen bestehen:

$$0 \leqq h \leqq h+h' < R,\ 0 \leqq k \leqq k+k' < R',$$

so wird derselbe gleich:

$$\sum_r \sum_s \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{(h+h')^r (k+k')^s}{r!\,s!}.$$

Wir können diesen Ausdruck nach Potenzen von h' und k' ordnen und finden die Darstellung:

$$\sum_r \sum_s \frac{\partial^{r+s} f(x+h, y+k)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{h'^r k'^s}{r!\,s!}.$$

Wenn dieser Ausdruck aber konvergiert, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\lim \frac{h'^m}{m!} \frac{\partial^m f(x+h, y+k+k')}{\partial x^m} = 0, \quad \lim \frac{k'^n}{n!} \frac{\partial^n f(x+h+h', y+k)}{\partial y^n} = 0,$$

$$\lim \frac{h'^m k'^n}{m!\,n!} \frac{\partial^{m+n} f(x+h, y+k)}{\partial x^m \partial y^n} = 0.$$

Wir wollen diese Bedingungen die Bedingungen (A) nennen, dann folgt der Lehrsatz:

Als notwendige Bedingungen für die Entwickelung einer reellen Funktion zweier veränderlichen Größen in eine unendliche Reihe von der Form:

$$\sum \sum \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{h^r k^s}{r!\,s!}$$

für alle Werte von h und k, die den Ungleichungen Genüge leisten:

$$0 \leqq h < R, \quad 0 \leqq k < R'$$

ergeben sich die folgenden:

(1) $f(x,y)$ muß für alle Werte x, y im Rechteck x, y; $x+R$, $y+R'$ bestimmte endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzen.

(2) es müssen die Bedingungen (A) bestehen.

Es soll jetzt bewiesen werden, daß die notwendigen Bedingungen auch die hinreichenden sind. Wir wollen dazu annehmen, daß der Satz bewiesen sei für das Innere eines Rechtecks:

$$0, 0;\ r, r',$$

vorausgesetzt, daß:

$$r < R, \quad r' < R'$$

ist und behaupten, er gilt dann auch für das Innere des Rechtecks:

$$0, 0;\ r + \frac{R-r}{2},\ r' + \frac{R'-r'}{2}.$$

In der Tat, nach Annahme soll, wenn:

$$r_1 < r,\ r_1' < r'$$

ist, die Gleichung bestehen:

$$(2) \qquad f(x+r_1,\ y+r_1') = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\partial^{\mu_1+\nu_1} f(x,y)}{\partial x^{\mu_1} \partial y^{\nu_1}} \frac{r_1^{\mu_1} r_1'^{\nu_1}}{\mu_1!\ \nu_1!},$$

ferner wird der Ansatz erlaubt sein:

$$f(x+r_1+h'',\ y+r_1'+k'') = \sum_0^m \sum_0^n \frac{\partial^{\mu+\nu} f(x+r_1,\ y+r_1')}{\partial x^\mu \partial y^\nu} h''^\mu k''^\nu + R_{mn},$$

wenn unter R_{mn} die Größe verstanden wird:

$$\frac{\partial^m f(x+r_1+\theta h'', y+r_1'+k'')}{\partial x^m} \frac{h''^m}{m!} + \frac{\partial^n f(x+r_1+h'', y+r_1'+\theta' k'')}{\partial y^n} \frac{k''^n}{n!}$$
$$- \frac{\partial^{m+n} f(x+r_1+\theta_1 h'',\ y+r_1'+\theta_1' k'')}{\partial x^m \partial y^n} \frac{h''^m}{m!} \frac{k''^n}{n!},$$

und die Ungleichungen bestehen:

$$0 < r_1 + h'' < R,\ 0 < r_1' + k'' < R'.$$

Wenn nun der Rest verschwände, so könnten wir die Entwicklung bis in die Unendlichkeit fortsetzen. Das geschieht aber nach Annahme, wenn:

$$r_1 + h'' + h'' < R,\ r_1' + k'' + k'' < R'$$

ist, oder also, wenn die Ungleichungen bestehen:

$$h'' < \frac{R - r_1}{2},\ k'' < \frac{R' - r_1'}{2}.$$

Wenn also diese Annahmen erfüllt sind, können wir setzen:

$$(3)\ f(x+r_1+h'', y+r_1'+k'') = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\partial^{\mu+\nu} f(x+r_1, y+r_1')}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \frac{h''^\mu k''^\nu}{\mu!\ \nu!}.$$

Nun hatten wir die Richtigkeit der Gleichung (2) angenommen. Aus ihr folgt:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f(x+r_1, y+r_1')}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{\partial^{\mu+\mu_1+\nu+\nu_1} f(x,y)}{\partial x^{\mu+\mu_1} \partial y^{\nu+\nu_1}} \frac{r_1^{\mu_1} r_1'^{\nu_1}}{\mu_1!\ \nu_1!}.$$

Berücksichtigen wir diese Ausdrücke, so können wir Gleichung (3) schreiben:

$$f(x+r_1+h'', y+r_1'+k'')=\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{\partial^{\mu+\nu} f(x,y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\,\frac{(r_1+h'')^\mu}{\mu!}\,\frac{(r_1'+k'')^\nu}{\nu!}$$

oder, wenn wir:

$$r_1 + h'' = h,\ r_1' + k'' = k$$

setzen, so folgt das Resultat:

Die Entwicklung:

$$f(x+h,\ y+k) = \sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{\partial^{\mu+\nu} f(x,y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\,\frac{h^\mu k^\nu}{\mu!\,\nu!}$$

gilt für alle h und k, die den Ungleichungen Genüge leisten:

$$h < r_1 + \frac{R-r_1}{2},\quad k < r_1' + \frac{R'-r_1'}{2},$$

und das sollte gerade bewiesen werden.

Die Schlüsse stützten sich wesentlich auf die Annahme, daß die Richtigkeit der Gleichung (1) innerhalb der angegebenen Grenzen bewiesen sei. Das ist aber der Fall, wenn wir $r = \frac{R}{2}$, $r' = \frac{R'}{2}$ setzen.

Damit sind wir, wie wohl nicht näher auseinander gesetzt zu werden braucht, am Ziele und haben *die notwendigen Bedingungen auch als die hinreichenden nachgewiesen.*

In bezug auf den Inhalt dieses Paragraphen werde auf die schon genannte Arbeit von NICCOLETTI, daneben auf eine Arbeit von BIERMANN im 48. Bande der mathematischen Annalen und auf eine Arbeit von PRINGSHEIM in den Mathematical Papers read at the international mathematical congress Chicago 1893 pag. 288 sequ. verwiesen. In der Arbeit von NICCOLETTI wird dasselbe Problem in anderer Weise gelöst.

§ 4.

Erste Ableitung der Mac-Laurinschen Summenformel für Funktionen zweier veränderlichen Größen in der Rechtecksform.

Aus den Untersuchungen der früheren Paragraphen folgt die Formel:

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$
$$= \sum_1^{2m}\sum_1^{2n} \frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}\,\frac{h^r k^s}{r!\,s!} + \frac{h^{2m+1}}{2m!} R_1 + \frac{k^{2n+1}}{2n!} R_2 - \frac{h^{2m+1} k^{2n+1}}{2m!\ 2n!} R_3,$$

wobei für die Größen R die folgenden Ausdrücke gewählt werden mögen:

$$R_1 = \int_0^1 \left(\frac{\partial^{2m+1} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{2m+1}} - \frac{\partial^{2m+1} f(x+hu, y)}{\partial x^{2m+1}} \right) (1-u)^{2m} du,$$

$$R_2 = \int_0^1 \left(\frac{\partial^{2n+1} f(x+h, y+kv)}{\partial y^{2n+1}} - \frac{\partial^{2n+1} f(x, y+kv)}{\partial y^{2n+1}} \right) (1-v)^{2n} dv,$$

$$R_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{2m+2n+2} f(x+hu, y+kv)}{\partial x^{2m+1} \partial y^{2n+1}} (1-u)^{2m} (1-v)^{2n} du dv.$$

Wir wollen die linke Seite kurz durch $F(x, y)$ bezeichnen. Sodann bilden wir die analogen Gleichungen für $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ usw. bis zum $2m-1$ten Differentialquotienten nach x und dem $2n-1$ten Differentialquotienten nach y. Die beiden ersten Gleichungen werden dann lauten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_1^{2m-1} \sum_1^{2n} \frac{\partial^{r+s+1} f(x, y)}{\partial x^{r+1} \partial y^s} \frac{h^r k^s}{r! s!} + \cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_1^{2m} \sum_1^{2n-1} \frac{\partial^{r+s+1} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^{s+1}} \frac{h^r k^s}{r! s!} + \cdots,$$

während die letzte Gleichung lautet:

$$\frac{\partial^{2m+2n-2} F(x, y)}{\partial x^{2m-1} \partial y^{2n-1}} = \frac{\partial^{2m+2n-1} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-1}} hk + \cdots.$$

Wir multiplizieren die auf diesem Wege gewonnenen Gleichungen der Reihe nach mit den Größen

$$\frac{b_r b_s h^r k^s}{r!\, s!}$$

wobei r die Werte $0, 1, \cdots 2m-1$, s die Werte $0, 1, \cdots 2n-1$ annehmen kann und die Größen b die Entwicklungskoeffizienten sind von:

$$\frac{v}{e^v - 1} = 1 + b_1 v + b_2 \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \cdots.$$

Dann ergibt sich links:

$$\sum_0^{2m-1}\sum_0^{2n-1}\frac{\partial^{r+s}F(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}\frac{b_r b_s h^r k^s}{r!\ s!}.$$

Auf der rechten Seite erhalten wir zunächst das Glied:

$$hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

dann folgt ein Restglied, das wir schreiben können:

$$\frac{h^{2m+1}k}{2m!}S_1+\frac{k^{2n+1}h}{2n!}S_2+\frac{h^{2m+1}k^{2n+1}}{2m!\ 2n!}S_3.$$

Um die Größen S zu bilden, nehmen wir zunächst die ersten Teile der entsprechenden Reste von:

$$F(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial x},\quad \cdots\frac{\partial^{2m-1}F}{\partial x^{2m-1}}.$$

Dieselben lauten:

$$\frac{h^{2m+1}}{2m!}\int_0^1\left(\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,\,y+k)}{\partial x^{2m+1}}-\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}}\right)(1-u)^{2m}du,$$

$$\frac{h^{2m}}{2m-1!}\int_0^1\left(\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,y+k)}{\partial x^{2m+1}}-\frac{\partial^{2n+1}f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}}\right)(1-u)^{2m-1}du,$$

. . . . .

$$h^2\int_0^1\left(\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,\,y+k)}{\partial x^{2m+1}}-\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,\,y)}{\partial x^{2m+1}}\right)(1-u)du.$$

Diese Größen sind zu multiplizieren mit:

$$1,\ hb_1,\ \frac{h^2b_2}{1\cdot 2},\ \cdots\ \frac{h^{2m-1}b_{2m-1}}{2m-1!}$$

und zu addieren. Es ergibt sich der Ausdruck:

$$\frac{h^{2m+1}}{2m!}\int_0^1\left(\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,\,y+k)}{\partial x^{2m+1}}-\frac{\partial^{2m+1}f(x+hu,\,y)}{\partial x^{2m+1}}\right)\varphi(u,2m)du,$$

wobei für $\varphi(u,2m)$ gesetzt ist:

$$(1-u)^{2m}+(2m)_1b_1(1-u)^{2m-1}+\cdots(2m)_1b_{2m-1}(1-u).$$

Damit ist dieser Teil der Restglieder erledigt.

Wir nehmen nunmehr die Ausdrücke:

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial^{2m} F}{\partial y \partial x^{2m-1}}$$

und operieren mit ihnen analog wie vorhin. Es tritt dann an Stelle der Klammern in den Integralen die Größe:

$$\frac{\partial^{2m+2} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{2m+1} \partial y} - \frac{\partial^{2m+2} f(x+hu, y)}{\partial x^{2m+1} \partial y},$$

daneben tritt der Faktor kb_1 hinzu.

Es ergibt sich also die Größe:

$$\frac{k^{2m+1} k b_1}{2m!} \int_0^1 \left(\frac{\partial^{2m+2} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{2m+1} \partial y} - \frac{\partial^{2m+2} f(x+hu, y)}{\partial x^{2m+1} \partial y} \right) \varphi(u, 2m) du.$$

So geht es weiter, schließlich erhalten wir:

$$\frac{k^{2m+1} k^{2n-1} b_{2n-1}}{2m!\ 2n-1!} \int_0^1 \left(\frac{\partial^{2m+2n} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{2m+1} \partial y^{2n-1}} - \frac{\partial^{2m+2n} f(x+hu, y)}{\partial x^{2m+1} \partial y^{2n-1}} \right) \varphi(u, 2m) du.$$

Alle diese Größen sind zu addieren.

Setzen wir für den Augenblick:

$$\frac{\partial^{2m+1} f(x+hu, y+k)}{\partial x^{2m+1}} = \psi(x+hu, y+k)$$

etc.,

so tritt in der gesuchten Summe jedenfalls die Größe auf:

$$\psi(x+hu, y+k) - \psi(x+hu, y)$$
$$+ kb_1 \left(\frac{\partial \psi(x+hu, y+k)}{\partial y} - \frac{\partial \psi(x+hu, y)}{\partial y} \right)$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{k^{2n-1} b_{2n-1}}{2n-1!} \left(\frac{\partial^{2n-1} \psi(x+hu, y+k)}{\partial y^{2n-1}} - \frac{\partial^{2n-1} \psi(x+hu, y)}{\partial y^{2n-1}} \right)$$

und diese Größe ist gleich:

$$k \frac{\partial \psi(x+hu, y)}{\partial y} + \frac{k^{2n+1}}{2n!} \int_0^1 \frac{\partial^{2n+1} \psi(x+hu, y+kv)}{\partial y^{2n+1}} \varphi(v, 2n) dv.$$

Unter solchen Umständen wird unsere Summe:

$$\frac{h^{2m+1}k}{2m!}\int_0^1 \frac{\partial^{2m+2}f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}\partial y}\varphi(u,2m)du$$

$$+\frac{h^{2m+1}k^{2n+1}}{2m!\,2n!}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{2m+2n+2}f(x+hu,y+kv)}{\partial x^{2m+1}\partial y^{2n+1}}\varphi(u,2m)\varphi(v,2n)dudv.$$

Analog ergibt sich ein zweiter Teil:

$$\frac{k^{2n+1}h}{2n!}\int_0^1 \frac{\partial^{2n+2}f(x,y+kv)}{\partial x\partial y^{2n+1}}\varphi(v,2n)dv$$

$$+\frac{h^{2m+1}k^{2n+1}}{2m!\,2n!}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{2m+2n+2}f(x+hu,y+kv)}{\partial x^{2m+1}\partial y^{2n+1}}\varphi(u,2m)\varphi(v,2n)dudv.$$

Endlich wird als dritter Teil die Größe auftreten:

$$-\frac{h^{2m+1}k^{2n+1}}{2m!\,2n!}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{2m+2n+2}f(x+hu,y+kv)}{\partial x^{2m+1}\partial y^{2n+1}}\varphi(u,2m)\varphi(v,2n)dudv.$$

Fassen wir alles zusammen, so können wir den Größen S die folgenden Werte geben:

$$S_1=\int_0^1 \frac{\partial^{2m+2}f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}\partial y}\varphi(u,2m)du,$$

$$S_2=\int_0^1 \frac{\partial^{2n+2}f(x,y+kv)}{\partial x\partial y^{2n+1}}\varphi(v,2n)dv,$$

$$S_3=\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{2m+2n+2}f(x+hu,y+kv)}{\partial x^{2m+1}\partial y^{2n+1}}\varphi(u,2m)\varphi(v,2n)dudv.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: *Bezeichnet man den Ausdruck:*

$$f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$$

durch $F(x,y)$ *so findet die Beziehung statt:*

$$\sum_0^{2m-1}\sum_0^{2n-1}\frac{\partial^{r+s}F(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}\frac{b_rb_sh^rk^s}{r!\,s!}=hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+S,$$

wobei S gleich:

$$\frac{h^{2m+1}k}{2m!}S_1 + \frac{k^{2n+1}h}{2n!}S_2 + \frac{h^{2m+1}k^{2n+1}}{2m!\ 2n!}S_3$$

gesetzt ist und S_1, S_2, S_3 die vorhin angegebenen Werte besitzen.

Damit sind alle Schwierigkeiten überwunden, alles weitere deuten wir nur kurz an.

Wir setzen an Stelle von x und y resp. $x + \varrho h$, $y + \sigma k$ und lassen ϱ und σ unabhängig von einander die Werte annehmen:

$$0, 1, \cdots p-1; \quad 0, 1, \cdots q-1,$$

dann ergibt sich abgesehen von einem Reste für die Summe:

$$hk\sum_0^{p-1}\sum_0^{q-1}\frac{\partial^2 f(x+h\varrho, y+k\sigma)}{\partial x\,\partial y}$$

der Ausdruck:

$$\sum_0^{2m-1}\sum_0^{2n-1}\frac{\partial^{r+s}\Phi(x,y)}{\partial x^r\,\partial y^s}\,\frac{b_r b_s h^r h^s}{r!\ s!},$$

wobei gesetzt ist:

$$\Phi(x,y) = f(x+ph, y+qk) - f(x+ph, y) - f(x, y+qk) + f(x,y).$$

Der Rest nimmt die einfache Form an:

$$-\sum S,$$

wobei diese letzte Summe wohl kaum weiter ausgeführt zu werden braucht. Der Rest hat eine Form, die eine Abschätzung seines Wertes in einer Anzahl von Fällen zuläßt.

In solchen Fällen dürfte die gefundene Formel zur angenäherten numerischen Berechnung von Doppelsummen herangezogen werden können, indessen würde es den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, hierauf näher einzugehen.

§ 5.

Zweite Ableitung der Mac-Laurinschen Summenformel für Funktionen zweier veränderlichen Größen in der Rechtecksform.

Auf einem noch einfacheren Wege können wir die Mac-Laurinsche Summenformel des vorigen Paragraphen folgendermaßen ableiten.

Nach der bekannten Formel für Funktionen einer veränderlichen Größe ergeben sich für die Ausdrücke

$$\sum_0^{2m-1} \frac{\partial^r F(x,y)}{\partial x^r} \frac{b_r h^r}{r!},$$

$$\sum_0^{2m-1} \frac{\partial^{r+1} F(x,y)}{\partial x^r \partial y} \frac{b_r h^r}{r!},$$

$$\cdots$$

$$\sum_0^{2m-1} \frac{\partial^{r+2n-1} F(x,y)}{\partial x^r \partial y^{2n-1}} \frac{b_r h^r}{r!}$$

die resp. Darstellungen:

$$h\left(\frac{\partial f(x,y+k)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{h^{2m+1}}{2m!}\int_0^1 \left(\frac{\partial^{2m+1} f(x+hu,y+k)}{\partial x^{2m+1}} - \frac{\partial^{2m+1} f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}}\right)\varphi(u,2m)du,$$

$$h\left(\frac{\partial^2 f(x,y+k}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+\frac{h^{2m+1}}{2m!}\int_0^1 \left(\frac{\partial^{2m+2} f(x+hu,y+k)}{\partial x^{2m+1}\partial y} - \frac{\partial^{2m+2} f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}\partial y}\right)\varphi(u,2m)du,$$

$$\cdots$$

$$h\left(\frac{\partial^{2n} f(x,y+k)}{\partial x \partial y^{2n-1}} - \frac{\partial^{2n} f(x,y)}{\partial x \partial y^{2n-1}}\right)$$

$$+\frac{h^{2m+1}}{2m!}\int_0^1 \left(\frac{\partial^{2m+2n} f(x+hu,y+k)}{\partial x^{2m+1}\partial x^{2n-1}} - \frac{\partial^{2m+2n} f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}\partial y^{2n-1}}\right)\varphi(u,2m)du.$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir der Reihe nach mit:

$$1,\ b_1 k,\ b_2 \frac{k^2}{2!},\ \cdots\ b_{2n-1}\frac{k^{2n-1}}{2n-1!},$$

und addieren. Es ergibt sich dann einerseits die Doppelsumme:

$$\sum_0^{2m-1}\sum_0^{2n-1} \frac{\partial^{r+s} F(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \frac{b_r b_s h^r k^s}{r!s!}.$$

Andrerseits erhalten wir zunächst die Summe:

$$h\sum_0^{2n-1}\left(\frac{\partial^{s+1} f(x,y+k)}{\partial x \partial y^s} - \frac{\partial^{s+1} f(x,y)}{\partial x \partial y^s}\right)\frac{b_s k^s}{s!},$$

die wir auch schreiben können:

$$hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{k^{2n+1}}{2n!}h\int_0^1\frac{\partial^{2n+2}f(x,y+kv)}{\partial x\partial y^{2n+1}}\varphi(v,2n)dv.$$

Es ergibt sich dann weiter eine Summe von Integralen. Fassen wir dieselben zusammen, so tritt innerhalb des Integralzeichens jedenfalls die Summe auf:

$$\sum_0^{2n-1}\left(\frac{\partial^{2m+1+s}f(x+hu,y+k)}{\partial x^{2m+1}\partial y^s}-\frac{\partial^{2m+1+s}f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}\partial y}\right)\frac{b_s k^s}{s!},$$

die wir schreiben können:

$$k\frac{\partial^{2m+2}f(x+hu,y)}{\partial x^{2m+1}\partial y}+\frac{k^{2n+1}}{2n!}\int_0^1\frac{\partial^{2m+2n+2}f(x+hu,y+kv)}{\partial x^{2m+1}\partial y^{2n+1}}\varphi(v,2n)dv.$$

Fassen wir alles zusammen, so ergibt sich die Formel (1) des vorigen Paragraphen, die als die fundamentale bezeichnet werden kann:

$$(1)\qquad \sum_0^{2m-1}\sum_0^{2n-1}\frac{\partial^{r+s}F(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}\frac{b_r b_s h^r h^s}{r!s!}=hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+S.$$

In bezug auf die letzten Paragraphen werde auf die Arbeit des Verfassers verwiesen: Über Bernoullische Zahlen und Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen. Berichte der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1903.

§ 6.

Aufstellung von Interpolationsformeln im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen in der Rechtecksform.

Wir wollen nun zeigen, daß auch die Lagrangesche und andere Interpolationsformeln im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen Analogien in der Rechtecksform haben. In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf die Ableitung der einfachsten hierhin gehörenden Formeln, die wir überdies, um möglichst elementar vorzugehen, einzeln ableiten wollen. In bezug auf diese Untersuchungen möge vor allem auf die Differenzenrechnung von Markoff verwiesen werden.

Wir legen unseren Betrachtungen eine Funktion $f(x,y)$ zweier veränderlichen reellen Größen zugrunde, verstehen unter y_1,

$y_2, \ldots y_n$ beliebige Werte von y und definieren zwei weitere Funktionen

$$\psi(y) \text{ und } F(x, y)$$

durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \psi(y) = (y - y_1) \ldots (y - y_n),$$

$$(2) \qquad F(x, y) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{f(x, y_s)}{y - y_s} \frac{\psi(y)}{\psi'(y_s)}.$$

Wenden wir dann dieselben Schlüsse an, wie sie in der Theorie der Funktionen einer veränderlichen Größe üblich sind, so folgt:

$$(3) \qquad f(x, y) = F(x, y) + \frac{\psi(y)}{n!} \frac{\partial^n f(x, \eta)}{\partial \eta^n},$$

wobei η eine mittlere unter den Zahlen:

$$y_1, y_2, \ldots y_n, y$$

bedeutet, die noch von x abhängen wird.

Wir wollen ferner unter $x_1, x_2, \ldots x_m$ beliebige Werte von x verstehen, ferner $\varphi(x)$ durch die Gleichung definieren:

$$(4) \qquad \varphi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_m),$$

so können wir andrerseits setzen:

$$F(x, y) = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{F(x_r, y)}{x - x_r} \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_r)} + \frac{\varphi(x)}{m!} \frac{\partial^m (F\xi, y)}{\partial \xi^m}$$

wobei ξ einen mittleren Wert unter den Größen:

$$x_1, x_2, \ldots x_m, x$$

bedeutet.

Aus Gleichung (2) ergibt sich dann:

$$F(x, y) = \sum_r \sum_s \frac{f(x_r, y_s)}{x - x_r \cdot y - y_s} \frac{\varphi(x)\psi(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)} + \frac{\varphi(x)}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, y)}{\partial \xi^m}$$

und mit Hilfe der Gleichung (3):

$$(5) \quad f(x, y) = \sum_r \sum_s \frac{f(x_r, y_s)}{x - x_r \cdot y - y_s} \frac{\varphi(x)\psi(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)} + \frac{\varphi(x)}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, y)}{\partial \xi^m} + \frac{\psi(y)}{n!} \frac{\partial^n f(x, \eta)}{\partial \eta^n}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

Lehrsatz. Die Funktion

$$\sum_r \sum_s \frac{f(x_r, y_s)}{x - x_r \cdot y - y_s} \frac{\varphi(x)\psi(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)}$$

stimmt an den Stellen x_r, y_s mit der willkürlich vorgelegten Funktion $f(x, y)$ überein. Sie stellt die letztere angenähert dar und zwar ist der Fehler gleich:

$$\frac{\varphi(x)}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, y)}{\partial \xi^m} + \frac{\psi(y)}{n!} \frac{\partial^n f(x, \eta)}{\partial \eta^n},$$

wobei die Größen ξ, η und $F(x, y)$ die vorhin angegebene Bedeutung besitzen.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und definieren eine Funktion $F(x, y)$ durch die Gleichung:

$$F(x, y) = \sum_s f(x, y_s) V_s(y) + \frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)} \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial y_1}, \tag{6}$$

wobei gesetzt ist:

$$V_s = \frac{\psi'(y_1) - (y - y_s)\psi_s'(y_1)}{(y - y_s)\psi'(y_1)\psi'(y_s)} \psi(y). \tag{7}$$

Diese Funktion $F(x, y)$ kann dann auch geschrieben werden:

$$F(x, y) = f(x, y) - \frac{(y - y_1)\psi(y)}{n + 1!} \frac{\partial^{n+1} f(x, \eta)}{\partial \eta^{n+1}},$$

wobei η wieder einen mittleren Wert unter den Größen:

$$y_1, y_2, \ldots y_n, y$$

bedeutet.

Die Funktion hat dann an den Stellen:

$$x, y_1;\ x, y_2;\ \ldots\ x, y_n$$

dieselben Werte wie $f(x, y)$, daneben stimmt der partielle Differentialquotient

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

für $y = y_1$ überein mit dem partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Als Funktion von x allein aufgefaßt können wir $F(x, y)$ in die Form bringen:

$$F(x, y) = \sum_r \frac{F(x_r, y)}{x - x_r} \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_r)} + \frac{\varphi(x)}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, y)}{\partial \xi^m}.$$

Auf Grund leichter Transformationen ergibt sich dann die Darstellung:

$$(8)\qquad f(x,y)=\sum_r\sum_s \frac{f(x_r,y_s)}{x-x_r}\,\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_r)}\,V_s(y)$$
$$+\frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\sum_r \frac{\partial f(x_r,y_1)}{\partial y_1}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_r\cdot\varphi'(x_r)}+R,$$

$$R=\frac{\varphi(x)}{m!}\,\frac{\partial^m F(\xi,y)}{\partial\xi^m}+\frac{(y-y_1)\psi(y)}{n+1!}\,\frac{\partial^{n+1}f(x,\eta)}{\partial\eta^{n+1}}.$$

Wir können die Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$(9)\qquad f(x,y)=\sum_r\sum_s f(x_r,y_s)\,\frac{\varphi_r(x)\psi_s(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)}$$
$$+\frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\sum A_r\,\frac{\varphi_r(x)}{\varphi'(x_r)}+R,$$

wobei A_r den Wert besitzt:

$$A_r=\frac{\partial f(x_r,y_1)}{\partial y_1}-\sum\frac{\psi_s'(y_1)}{\psi'(y_s)}\,f(x_r,y_s)$$

und R der vorhin angegebene Rest ist.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die Funktion

$$\sum_r\sum_s f(x_r,y_s)\,\frac{\varphi_r(x)\psi_s(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)}+\frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\sum A_r\,\frac{\varphi_r(x)}{\varphi'(x_r)}$$

hat an den Stellen

$$x_r,\ y_s$$

dieselben Werte wie $f(x,y)$, daneben stimmt der partielle Differentialquotient derselben nach y an den Punkten:

$$x_r,\ y_1$$

mit dem partiellen Differentialquotienten der Funktion $f(x,y)$ nach y überein.

Sie stellt die Funktion $f(x,y)$ angenähert dar, und zwar ist der Fehler gleich:

$$\frac{\varphi(x)}{m!}\,\frac{\partial^m F(\xi,y)}{\partial\xi^m}+\frac{(y-y_1)\psi(y)}{n+1!}\,\frac{\partial^{n+1}f(x,\eta)}{\partial\eta^{n+1}}.$$

Ein analoger Satz könnte durch Vertauschung von x und y abgeleitet werden.

Etwas allgemeiner können wir folgendermaßen verfahren. Wir definieren eine Funktion von x und y durch die Gleichung:

$$(10) \qquad F(x,y) = \sum f(x,y_s)\,V_s(y) - \frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\,\frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1},$$

dann ist nach bekannten Regeln:

$$F(x,y) = f(x,y) - \frac{(y-y_1)}{n+1!}\,\psi(y)\,\frac{\partial^{n+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{n+1}}.$$

Andrerseits erhalten wir für $F(x,y)$ als Funktion von x allein aufgefaßt die Darstellung:

$$\sum F(x_r,y)\,U_r(x) + \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)}\,\frac{\partial F(x_1,y)}{\partial x_1} + \frac{(x-x_1)}{m+1!}\,\varphi(x)\,\frac{\partial^{m+1} F(\xi,y)}{\partial \xi^{m+1}},$$

wobei gesetzt ist:

$$U_r(x) = \frac{\varphi'(x_1) - (x-x_r)\,\varphi_r'(x_1)}{(x-x_r)\,\varphi'(x_1)\,\varphi'(x_r)}\,\varphi(x).$$

Mit Hilfe leichter Operationen ergibt sich hieraus für $f(x,y)$ die Darstellung:

$$(11) \quad \sum\sum f(x_r,y_s)\,U_r(x)\,V_s(y) + \frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\sum \frac{\partial f(x_r,y_1)}{\partial y_1}\,U_r(x)$$
$$+ \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)}\sum \frac{\partial f(x_1,y_s)}{\partial x_1}\,V_s(y) + \frac{\varphi(x)\psi(y)}{\varphi'(x_1)\psi'(y_1)}\,\frac{\partial^2 f(x_1,y_1)}{\partial x_1\,\partial y_1} + R,$$

wobei der Rest die Form annimmt:

$$R = \frac{(x-x_1)\varphi(x)}{m+1!}\,\frac{\partial^{m+1} F(\xi,y)}{\partial \xi^{m+1}} + \frac{(y-y_1)\psi(y)}{n+1!}\,\frac{\partial^{n+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{n+1}}.$$

Sehen wir von dem Reste ab, so können wir unseren Ausdruck auch auf die Form bringen:

$$(12) \quad \sum\sum f(x_r,y_s)\,\frac{\varphi_r(x)\psi_s(y)}{\varphi'(x_r)\,\psi'(y_s)} + \frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\sum A_r\,\frac{\varphi_r(x)}{\varphi'(x_r)}$$
$$+ \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)}\sum B_s\,\frac{\psi_s(y)}{\psi'(y_s)} + C\,\frac{\varphi(x)\psi(y)}{\varphi'(x_1)\psi'(y_1)},$$

wenn unter A_r, B_s, C die Größen verstanden werden:

$$A_r = \frac{\partial f(x_r,y_1)}{\partial y_1} - \sum \frac{f(x_r,y_s)\,\psi_s'(y_1)}{\psi'(y_s)},$$

$$B_s = \frac{\partial f(x_1,y_s)}{\partial x_1} - \sum \frac{f(x_r,y_s)\,\varphi_r'(x_1)}{\varphi'(x_r)},$$

$$C = \sum\sum f(x_r, y_s)\frac{\varphi_r'(x_1)\psi_s'(y_1)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)} - \sum\frac{\partial f(x_1, y_s)}{\partial x_1}\frac{\psi_s'(y_1)}{\psi'(y_s)}$$
$$- \sum{}'\frac{\partial f(x_r, y_1)}{\partial y_1}\frac{\varphi_r'(x_1)}{\varphi'(x_r)} + \frac{\partial^2 f(x_1, y_1)}{\partial x_1 \partial y_1}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz. Die Funktion:

$$\sum\sum f(x_r, y_s)\frac{\varphi_r(x)\psi_s(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)} + \frac{\psi(y)}{\psi'(y_1)}\sum A_r\frac{\varphi_r(x)}{\varphi'(x_r)}$$
$$+ \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)}\sum B_s\frac{\psi_s(y)}{\psi'(y_s)} + C\frac{\varphi(x)\psi(y)}{\varphi'(x_1)\psi'(y_1)}$$

hat erstens an den Stellen:

$$x_r,\ y_s$$

dieselben Werte wie $f(x, y)$. Zweitens stimmen die ersten partiellen Differentialquotienten nach x resp. y an den Stellen:

$$x_1,\ y_s \quad resp. \quad x_r,\ y_1$$

mit den entsprechenden Differentialquotienten der Funktion $f(x, y)$ überein, und endlich drittens ist der zweite partielle Differentialquotient nach x und y im Punkte x_1, y_1 gleich dem entsprechenden Differentialquotienten von $f(x, y)$.

Sie stellt die Funktion $f(x, y)$ angenähert dar, und zwar ist der Fehler gleich:

$$\frac{(x - x_1)\psi(x)}{m+1!}\frac{\partial^{m+1} F(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1}} + \frac{(y - y_1)\varphi(y)}{n+1!}\frac{\partial^{n+1} f(x, \eta)}{\partial \eta^{n+1}}.$$

§ 7.

Angenäherte Berechnung von Doppelintegralen, welche über die Fläche eines Rechtecks erstreckt sind.

Wir wollen die Resultate des vorigen Paragraphen dazu anwenden, um die angenäherten Werte von Doppelintegralen anzugeben, die über die Fläche eines Rechtecks erstreckt sind. Die Seiten desselben mögen den Koordinatenachsen parallel sein, sodaß das zu untersuchende Integral die Form hat:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf die einfachsten Fälle und nehmen erstens an:

$$m = 1, \quad n = 1.$$

Nach dem ersten Lehrsatz des vorigen Paragraphen folgt dann der Ansatz:

$$f(x, y) = f(x_1, y_1) + (x - x_1)\frac{\partial F(\xi, y)}{\partial \xi} + (y - y_1)\frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta},$$

oder also wir erhalten:

$$(1) \qquad \int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)dxdy = (a_1 - a)(b_1 - b)f(x_1, y_1) + R,$$

wobei R die Form annimmt:

$$(2) \quad R = \int_a^{a_1}\int_b^{b_1} \frac{\partial F(\xi, y)}{\partial \xi}(x - x_1)dxdy + \int_a^{a_1}\int_b^{b_1} \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta}(y - y_1)dxdy.$$

In gewissen Fällen können wir dieselbe vereinfachen.

Wir wollen dazu an Stelle von x_1, y_1 der Reihe nach setzen:

$$a, b;\ a_1, b;\ a, b_1;\ a_1, b_1.$$

Es ergeben sich dann für das Integral:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)dxdy$$

die Darstellungen:

$$(a_1 - a)(b_1 - b)f(a, b) + \frac{(b_1 - b)(a_1 - a)}{2}\left((a_1 - a)\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} + (b_1 - b)\frac{\partial f(\xi', \eta')}{\partial \eta'}\right),$$

$$(a_1 - a)(b_1 - b)f(a_1, b) + \frac{(b_1 - b)(a_1 - a)}{2}\left(-(a_1 - a)\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} + (b_1 - b)\frac{\partial f(\xi', \eta')}{\partial \eta'}\right),$$

$$(a_1 - a)(b_1 - b)f(a, b_1) + \frac{(b_1 - b)(a_1 - a)}{2}\left((a_1 - a)\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} - (b_1 - b)\frac{\partial f(\xi', \eta')}{\partial \eta'}\right),$$

$$(a_1 - a)(b_1 - b)f(a_1, b_1) - \frac{(b_1 - b)(a_1 - a)}{2}\left((a_1 - a)\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} + (b_1 - b)\frac{\partial f(\xi', \eta')}{\partial \eta'}\right).$$

Fünftens wollen wir den Punkt $x_1 y_1$ in den Mittelpunkt des Rechtecks legen.

Dann kann der Rest mit Hilfe des Taylorschen Satzes in besonders einfacher Weise dargestellt werden. In der Tat, es ist:

$$f(x,y) = f(x_1,y_1) + (x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + (x-x_1)(y-y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} + R,$$

$$R = \frac{(x-x_1)^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f(\xi_1,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{(y-y_1)^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f(\xi',\eta')}{\partial \eta'^2} - \frac{(x-x_1)^2(y-y_1)^2}{2!\quad 2!}\frac{\partial^4 f(\xi'',\eta'')}{\partial \xi''^2 \partial \eta''^2},$$

wobei die Größen ξ und η die früher angegebenen Werte besitzen.

Setzt man nun:

$$x_1 = \frac{a+a_1}{2}, \quad y_1 = \frac{b+b_1}{2},$$

so ergibt sich das Resultat:

Der Wert eines Doppelintegrals erstreckt über ein Rechteck hat angenähert den Wert

$$(a_1-a)(b_1-b) f\left(\frac{a+a_1}{2}, \frac{b+b_1}{2}\right).$$

Der Rest hat die Form:

$$\frac{(a_1-a)^2}{24}\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{(b_1-b)^2}{24}\frac{\partial^2 f(\xi',\eta')}{\partial \eta'^2} - \frac{(a_1-a)^2}{24}\frac{(b_1-b)^2}{24}\frac{\partial^4 f(\xi'',\eta'')}{\partial \xi''^2 \partial \eta''^2}.$$

Wir nehmen zweitens an, daß m und n den Wert 2 besitzen möge, und zwar soll die Untersuchung nicht für allgemeine Punkte x_1, y_1; x_2, y_2 durchgeführt werden, sondern sofort für:

$$x_1 = a, \; y_1 = b; \; x_2 = a_1, \; y_2 = b_1.$$

Wenden wir dann wieder den ersten Lehrsatz des vorigen Paragraphen an, so folgt, daß wir für $f(x, y)$ den Ausdruck setzen können:

$$f(a,b)\frac{(x-a_1)(y-b_1)}{(a_1-a))b_1-b)} - f(a_1,b)\frac{(x-a)(y-b_1)}{(a_1-a)(b_1-b)} - f(a,b_1)\frac{(x-a_1)(y-b)}{(a_1-a)(b_1-b)}$$
$$+ f(a_1,b_1)\frac{(x-a)(y-b)}{(a_1-a)(b_1-b)}.$$

Der hierbei begangene Fehler hat die Form:

$$\frac{(x-a)(x-a_1)}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 F(\xi,y)}{\partial \xi^2} + \frac{(y-b)(y-b_1)}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f(x,\eta)}{\partial \eta^2}.$$

Hieraus ergibt sich der

Lehrsatz: Der Wert des Doppelintegrales:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

kann angenähert durch den Ausdruck dargestellt werden:

$$\tfrac{1}{4}(a_1-a)(b_1-b)(f(a,b) + f(a_1,b) + f(a,b_1) + f(a_1,b_1))$$

Der Fehler besitzt den Wert:

$$-\frac{(a_1-a)(b_1-b)}{12}\left((a_1-a)^2\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+(b_1-b)^2\frac{\partial^2 f(\xi',\eta')}{\partial\eta'^2}\right)$$

Wir nehmen jetzt drittens an, das m und n gleich 2 resp. 3 sein mögen.

Für die Punkte xy wählen wir von vornherein die Werte:

$$x_1=a,\ x_2=a_1;\ y_1=b,\ y_2=\frac{b+b_1}{2},\ y_3=b_1.$$

Wir stellen $f(x, y)$ nach dem zweiten Lehrsatz dar. Es ergibt sich dann von dem Faktor

$$\frac{1}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)^3}$$

abgesehen zunächst der Ausdruck:

$$\begin{aligned}&2(x-x_1)(f(x_2,y_1)(y-y_2)(y-y_3)-2f(x_2,y_2)(y-y_3)(y-y_1)\\&\qquad+f(x_2,y_3)(y-y_1)(y-y_2))\\&-2(x-x_2)(f(x_1,y_1)(y-y_2)(y-y_3)-2f(x_1,y_2)(y-y_3)(y-y_1)\\&\qquad+f(x_1,y_3)(y-y_1)(y-y_2)).\end{aligned}$$

Zweitens ist die Größe zu bilden:

$$\frac{\psi(y)}{\psi'(y)}\sum A_r\frac{\varphi(x)}{(x-x_r)\varphi'(x_r)},$$

indessen können wir von derselben absehen, da das entsprechende Integral verschwindet. Es bleibt somit nur noch der Rest zu betrachten übrig, den wir schreiben können:

$$\frac{(y-y_1)(y-y_2)^2(y-y_3)}{4!}\frac{\partial^4 f(x,\eta)}{\partial\eta^4}+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2!}\frac{\partial^2 F(\xi,y)}{\partial\xi^2}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Der Wert des Doppelintegrales:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

kann angenähert durch den Ausdruck dargestellt werden:

$$\begin{aligned}&\frac{(a_1-a)(b_1-b)}{12}(f(a,b)+f(a_1,b)+4f\left(a,\frac{b+b_1}{2}\right)+4f\left(a_1,\frac{b+b_1}{2}\right)\\&\qquad+f(a,b_1)+f(a_1,b_1))\end{aligned}$$

Der Fehler kann in die Form gebracht werden:

$$-\frac{(a_1-a)(b_1-b)}{12}\left(\frac{1}{15}\left(\frac{b_1-b}{2}\right)^4\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial\eta^4}+(a_1-a)^2\frac{\partial^2 F(\xi',\eta')}{\partial\xi'^2}\right).$$

Entwickelt man das bestimmte Integral, sowie den angenäherten Wert nach Potenzen von a_1-a, b_1-b, so stimmen die Entwickelungen überein in den Potenzen:

$$(a_1-a)^r(b_1-b)^s$$

für r gleich 0, 1; s gleich 0, 1, 2, 3.

Der Fall $m=3$, $n=2$ ist analog zu behandeln.

Wir nehmen schließlich in diesem Paragraphen den Fall:

$$m=3,\quad n=3$$

und zwar wollen wir von vorneherein setzen:

$$x_1=a,\quad x_2=\frac{a+a_1}{2},\quad x_3=a_1,$$

$$y_1=b,\quad y_2=\frac{b+b_1}{2},\quad y_3=b_1.$$

Wir stellen $f(x, y)$ vermittels des letzten Lehrsatzes des vorigen Paragraphen dar. Wir können uns dabei auf die Doppelsumme

$$\sum\sum f(x_r, y_s)\frac{\varphi_r(x)\psi_s(y)}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)}$$

und auf den Rest beschränken, da die Integrale über die anderen Glieder verschwinden. Es möge in bezug hierauf auf das MARKOFFsche Lehrbuch pag. 57 sq. verwiesen werden. Setzt man:

$$X_{rs}=f(x_r, y_s),$$

so ergibt sich mit wenigen Schlüssen der

Lehrsatz: Angenähert wird das Doppelintegral:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\,dx\,dy$$

durch den Ausdruck dargestellt:

$$\frac{(a_1-a)(b_1-b)}{9}(X_{11}+4X_{21}+X_{31}+4X_{12}+16X_{22}+4X_{32}+X_{13}+4X_{23}+X_{33}).$$

Der Fehler kann in die Form gebracht werden:

$$-\frac{4}{15}\left(\frac{a_1-a}{2}\right)\left(\frac{b_1-b}{2}\right)\frac{1}{4!}\left(\left(\frac{b_1-b}{2}\right)^4\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial\eta^4}+\left(\frac{a_1-a}{2}\right)^4\frac{\partial^4 F(\xi',\eta')}{\partial\xi'^4}\right).$$

Entwickelt man das bestimmte Integral, sowie den angenäherten Wert nach Potenzen von $a_1 - a$, $b_1 - b$, so stimmen die Entwickelungen überein in den Potenzen:

$$(a_1 - a)^r (b_1 - b)^s$$

für r gleich 0, 1, 2, 3, s gleich 0, 1, 2, 3.

Die somit gefundene Regel kann als Verallgemeinerung der Simpsonschen Regel angesehen werden, wenn man von der Interpolationsformel in der Rechtecksform ausgeht. Von anderen Gesichtspunkten ausgehend hat dieselbe schon Sheppard in der Arbeit „Some Quadrature-Formulae" Proceedings of the London Mathematical Society Vol. XXXII, 1901, aufgestellt, indessen ohne Restbestimmung.

Geht man von anderen Interpolationsformeln aus, so kommt man zu andern Verallgemeinerungen. Wählt man die Dreiecksform, so kommt man zu den Resultaten, die Biermann in seiner Arbeit „Über näherungsweise Kubaturen". Monatshefte für Mathematik und Physik" Band 14 entwickelt.

§ 8.

Verallgemeinerung der Resultate von Paragraph 6.

Die Resultate des Paragraphen 6 können wesentlich verallgemeinert werden. Wir beschränken uns auf die folgenden Bemerkungen.

Eine Funktion von x und y werde definiert durch die Gleichung:

$$(1)\quad F(x, y) = \sum_{s=1}^{s=n} f(x, y_s) V_s(y) + \psi(y) \sum_{s=1}^{s=l} \frac{\partial f(x, y_s)}{\partial y_s} Q_s(y) \qquad (l \leq n)$$

dann ist

$$(2)\quad F(x,y) = f(x,y) - \frac{(y-y_1)^2 \cdots (y-y_l)^2 (y-y_{l+1}) \cdots (y-y_n)}{l+n!} \frac{\partial^{n+l} f(x, \eta)}{\partial \eta^{n+l}}.$$

Hierin sind:

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ V_n,\ Q_1,\ \ldots\ Q_l$$

ganz bestimmte Funktionen von y, welche von der Wahl der Funktion $f(x, y)$ unabhängig sind, hier aber nicht näher angegeben werden sollen.

Sehen wir $F(x, y)$ als Funktion von x allein an, so erhalten wir dafür die Darstellung:

$$\sum_{r=1}^{r=m} F(x_r, y)\, U_r(x) + \varphi(x) \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial F(x_r, y)}{\partial x_r} R_r(x)$$
$$+ \frac{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_k)^2 (x-x_{k+1}) \cdots (x-x_m)}{k+m!} \frac{\partial^{m+k} F(\xi, y)}{\partial \xi^{m+k}}.$$

Hierin sind:

$$U_1,\ U_2,\ \ldots\ U_m,\ R_1,\ \ldots\ R_k$$

ganz bestimmte Funktionen von x, welche von der Wahl der Funktion $f(x, y)$ unabhängig sind. Hieraus folgt für $f(x, y)$ die folgende angenäherte Darstellung:

(3) $$S_1 + S_2,$$

wobei gesetzt ist:

$$S_1 = \sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} f(x_r, y_s)\, U_r(x) V_s(y) + \varphi(x) \sum_{r=1}^{r=k} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial (f x_r, y_s)}{\partial x_r} R_r(x) V_s(y)$$
$$+ \psi(y) \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=l} \frac{\partial f(x_r, y_s)}{\partial y_s} U_r(x) Q_s(y),$$

$$S_2 = \varphi(x) \psi(y) \sum_{r=1}^{r=k} \sum_{s=1}^{s=l} \frac{\partial^2 f(x_r, y_s)}{\partial x_r \partial y_s} R_r(x) Q_s(y).$$

Der Rest hat die Form (4):

$$\frac{(y-y_1)^2 \cdots (y-y_l)^2 (y-y_{l+1}) \cdots (y-y_n)}{l+n!} \frac{\partial^{n+l} f(x, \eta)}{\partial \eta^{n+l}}$$
$$+ \frac{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_k)^2 (x-x_{k+1}) \cdots (x-x_m)}{k+m!} \frac{\partial^{m+k} F(\xi, y)}{\partial \xi^{m+k}}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Der Ausdruck (3) *hat erstens an den Stellen:*

$$x_r,\ y_s;\ r : 1, \ldots m,\ s : 1, \ldots n.$$

dieselben Werte wie $f(x, y)$.

Zweitens stimmt der erste partielle Differentialquotient nach x *an den Stellen:*

$$x_r,\ y_s;\ r : 1, \ldots k,\ s : 1, \ldots n$$

nach y an den Stellen

$$x_r,\ y_s;\ r : 1, \ldots m;\quad s : 1, \ldots l$$

überein mit dem entsprechenden Differentialquotienten von $f(x, y)$. Endlich drittens ist der partielle zweite Differentialquotient nach x und y in den Punkten:

$$x_r,\ y_s;\ r : 1, \ldots k;\ s : 1, \ldots l$$

gleich dem entsprechenden von $f(x, y)$.

Der Ausdruck (3) *stellt demgemäß die Funktion $f(x, y)$ angenähert dar. Der Fehler hat die Form* (4).

§ 9.

Verallgemeinerung der Resultate von Paragraph 7.

Aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen folgt, daß das bestimmte Integral der Funktion $f(x, y)$, erstreckt über das Rechteck $ab;\ a_1 b_1$, angenähert in der Form dargestellt werden kann:

$$(1)\qquad \sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=n} A_{rs} f(x_r, y_s) + \sum_{r=1}^{r=k}\sum_{s=1}^{s=n} B_{rs}\frac{\partial f(x_r, y_s)}{\partial x_r} + \sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=l} C_{rs}\frac{\partial f(x_r, y_s)}{\partial y_s} + \sum_{r=1}^{r=k}\sum_{s=1}^{s=l} D_{rs}\frac{\partial^2 f(x_r, y_s)}{\partial x_r \partial y_s},$$

wobei die Größen A, B, C, D unabhängig von der Wahl der Funktion $f(x, y)$ sind. Wir wählen nun die Größen x_r, y_s so, daß die Größen

$$B_{rs},\quad C_{rs},\quad D_{rs}$$

sämtlich der Null gleich werden. Es geschieht das, wenn die Gleichungen stattfinden:

$$(4)\qquad \int_a^{a_1} x^r \varphi(x)\,dx = 0,\quad r : 0, 1, \ldots k-1,$$

$$(5)\qquad \int_b^{b_1} y^s \psi(y)\,dy = 0,\quad s : 0, 1, \ldots l-1.$$

Der Rest stellt sich dar als Doppelintegral des Ausdruckes (4) vom vorigen Paragraphen und zwar erstreckt über das Rechteck $ab;\ a_1 b_1$. Er wird Null für alle Funktionen, die ganz und

rational in x und y sind und zwar in x von einem Grade kleiner als $k+m$, in y von einem Grade kleiner als $l+n$.

Analog wie im Gebiete der Funktionen einer Veränderlichen (siehe MARKOFF pag. 66 sequ.) können jetzt eine Reihe von Einzelfällen betrachtet werden. Wir wollen uns auf zwei derselben beschränken. Wir setzen erstens:

$$k = m, \quad l = n.$$

Dann kann gesetzt werden:

$$(4) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2m \cdots m+1} \frac{d^m (x-a)^m (x-a_1)^m}{dx^m},$$

$$(5) \qquad \psi(y) = \frac{1}{2n \cdots n+1} \frac{d^n (y-b)^n (y-b_1)^n}{\partial y^n}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: *Wählt man die Größen x_r und y_s als Wurzeln der durch die Gleichungen* (4) *und* (5) *bestimmten Gleichungen:*

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(y) = 0,$$

so wird das bestimmte Integral

$$\int_a^{a_1} \int_b^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

angenähert durch den Ausdruck dargestellt:

$$\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} A_{rs} f(x_r, y_s),$$

wobei gesetzt ist:

$$A_{rs} = \frac{1}{\varphi'(x_r)\psi'(y_s)} \int_a^{a_1} \int_b^{b_1} \frac{\varphi(x)\psi(y)}{(x-x_r)(y-y_s)}\,dx\,dy.$$

Der Rest ist gleich dem Doppelintegrale der Funktion

$$\frac{\varphi(y)^2}{2n!} \frac{\partial^{2n} f(x,\eta)}{\partial \eta^{2n}} + \frac{\varphi(x)^2}{2m!} \frac{\partial^{2m} F(\xi, y)}{\partial \xi^{2m}},$$

erstreckt über das Rechteck ab; $a_1 b_1$.

Die Größen A_{rs} können in eine einfachere Form gebracht werden, indessen beschränken wir uns darauf, auf eine Arbeit von CHRISTOFFEL im 55. Bande des Crelleschen Journals zu verweisen und zwar auf Seite 69 derselben.

Folgt man dem Gedankengange von Markoff, so kann auch der Rest einfacher geschrieben werden. Auch das soll nicht weiter ausgeführt werden, wie denn überhaupt die Restbetrachtungen fortan kürzer gehalten werden sollen.

Dieser Satz kann als Verallgemeinerung des bekannten Gaussischen Lehrsatzes über die angenäherte Berechnung einfacher Integrale in der Theorie der Doppelintegrale angesehen werden und zwar als *eine* der möglichen Verallgemeinerungen. Dieselbe findet sich schon in einer Arbeit von Minding im 6. Bande des Crelleschen Journals, wenn auch in anderer Weise dargestellt. Es möge in bezug hierauf auch auf den Bericht von H. Burkhardt „Über Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen" im 10. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, pag. 978 sequ., sowie auf die Arbeit von Biermann „Zur angenäherten Quadratur und Kubatur" im 14. Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik verwiesen werden. —

Wir wollen noch einen zweiten Fall kurz andeuten, den Fall nämlich:

$$k = m - 2,\ l = n - 2,\ x_{m-1} = a,\ x_m = a_1,\ y_{n-1} = b,\ y_n = b_1.$$

Es geschieht das, weil derselbe zu einer Verallgemeinerung der entwickelten Simpsonschen Regel im Gebiete der Doppelintegrale führt.

Wir haben durch die Formeln (4) und (5) bestimmte Funktionen von x und y definiert, deren Grad resp. gleich m und n ist. Dieselben haben wir durch $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ bezeichnet, ohne bei dieser Darstellungsweise den Grad kenntlich zu machen. Wir wollen dieselben jetzt durch

$$\varphi^m(x) \quad \text{und} \quad \psi^n(y)$$

bezeichnen.

Setzt man dann:

$$\alpha_m = -\frac{\varphi^m(a)}{\varphi^{m-2}(a)} = -\frac{\varphi^m(a_1)}{\varphi^{m-2}(a_1)}, \tag{6}$$

$$\beta_m = -\frac{\psi^n(b)}{\psi^{n-2}(b)} = -\frac{\psi^n(b_1)}{\psi^{n-2}(b_1)} \tag{7}$$

und versteht unter $x_1, x_2, \cdots x_m$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\Phi(x) = \varphi^m(x) + \alpha_m \varphi^{m-2}(x) = 0, \tag{8}$$

unter $y_1, \cdots y_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\Psi(y) = \psi^n(y) + \beta_n \psi^{n-2}(y) = 0, \tag{9}$$

so ergibt sich der folgende

Lehrsatz: *Wählt man die Größen x_r und y_s als Wurzeln der Gleichungen:*

$$\Phi(x) = 0, \quad \Psi(y) = 0,$$

so wird das bestimmte Integral

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\,dx\,dy$$

angenähert durch den Ausdruck dargestellt:

$$\sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=n} B_{rs} f(x_r, y_s),$$

wobei gesetzt ist:

$$B_{rs} = \frac{1}{\Phi'(x_r)\Psi'(y_s)}\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} \frac{\Phi(x)\Psi(y)}{(x - x_r)(y - y_r)}\,dx\,dy.$$

Der Rest folgt aus dem früheren. Er wird Null, wenn $f(x, y)$ eine ganze Funktion von x und y ist, deren Grad in bezng auf x kleiner ist als $2m - 2$, in bezug auf y kleiner als $2n - 2$.

§ 10.

Angenäherte Berechnung von Doppelintegralen, welche über die Fläche eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks erstreckt sind.

Die in den letzten Paragraphen aufgestellten Näherungsformeln können dazu dienen, um auch andere als die bisher betrachteten Volumina angenähert zu berechnen. Es findet sich hierüber schon in der Arbeit von MINDING eine Bemerkung.[1]) Es ist nicht die Absicht, an dieser Stelle auf den allgemeinen Fall näher einzugehen, wohl aber wollen wir annehmen, daß ein

---

1) Siehe in bezug hierauf auch: APPELL, Sur nne classe de polynômes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles, Toul. Ann. IV. und BOURGET, Sur une extension de la méthode de quadrature de Gauss, C. R. 126.

Doppelintegral vorgelegt sei, welches über die Fläche eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks erstreckt ist, dessen Spitze im Koordinatenanfangspunkt liegt, dessen Katheten in die Koordinatenachsen fallen, und dessen Hypotenuse den Abstand h auf denselben abschneidet.

Setzt man dann:

$$x + y = u, \tag{1}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{1 - v}, \tag{2}$$

so wird die Fläche des Dreiecks beschrieben, wenn u alle Werte von 0 bis h, v alle Werte von 0 bis 1 durchläuft. Es ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2) umgekehrt:

$$x = u(1 - v), \tag{3}$$

$$y = uv, \tag{4}$$

und kann infolgedessen ein jedes Integral, welches über die vorgelegte Fläche erstreckt ist, geschrieben werden:

$$\int_0^h \int_0^1 f(u(1 - v), uv) u \, du \, dv,$$

oder wenn wir

$$f(u(1 - v), uv) = f_1(u, v)$$

setzen:

$$\int_0^h \int_0^1 f_1(u, v) u \, du \, dv.$$

Wir kommen damit zu Integralen, welche wiederum über die Fläche eines Rechtecks erstreckt sind. Freilich ist die zu integrierende Funktion nicht gleich $f(u, v)$, sondern gleich $f_1(u, v)u$. Um derartige Integrale zu behandeln, zeigt sich die Kenntnis der einfachen Integrale

$$\int_0^1 f_1(u) u \, du$$

notwendig, wobei der Einfachheit halber an Stelle von h die Einheit geschrieben worden ist. In bezug auf diese Integrale werde u. a. auf das siebente Kapitel in dem Markoffschen Werke

sowie insbesondere auf eine Arbeit von MEHLER im 63. Bande des Crelleschen Journals aufmerksam gemacht. Auch der Bericht des Hrn. BURKHARDT, pag. 947 sequ. möge wiederholt hervorgehoben werden.

Wir heben die wichtigsten Sätze kurz hervor.

Angenähert kann gesetzt werden:

$$\int_0^1 f_1(u)\,u\,du = A_1 f_1(u_1) + \cdots A_m f_1(u_m) + B_1 f_1'(u_1) + \cdots B_k f_1'(u_k) + R,$$

wobei die Koeffizienten

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m,\quad B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$$

unabhängig von der Wahl der Funktion $f_1(u)$ sind und der Rest gleich dem Integral der Funktion

$$\frac{u(u-u_1)^2\cdots(u-u_k)^2(u-u_{k+1})\cdots(u-u_m)}{k+m!}\,f_1^{k+m}(\nu)$$

genommen zwischen 0 und 1 ist. ν ist ein Mittelwert, auf den nach dem früheren kaum eingegangen zu werden braucht.

Wir wählen zunächst den Fall:

$$k = m.$$

Die Größen $u_1, u_2, \cdots, u_m$ leisten der Gleichung Genüge:

$$(5)\quad \varphi(u) = (u-u_1)(u-u_2)\cdots(u-u_m) = u^m + p_1 u^{m-1} + \cdots p_m = 0.$$

Die Koeffizienten p bestimmen wir so, daß das Gleichungssystem befriedigt wird:

$$(6)\qquad \int_0^1 u^r \varphi(u)\,du = 0,\ r : 1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

Es geschieht das, wenn wir setzen:

$$(7)\qquad \varphi(u) = \frac{k_m}{u}\frac{d\,u^{m+1}(1-u)^m}{d\,u^m} = k_m\,\omega_m(u).$$

Es werden dann die Größen B der Null gleich, während die Größen A die Form annehmen:

$$A_r = \frac{1}{\varphi'(u_r)}\int_0^1 \frac{u\,\varphi(u)}{u-u_r}\,du.$$

In den einfachsten Fällen wird:

$$\omega_1(u) = -3u + 2,$$
$$\omega_2(u) = 20u^2 - 24u + 6,$$
$$\omega_3(u) = -6(35u^3 - 60u^2 + 30u - 4).$$

Der Koeffizient der höchsten Potenz von u nimmt bei beliebigem Wert von m die Form an:

$$\frac{1}{k_m} = \pm 2m + 1 \cdots m + 2. \tag{8}$$

Die einfachsten Eigenschaften der Funktionen $\omega(u)$ können in bekannter Weise abgeleitet werden. Wir deuten die folgenden kurz an.

Jedenfalls findet eine Beziehung von der Form statt:

$$\omega_{m+1}(u) = -(u + a_{m+1})\omega_m(u) - b_{m+1}\omega_{m-1}(u).$$

Die Größen a_{m+1} und b_{m+1} ergeben sich, wenn wir etwa die Koeffizienten der höchsten und der niedrigsten Potenzen von u vergleichen. Wir erhalten dann den

Lehrsatz: Die Funktionen $\omega(u)$ leisten der Rekursionsformel Genüge:

$$\omega_{m+1}(u) = -\left(u - \frac{2(m+1)^2}{(2m+3)(2m+1)}\right)\omega_m(u) - \frac{m(m+1)}{4(2m+1)^2}\omega_{m-1}(u). \tag{9}$$

Ebenso einfach ist es eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für unsere Größen abzuleiten. In der Tat, setzen wir:

$$\eta = u^{m+1}(1-u)^m,$$

so genügt η der Differentialgleichung:

$$u(u-1)\frac{d\eta}{du} = (2m+1)u\eta - (m+1)\eta,$$

die Größe:

$$w = \frac{d^m\eta}{dx^m}$$

also der Differentialgleichung:

$$u(u-1)\frac{d^2w}{du^2} + u\frac{dw}{du} - (m+1)^2w = 0.$$

Da nun aber zwischen w und $\omega_m(u)$ die Beziehung besteht:

$$w = u\omega_m(u),$$

so folgt der

Lehrsatz: Die Funktionen $\omega_m(u)$ leisten der Differentialgleichung Genüge:

$$(10) \quad u(u-1)\frac{d^2\omega}{du^2} + (3u-2)\frac{d\omega}{du} - m(m+2)\omega = 0.$$

Ein zweites Integral dieser Differentialgleichung ist leicht zu finden — indessen sehen wir von seiner Aufstellung ab.

Die Größen A_r waren in der Form dargestellt:

$$A_r = \frac{1}{\varphi'(u_r)}\int_0^1 \frac{u\varphi(u)}{u-u_r}du.$$

Wendet man ähnliche Schlüsse an, wie MEHLER in der zitierten Arbeit, so ergibt sich:

$$(11) \quad A_r = \frac{k_m^2(m!)^2}{u_r(1-u_r)\varphi'(u_r)^2}.$$

Fassen wir die letzten Schlüsse zusammen, so erhalten wir den folgenden

Lehrsatz: Versteht man unter $u_1, u_2, \cdots, u_m$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{u}\frac{d^m u^{m+1}(1-u)^m}{du^m} = 0,$$

so kann angenähert gesetzt werden:

$$\int_0^1 u f_1(u)du = A_1 f_1(u_1) + A_2 f_1(u_2) + \cdots A_m f_1(u_m),$$

wobei A_r den Wert hat:

$$A_r = \frac{k_m^2(m!)^2}{u_r(1-u_r)\varphi'(u_r)^2}.$$

Der begangene Fehler wird durch das bestimmte Integral der Funktion:

$$\frac{u\varphi(u)^2 f_1^{2m}(v)}{2m!}$$

genommen zwischen den Grenzen 0 und 1 dargestellt.

Wir nehmen zweitens:

$$k = m-2, \; u_{m-1} = 0, \; u_m = 1,$$

dann wollen wir festsetzen, daß die Größen $u_1, u_2, \cdots, u_m$ Wurzeln der Gleichung sind:

$$\omega_m(u) - \frac{2m}{2m-1}\omega_{m-1}(u) - \frac{m(m-1)(2m+1)}{2m-1}\omega_{m-2}(u) = 0.$$

Wir wollen die linke Seite dieser Gleichung, nachdem wir sie durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von u dividiert haben, durch

$$\Phi(u)$$

bezeichnen, dann folgt der

Lehrsatz: Versteht man unter $u_1, u_2, \ldots u_m$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\Phi(u) = 0, \tag{12}$$

so kann angenähert gesetzt werden:

$$\int_0^1 u f_1(u)du = B_1 f_1(u_1) + B_2 f_1(u_2) + \cdots B_m f_1(u_m),$$

wobei B_r durch das Integral dargestellt wird:

$$B_r = \frac{1}{\Phi'(u_r)}\int_0^1 \frac{u\Phi(u)}{u-u_r}du.$$

Der begangene Fehler ist gleich dem bestimmten Integrale der Funktion:

$$\frac{\Phi(u)^2}{(u-1)2m-2!} f_1^{2m-2}(v),$$

genommen zwischen den Grenzen 0 und 1.

Die Theorie der Doppelintegrale

$$\int_0^1\int_0^1 u f_1(u, v)du\,dv$$

kann nun in ähnlicher Weise aufgebaut werden.

Wir begnügen uns damit, zwei auf dieselbe bezügliche Sätze anzugeben.

Erstens ergibt sich der

Lehrsatz: Versteht man unter $u_1, u_2, \ldots u_m$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi(u) = \frac{k_m}{u}\frac{d^m u^{m+1}(1-u)^m}{du^m} = 0,$$

unter $v_1, v_2, \ldots v_n$ *die Wurzeln der Gleichung:*

$$\psi(v) = \frac{1}{2n \ldots (n+1)} \frac{d^n v^n (1-v)^n}{dv^n} = 0,$$

so wird das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 u f_1(u, v) du\, dv$$

angenähert durch den Ausdruck dargestellt:

$$\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} A_{rs} \cdot f_1(u_r, v_s),$$

wobei gesetzt ist:

$$A_{rs} = \frac{1}{\varphi'(u_r)\psi'(v_s)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{u\varphi(u)\psi(v) du\, dv}{u - u_r \cdot v - v_s}.$$

Ebenso einfach folgt der

Lehrsatz: Versteht man unter $u_1, u_2, \ldots u_m$ *die Wurzeln der vorhin definierten Gleichung* (12):

$$\Phi(u) = 0,$$

unter $v_1, v_2, \ldots v_n$ *die Wurzeln der im vorigen Paragraphen definierten Gleichung* (9):

$$\Psi(v) = 0,$$

so wird das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 u f_1(u, v) du\, dv$$

angenähert durch den Ausdruck dargestellt:

$$\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} B_{rs} f_1(u_r, v_s),$$

wobei gesetzt ist:

$$B_{rs} = \frac{1}{\Phi'(u_r)\Psi'(v_s)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{u\Phi(u)\Psi(v)}{u - u_r \cdot v - v_s} du\, dv.$$

Der begangene Fehler folgt unmittelbar aus dem früher Bemerkten.

Mit der Theorie des soeben behandelten Doppelintegrales ist aber die Theorie des Integrales:

$$\int_0^1 u f(u(1-v), uv)\, du\, dv$$

sofort erledigt. Schwierigkeiten könnten höchstens bei der Restbestimmung eintreten, dieselben sind aber leicht zu heben. In der Tat, setzt man:

$$f(x, y) = f_1(u, v)$$

$$x = u(1-v),$$

$$y = uv,$$

so wird:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(1-v) + \frac{\partial f}{\partial y} v,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} u,$$

und ebenso einfach sind die höheren Differentialquotienten zu bilden, so daß die Darstellung des Restes ohne Schwierigkeit möglich ist.

Wir wählen ein Beispiel, indem wir den zuletzt aufgestellten Lehrsatz auf den Fall:

$$m = 3,\ n = 3$$

anwenden. Dann wird:

$$u_1 = 0,\ u_2 = \tfrac{3}{5},\ u_3 = 1;\ v_1 = 0,\ v_2 = \tfrac{1}{2},\ v_3 = 1,$$

und es folgt für:

$$\int_0^1 \int_0^1 u f_1(u, v)\, du\, dv$$

die angenäherte Darstellung:

$$\tfrac{1}{72}\left(\tfrac{1}{3} F_1 + \tfrac{25}{6} F_2 + \tfrac{3}{2} F_3\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$F_1 = f_1(0, 0) + 4 f_1(0, \tfrac{1}{2}) + f_1(0, 1),$$

$$F_2 = f_1(\tfrac{3}{5}, 0) + 4 f_1(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{2}) + f_1(\tfrac{3}{5}, 1),$$

$$F_3 = f_1(1, 0) + 4 f_1(1, \tfrac{1}{2}) + f_1(1, 1).$$

Entwickelt man die rechte und die linke Seite nach dem Taylorscheu Lehrsatz, so stimmen die Faktoren aller Glieder:

$$\left(\frac{\partial^m f_1(u, v)}{\partial u^r d v^s}\right)_{00}$$

überein, wenn r und s die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen.

Hieraus folgt der

Lehrsatz: Das Doppelintegral einer Funktion $f(x, y)$ erstreckt über die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten von der Länge eins kann angenähert durch den Ausdruck dargestellt werden:

$$\tfrac{1}{72}[2f(0,0) + \tfrac{25}{6}(f(\tfrac{3}{5}, 0) + 4f(\tfrac{3}{10}, \tfrac{3}{10}) + f(0, \tfrac{3}{5})) + \tfrac{3}{2}(f(1,0) + 4f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + f(0,1))].$$

Druckfertig erklärt 5. VI 1905.]

INHALT.

Seite

A. Mayer, Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale II. Mitteilung 49

J. Thomae, Bemerkung über das elektrische Potential bei geradlinigen Elektroden 68

J. Thomae, Winkeltreue Abbildung einer durch zwei aufeinander senkrecht stehende geradlinige Schlitze begrenzten Ebene auf ein Rechteck 79

H. Scheibner, Zur Theorie der Tschirnhaus-Transformation . . . 87

M. Krause, Zur Theorie der Funktionen zweier veränderlichen Größen 107

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

L Soc 1726.9

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 19 1905
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

III.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1905.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 19 1905
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 5. JUNI 1905.

Geschäftliche Mitteilungen über die am 9. Juni d. J. in Leipzig stattfindende Versammlung der kartellierten Akademien.

Bei der am 17. und 18. Juni d. J. in Kiel stattfindenden Erinnerungsfeier an das fünfzigjährige Bestehen des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein wird das o. M. Herr Feddersen die Glückwünsche der Klasse persönlich überbringen.

Zur Behandlung der Angelegenheiten der Internationalen akademischen Assoziation für Gehirnforschung wird eine Kommission gewählt, bestehend aus den o. Mitgliedern Herren Flechsig, Hering, Marchand, Rabl, mit dem Erstgenannten als Vorsitzenden.

Dem Privatdozenten Herrn Dr. Reinhold Reinisch wird zur Fortsetzung seiner umfänglichen chemisch-analytischen Untersuchungen an Gesteinen der antarktischen Zone eine Quote aus den Erträgnissen der Mende-Stiftung zugebilligt.

Herr Adolf Mayer legt, zum Abdruck in den Berichten, eine Abhandlung des auswärt. Mitglieds Herrn Engel in Greifswald vor: Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen.

Herr Rohn legt, zum Abdruck in den Berichten, eine Mitteilung von Herrn Żorawski in Krakau vor: Notiz über Translatationsflächen.

GEMEINSAME SITZUNG BEIDER KLASSEN
AM 25. MAI 1905.

Über gewisse Scharen unendlicher Reihen und eine Verallgemeinerung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz.

Von

GERHARD KOWALEWSKI.

Wir betrachten hier Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

mit reellen Gliedern. Eine unendliche Menge solcher Reihen nennen wir eine *Schar*. Die Reihen einer Schar sollen *gleichmäßig konvergent* heißen, wenn es zu jedem positiven ε einen Index ν gibt derart, daß *bei allen Reihen der Schar* die Ungleichungen gelten

$$|u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \cdots + u_{\nu+p}| < \varepsilon. \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

Im folgenden wird bei gewissen Scharen, die aus Reihen von der Form

$$A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \cdots$$

bestehen, die gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen, und es ergibt sich ein Theorem, aus welchem ein Satz von RIEMANN[1]) über Reihen von der Form

$$A_0 + A_1 \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 + A_2 \left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2 + \cdots$$

in ganz einfacher Weise folgt. P. DU BOIS-REYMOND hat den RIEMANNschen Satz verallgemeinert.[2]) Das von ihm erhaltene Resultat läßt sich aber, wie am Schlusse dieser Arbeit gezeigt wird, noch verfeinern.

1) Vgl. § 8 seiner Arbeit „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe".

2) Abhandlungen der bayer. Akademie, II. Kl. Bd. 12, Abt. 1, S. 133.

1.

In dem endlichen oder unendlichen Intervall (a, b), $a < b$, sei $f(x)$ eine reelle Funktion, welcher die Eigenschaft der *beschränkten Variation* zukommt. Es soll also eine Zahl K vorhanden sein derart, daß stets

$$|f(a) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(a_2)| + \cdots + |f(a_p) - f(b)| < K$$

ist, wie und in welcher Anzahl man auch die Werte

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_p$$

aus (a, b) herausgreifen mag. Eine solche Funktion $f(x)$ ist bekanntlich immer darstellbar als Differenz zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, die in (a, b) nirgends negativ sind und nie zunehmen, wenn x das Intervall von a bis b durchläuft.

Es sei ferner

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots \tag{1}$$

eine *konvergente* Reihe mit reellen Gliedern und

$$x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \tag{2}$$

eine Folge von Werten aus (a, b).

Zu einer beliebig vorgelegten positiven Größe δ läßt sich wegen der Konvergenz der Reihe (1) ein Index ν so wählen, daß für $n \geqq \nu$

$$|A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots + A_{n+k}| < \delta \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

ist. Bilden wir jetzt den Ausdruck

$$A_{\nu+1}\varphi(x_{\nu+1}) + A_{\nu+2}\varphi(x_{\nu+2}) + \cdots + A_{\nu+p}\varphi(x_{\nu+p}), \tag{4}$$

so kann auf ihn, weil

$$\varphi(x_{\nu+1}) \geqq \varphi(x_{\nu+2}) \geqq \cdots \geqq \varphi(x_{\nu+p}) \geqq 0$$

ist, das bekannte ABELsche Lemma[1]) angewandt werden, und es ergibt sich, daß der Betrag von (4) kleiner ist als $\varphi(x_{\nu+1})\delta$, also auch kleiner als $\varphi(a)\delta$. Ebenso erkennt man, daß der Betrag von

$$A_{\nu+1}\psi(x_{\nu+1}) + A_{\nu+2}\psi(x_{\nu+2}) + \cdots + A_{\nu+p}\psi(x_{\nu+p}) \tag{5}$$

kleiner ist als $\psi(a)\delta$. Da nun wegen $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ der Ausdruck

$$A_{\nu+1}f(x_{\nu+1}) + A_{\nu+2}f(x_{\nu+2}) + \cdots + A_{\nu+p}f(x_{\nu+p}) \tag{6}$$

1) Vgl. CRELLES Journal, I, S. 314.

die Differenz von (4) und (5) ist, so wird er seinem Betrage nach kleiner sein als $[\varphi(a)+\psi(a)]\delta$. Es gibt also, wenn $\varepsilon\,(>0)$ beliebig vorgelegt wird, immer einen Index ν derart, daß *für alle Folgen* (2) *aus* (a, b) die Ungleichungen gelten

$$|A_{\nu+1}f(x_{\nu+1})+A_{\nu+2}f(x_{\nu+2})+\cdots+A_{\nu+p}f(x_{\nu+p})|<\varepsilon. \quad (p=1,2,3,\ldots)$$

Das heißt aber, daß die Reihen

$$A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\cdots, \tag{7}$$

welche den Folgen (2) entsprechen, *gleichmäßig konvergieren.*

Betrachtet man eine Folge

$$x_0\geqq x_1\geqq x_2\geqq\cdots, \tag{2'}$$

die dem Intervall (a, b) angehört, so läßt sich auch jetzt auf die Ausdrücke (4) und (5) das ABELsche Lemma anwenden. Nur ist diesmal

$$\varphi(x_{\nu+p})\geqq\varphi(x_{\nu+p-1})\geqq\cdots\geqq\varphi(x_{\nu+1})\geqq 0$$

und

$$\psi(x_{\nu+p})\geqq\psi(x_{\nu+p-1})\geqq\cdots\geqq\psi(x_{\nu+1})\geqq 0.$$

Beachtet man aber, daß auf Grund von (3) die Beträge der Größen

$$A_{\nu+p},\quad A_{\nu+p}+A_{\nu+p-1},\quad\cdots,\quad A_{\nu+p}+A_{\nu+p-1}+\cdots+A_{\nu+1}$$

kleiner als δ sind, so ergibt sich wieder, daß der Ausdruck (6) seinem Betrage nach unterhalb $[\varphi(a)+\psi(a)]\delta$ liegt. Damit ist gezeigt, daß die Reihen (7), die den Folgen (2') entsprechen, ebenfalls gleichmäßig konvergieren, und wir können also folgendes allgemeine Theorem aussprechen:

Ist die reelle Funktion $f(x)$ *in dem endlichen oder unendlichen Intervall* (a, b) *von beschränkter Variation, und ist*

$$A_0+A_1+A_2+\cdots$$

eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern, so erhält man eine Schar gleichmäßig konvergenter Reihen, wenn man jeder monotonen Folge

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad\cdots$$

aus (a, b) *die Reihe*

$$A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\cdots$$

zuordnet.

2.

Die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0 \tag{8}$$

ist in dem Intervall $(0, \infty)$ von beschränkter Variation. $f(x)$ besitzt nämlich in $(0, x)$, einschließlich der Grenzen, eine stetige Ableitung $f'(x)$, und

$$\int_0^x |f'(x)|\,dx = \lim_{x=\infty} \int_0^x |f'(x)|\,dx$$

hat einen endlichen Wert; andererseits ist[1]), wie man auch $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ aus $(0, \infty)$ herausgreifen mag,

$$|f(0) - f(a_1)| + \cdots + |f(a_p) - f(\infty)| < \int_0^\infty |f'(x)|\,dx.$$

Wir haben hier also einen Fall vor uns, wo wir das Theorem des § 1 anwenden dürfen. In der Schar, von welcher dort die Rede ist, bilden eine Unterschar diejenigen Reihen, welche den Folgen

$$x_0 = 0, \; x_1 = h, \; x_2 = 2h, \; \cdots, \; x_n = nh, \; \cdots \qquad (h \geq 0)$$

entsprechen.[2]) Die Reihen dieser Unterschar sind also auch gleichmäßig konvergent. Das heißt aber, wenn wir uns der gewöhnlichen Ausdrucksweise bedienen, daß die Reihe

$$\Phi(h) = A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h) + \cdots$$

in dem Intervall $(0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert. Da die Glieder der Reihe in dem genannten Intervall (einschließlich der Grenzen) stetig sind, so folgt (nach einem bekannten Satz über gleichmäßig konvergente Reihen von stetigen Funktionen) daß $\Phi(h)$ in $(0, \infty)$ stetig ist. Insbesondere hat man also

$$\sum_0^\infty A_n = \lim_{h=0} \left\{ A_0 + A_1 \left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 + A_2 \left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2 + \cdots \right\}.$$

Diese Formel, welche nur die Konvergenz der Reihe links verlangt, rührt von Riemann her, der sie aber ganz anders beweist.

---

1) Man beachte die Festsetzung über $f(\infty)$.

2) Wir lassen auch $h = \infty$ zu.

3.

Wir wollen jetzt, indem wir bei den Annahmen (8) bleiben, die Voraussetzung fallen lassen, daß die Reihe (1) konvergiert. Es soll nur verlangt werden, daß die Summen

$$S_n = A_0 + A_1 + \cdots + A_n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

zwischen endlichen Grenzen liegen. Dasselbe gilt dann auch von den A, und infolgedessen ist die Reihe

$$A_0 + A_1\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 + A_2\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2 + \cdots$$

für $h \gtrless 0$ konvergent. Ihre Summe werde mit $\Phi(h)$ bezeichnet. Wir stellen uns die Aufgabe, das Verhalten von $\Phi(h)$ für nach Null konvergierendes h zu untersuchen. Dabei können wir uns auf positive h beschränken.

Da alle S_n zwischen endlichen Grenzen liegen, so hat S_n bei unendlich zunehmendem n endliche Unbestimmsheitsgrenzen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$. Diese sind bekanntlich die Grenzwerte, welchen die untere und die obere Grenze der Wertmenge

$$S_\nu,\ S_{\nu+1},\ S_{\nu+2},\ \cdots \tag{9}$$

bei unendlich zunehmendem ν zustreben. Wird $\delta\ (>0)$ beliebig vorgegeben, so läßt sich ν derart wählen, daß die Größen (9) alle zwischen $\mathfrak{s} - \delta$ und $\mathfrak{S} + \delta$ liegen. Denkt man sich

$$x_0 = 0,\ x_1 = h,\ x_2 = 2h,\ \cdots \qquad (h>0)$$

gesetzt und wendet auf die Ausdrücke (4) und (5) das ABELsche Lemma an, so ergibt sich, daß ihre Beträge kleiner sind als

$$(\mathfrak{S} - \mathfrak{s} + 2\delta)\varphi(0) \text{ bezw. } (\mathfrak{S} - \mathfrak{s} + 2\delta)\psi(0);$$

denn die Größen

$$A_{\nu+1},\ A_{\nu+1} + A_{\nu+2},\ \cdots$$

sind absolut genommen kleiner als $\mathfrak{S} - \mathfrak{s} + 2\delta$. Der Ausdruck (6) hat, als Differenz von (4) und (5), einen Betrag, der kleiner ist als

$$(\mathfrak{S} - \mathfrak{s} + 2\delta)K,$$

wobei $K = \varphi(0) + \psi(0)$ sein soll. Da dies für beliebig großes p gilt, so wird sicher auch sein

$$\left|\sum_{\nu+1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right| \leqq (\mathfrak{S} - \mathfrak{s} + 2\delta)K.$$

Nun läßt sich weiter ein positives η so wählen, daß für $0 < h < \eta$

$$\left| A_0 + \sum_1^{\nu} A_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - S_\nu \right| < \delta$$

ist. Aus beiden Ungleichungen folgt aber

$$|F(h) - S_\nu| < \delta + (\mathfrak{S} - \mathfrak{s} + 2\delta)K,$$

und da S_ν zwischen $\mathfrak{s} - \delta$ und $\mathfrak{S} + \delta$ enthalten ist, so liegt $F(h)$ für $0 < h < \eta$ zwischen den Schranken

$$(10) \qquad \mathfrak{s} - (\mathfrak{S} - \mathfrak{s})K - \varepsilon, \quad \mathfrak{S} + (\mathfrak{S} - \mathfrak{s})K + \varepsilon,$$

wobei ε mit δ durch die Relation

$$\varepsilon = 2\delta\,(1 + K)$$

zusammenhängt. Es gibt hiernach zu jedem positiven ε ein positives η, so daß für $0 < h < \eta$ die Funktion $F(h)$ zwischen den Schranken (10) sich befindet.

Wir wollen uns jetzt noch mit der hier auftretenden Zahl K beschäftigen. $f(x)$ hat im Innern von $(0, \infty)$ die Ableitung

$$f'(x) = 2\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Das Zeichen des zweiten Faktors hängt ab von $x\cos x - \sin x$. Diese Funktion hat aber im Innern unseres Intervalls unendlich viele Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, und zwar ist

$$\pi < \alpha_1 < 2\pi < \alpha_2 < 3\pi < \alpha_3 < 4\pi < \ldots$$

In den Intervallen

$$(0, \pi),\ (\pi, \alpha_1),\ (\alpha_1, 2\pi),\ (2\pi, \alpha_2),\ (\alpha_2, 3\pi),\ (3\pi, \alpha_3),\ \ldots$$

hat $x\cos x - \sin x$ die Zeichen

$$- \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad \cdots$$

Die Zeichen von $\sin x$ in diesen Intervallen lauten

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad \cdots$$

Also hat $f'(x)$ folgende Zeichen

$$- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad \cdots$$

Infolgedessen ist

$$\int_0^{\infty} |f'(x)|\,dx = -\int_0^{\pi} f'(x)\,dx + \sum_1^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{\alpha_n} f'(x)\,dx - \int_{\alpha_n}^{(n+1)\pi} f'(x)\,dx \right),$$

d. h.

$$\int_0^{\infty} |f'(x)|\,dx = 1 + 2\sum_1^{\infty}\left(\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}\right)^2.$$

Wählt man die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in folgender Weise:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\int_x^\infty \{|f'(x)| - f'(x)\}\,dx, \quad \varphi(\infty) = 0,$$

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}\int_x^\infty \{|f'(x)| + f'(x)\}\,dx, \quad \psi(\infty) = 0,$$

so wird

$$K = \varphi(0) + \psi(0) = \int_0^\infty |f'(x)|\,dx,$$

und die Schranken (10) lassen sich (nach einer kleinen Umformung) so schreiben:

$$(10') \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}}{2} - (\mathfrak{S}-\mathfrak{s})\left(\tfrac{3}{2} + 2\sum_1^\infty \dfrac{\sin^2\alpha_n}{\alpha_n^2}\right) - \varepsilon, \\ \dfrac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}}{2} + (\mathfrak{S}-\mathfrak{s})\left(\tfrac{3}{2} + 2\sum_1^\infty \dfrac{\sin^2\alpha_n}{\alpha_n^2}\right) + \varepsilon. \end{cases}$$

Da wegen $\alpha_n > n\pi$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}\right)^2 < \sum_1^\infty \frac{1}{n^2\pi^2}$$

ist und andererseits

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

so hat man

$$2\sum_1^\infty \left(\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}\right)^2 < \tfrac{1}{3}.$$

$F(h)$ liegt also für $0 < h < \eta$ sicher zwischen

$$\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}}{2} - (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3})(\mathfrak{S}-\mathfrak{s}) - \varepsilon,$$

und

$$\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}}{2} + (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3})(\mathfrak{S}-\mathfrak{s}) + \varepsilon.$$

Die von P. du Bois-Reymond in der oben zitierten Arbeit angegebenen Schranken sind nicht einmal so eng wie diese. Bei ihm steht nämlich an Stelle unseres Faktors $\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$ die *größere* Zahl $\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}$. Es liegt also schon in unsern letzten Angaben eine Verfeinerung des du Bois-Reymondschen Resultates.

Druckfertig erklärt 1. VII. 1905.]

SITZUNG VOM 5. JUNI 1905.

Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen.

Von

FRIEDRICH ENGEL.

In einem Raume von $n > 2$ Dimensionen sei eine Kurvenschar gegeben, die mindestens n, etwa gerade $n + m$ wesentliche Parameter enthält:

$$x_k = f_k(x_1, c_1 \cdots c_{n+m}) \qquad (k = 2, 3 \cdots n) \tag{1}$$

und die den Raum ganz erfüllt, so daß also durch jeden Punkt des Raumes ∞^{m+1} Kurven der Schar gehen. Bilden wir die Gleichungen:

$$\sum_1^{n+m} \frac{\partial f_k}{\partial c_\nu} dc_\nu = 0 \qquad (k = 2 \cdots n) \tag{2}$$

und denken uns x_1 eliminirt, so erhalten wir ein System von $n - 2$ MONGEschen Gleichungen:

$$\Omega_\mu(c_1 \cdots c_{n+m}, dc_1 : \cdots : dc_{n+m}) = 0 \quad (\mu = 1 \cdots n-2), \tag{3}$$

das augenscheinlich die Bedingungen darstellt, unter denen zwei unendlich benachbarte Kurven c_ν und $c_\nu + dc_\nu$ der Schar (1) einander schneiden. Wir wollen kurz sagen, daß die Gleichungen (3) die zu der Kurvenschar (1) gehörigen *Schnittbedingungen* darstellen.

Ist die Kurvenschar nicht durch Gleichungen von der Form (1) gegeben, sondern durch solche von der Gestalt:

$$x_i = F_i(t, c_1 \cdots c_{n+m}) \qquad (i = 1 \cdots n), \tag{1'}$$

wo t eine Hilfsveränderliche bezeichnet, so hat man, um die zugehörigen Schnittbedingungen (3) zu erhalten, die n Gleichungen

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} dt + \sum_1^{n+m} \frac{\partial F_i}{\partial c_\nu} dc_\nu = 0 \tag{2'}$$

zu bilden und aus diesen die beiden Größen t und dt zu eliminiren.

Fügt man zu (1) die durch Differentiation nach x_1 entstehenden Gleichungen:

$$x_k' = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \qquad (k = 2 \cdots n), \tag{4}$$

und trifft es sich so, daß die Gleichungen (1), (4) nicht genügen, um $c_1 \cdots c_{n+m}$ durch $x_1 \cdots x_n$, $x_2' \cdots x_n'$ auszudrücken, so kann man sich x_1 aus den Gleichungen (2) und

$$\sum_1^{n+m} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial c_\nu} dc_\nu = 0 \qquad (k = 2 \cdots n) \tag{5}$$

eliminirt denken und erhält ein System von mindestens $n-1$ und höchstens $2n-3$ MONGESchen Gleichungen, das die Gleichungen (3) umfaßt und das die Bedingungen darstellt, unter denen zwei unendlich benachbarte Kurven c_ν und $c_\nu + dc_\nu$ der Schar (1) einander in der ersten Ordnung berühren. Wir nennen dieses MONGESche System die zu der Kurvenschar (1) gehörigen *Berührungsbedingungen erster Ordnung.*

In dieser Weise kann man offenbar unter Umständen auch zu Berührungsbedingungen zweiter, dritter, ... Ordnung gelangen, jedoch lassen sich die zu einer Schar von ∞^{n+m} Kurven des R_n gehörigen Berührungsbedingungen $l$ter Ordnung auch auffassen als die Schnittbedingungen einer Schar von ∞^{n+m} Kurven in einem Raume von $n + l(n-1) - r$ Dimensionen, wo r die Zahl der von einander unabhängigen Differentialgleichungen erster bis $l$ter Ordnung ist, denen die Kurvenschar (1) genügt. Allerdings hat man es dann in diesem höheren Raume nicht mit einer allgemeinen Kurvenschar zu tun, sondern mit einer solchen, die einem gewissen Systeme von $l(n-1) - r + \varrho$ PFAFFschen Gleichungen genügt, unter ϱ die Zahl der Differentialgleichungen $l$ter Ordnung verstanden, denen die Kurvenschar (1) genügt. Jedenfalls aber ist die Frage nach den Berührungsbedingungen einer Kurvenschar nur ein besonderer Fall der Frage nach den Schnittbedingungen von Kurvenscharen.

Das MONGESche System (3), das die Schnittbedingungen der Kurvenschar (1) darstellt, hat in den Untersuchungen LIES von jeher eine große Rolle gespielt. Namentlich den Fall $n = 3$, $m = 0$ hat LIE schon in seinen ersten Arbeiten über die Be-

rührungstransformationen des gewöhnlichen Raumes behandelt[1]), und bei beliebigem n hat er die Fälle $m = 0$ und $m = 1$ in der letzten von ihm veröffentlichten Arbeit[2]) ausführlich besprochen. Auch der Gedanke, die Berührungsbedingungen, die zu einer Kurvenschar gehören, als die Schnittbedingungen einer Kurvenschar in einem höheren Raume aufzufassen, stammt von Lie.

§ 1.

Eine Klassifikation gewisser Kurvenscharen des R_n.

Die Wichtigkeit des Mongeschen Systems (3) für die Kurvenschar (1) beruht darauf, daß es zu dieser in einer Beziehung steht, die bei allen Punkttransformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$ erhalten bleibt. Für jede Kurvenschar, die aus (1) durch eine Punkttransformation des Raumes $x_1 \cdots x_n$ hervorgeht, werden nämlich die Schnittbedingungen offenbar wieder durch das System (3) dargestellt. Freilich darf man dabei nicht übersehen, daß die Form, in der man das Mongesche System (3) bekommt, bis zu einem gewissen Grade zufällig und für die betreffenden Kurvenscharen an sich nicht wesentlich ist. Da sich nämlich die Kurvenschar (1) nicht ändert, wenn man an Stelle von $c_1 \cdots c_{n+m}$ irgend $n + m$ neue Parameter einführt, so sind alle Mongeschen Systeme, die aus (1) durch beliebige Punkttransformationen der c_ν erhalten werden, mit (3) vollkommen gleichberechtigt und jedes dieser Mongeschen Systeme kann als eine analytische Darstellung der Schnittbedingungen betrachtet werden, die zu der Kurvenschar (1) und zu jeder aus (1) durch eine Punkttransformation des Raumes der x entstehenden Kurvenschar gehören.

Weil das System (2), aus dem (3) durch Elimination von x_1 entsteht, eine ganz besondere Form hat und insbesondere in den dc_ν linear und homogen ist, so braucht keineswegs jedes System von $n - 2$ Mongeschen Gleichungen in $n + m$ Veränderlichen $c_1 \cdots c_{n+m}$ die Schnittbedingungen einer Schar von ∞^{n+m}

---

1) „Über Complexe", Math. Ann. Bd. V, vgl. auch die nachgelassene Arbeit: „Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen", Math. Ann. Bd. LIX, namentlich S. 291—312.

2) „Über Berührungstransformationen und Differentialgleichungen", diese Berichte 1898, S. 113—180.

Kurven des Raumes $x_1 \cdots x_n$ darzustellen. Es hat daher seinen guten Sinn, sich die Frage vorzulegen: Kann ein MONGESches System (3) von gegebener Form die Schnittbedingungen einer solchen Kurvenschar darstellen? und wenn ja, für welche Kurvenscharen besitzt es diese Eigenschaft? Dabei darf man jedoch nach dem vorhin Gesagten dem MONGESchen Systeme (3) nicht eine ganz spezielle Form vorschreiben, sondern wegen der Willkür in der Wahl der Parameter der Kurvenschar (1) muß man die Form des MONGESchen Systems so wählen, daß sie bei allen Punkttransformationen der c_ν erhalten bleibt. Mit anderen Worten: man muß sich eine ganze Mannigfaltigkeit von MONGESchen Systemen (3) gegeben denken und zwar eine, die bei allen Punkttransformationen der c_ν invariant bleibt, und hat nun zu fragen: enthält diese Mannigfaltigkeit solche MONGESche Systeme, die als Schnittbedingungen von Kurvenscharen (1) gedeutet werden können, und wie lassen sich die betreffenden Kurvenscharen bestimmen?

Bedenkt man, daß die Differentiale dc_ν bei allen Punkttransformationen der c_ν linear und homogen transformirt werden, so erkennt man sofort, daß der Inbegriff aller MONGESchen Systeme (3), die in den dc_ν algebraisch sind, bei allen Punkttransformationen der c_ν invariant bleibt. Dasselbe gilt von dem Inbegriffe aller MONGESchen Systeme (3), unter deren Gleichungen gerade $l < n-2$ von einander unabhängige, in den dc_ν algebraische enthalten sind. Klar ist auch, daß es unter den MONGESchen Systemen dieser Art unbegrenzt viele solche gibt, die Schnittbedingungen in unserem Sinne darstellen: um das einzusehen, braucht man nur alle Gleichungen (1) oder $l+1$ unter ihnen in den x algebraisch anzunehmen. Die invariante Mannigfaltigkeit aller MONGESchen Systeme (3), die gerade $l \leqq n-2$ in den dc_ν algebraische Gleichungen enthalten, zerfällt aber sofort in eine unendliche Reihe von kleineren, ebenfalls invarianten Mannigfaltigkeiten. Man kann sich nämlich die in (3) enthaltenen, in den dc_ν algebraischen Gleichungen durch Gleichungen von der Form

$$G_k(c_1 \cdots c_{m+n},\ dc_1 : \cdots : dc_{n+m}) = 0 \qquad (k = 1, 2 \cdots)$$

ersetzt denken, wo die G_k homogene ganze rationale Funktionen der dc_ν sind; da nun die Gradzahlen dieser ganzen Funktionen bei allen Punkttransformationen erhalten bleiben, so liegt auf der Hand, daß der Inbegriff aller MONGESchen Systeme, bei denen

diese Gradzahlen bestimmte vorgegebene Werte haben, auch bei allen Punkttransformationen der c_ν invariant bleibt.

Dabei ist übrigens noch eins zu berücksichtigen. Ist $n-2>1$ und enthält das Mongesche System (3) gerade $l>1$ von einander nnabhängige Gleichungen, die in den dc_ν algebraisch sind, so kann das von diesen algebraischen Gleichungen gebildete System auf sehr verschiedene Arten durch Gleichungen von der Form $G_k=0$ ersetzt werden, und wenn die Gradzahlen der G_k möglichst niedrig ausfallen sollen, kann man sogar genötigt sein, mehr als l in den dc_ν ganze rationale Gleichungen $G_k=0$ hinzuschreiben, um die Gesamtheit der in den dc_ν algebraischen Gleichungen des Systems (3) vollständig und rein darzustellen.

Aus dem Gesagten ergibt sich jetzt eine naturgemäße Klassifikation der Scharen von ∞^{n+m} Kurven des Raumes $x_1\cdots x_n$, unter deren Schnittbedingungen (3) solche vorkommen, die in den dc_ν algebraisch sind, eine Klassifikation allerdings, bei der noch dahingestellt bleibt, welche unter den einzelnen Klassen wirklich durch Knrvenscharen vertreten sind. Die erste Klasse würden alle die Kurvenscharen bilden, bei denen sämtliche Schnittbedingungen (3) Pfaffsche Gleichungen sind, eine andere Klasse alle die, bei denen das System gerade $l<n-2$ von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen enthält. Ferner würden alle die Kurvenscharen (1) eine Klasse bilden, unter deren Schnittbedingungen eine bestimmte Anzahl solcher linear unabhängiger Gleicbungen vorkommen, die in den Differentialen vom zweiten Grade sind, und so weiter. Dabei bleibt selbstverständlich der Inbegriff aller derselben Klasse angehörigen Kurvenscharen gegenüber allen Punkttransformationen invariant, doch brauchen zwei Kurvenscharen, die derselben Klasse angehören, noch keineswegs durch Punkttransformation in einander überführbar zu sein.

Es ist für das Folgende nützlich, zu bemerken, daß man zur Feststellung der Klasse, der eine vorgelegte Kurvenschar angebört, nicht nötig hat, die Gleichungen der Schar erst auf eine solche Form zu bringen, daß alle vorkommenden Parameter wesentlich sind.

In der Tat, nehmen wir an, daß die Kurvenschar (1) in einer Form vorliegt, wo nnter den $n+m$ Parametern $c_1\cdots c_{n+m}$ bloß gerade $n+l$ wesentlich sind ($l\gtreqless 0$). Die c_ν kommen dann in den f_k nur in $n+l$ Verbindungen

$$C_\mu=\chi_\mu(c_1\cdots c_{n+m}) \qquad (\mu=1\cdots n+l)$$

vor, wo die χ_μ von einander unabhängige Funktionen ihrer Argumente sind, und die Gleichungen (1) lassen sich daher in der Form

$$x_k = f_k(x_1, C_1 \cdots C_{n+l}) \qquad (k = 2 \cdots n) \tag{1''}$$

darstellen, wo jetzt die Parameter $C_1 \cdots C_{n+l}$ alle wesentlich sind. Wollen wir nun die Schnittbedingungen der Kurvenschar aufstellen, so können wir entweder x_1 aus den Gleichungen (2) eliminiren und erhalten ein MONGESches System in den c_ν oder wir können x_1 aus den Gleichungen

$$\sum_1^{n+l} \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial C_\mu} dC_\mu = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots n+l) \tag{2''}$$

eliminiren und erhalten ein MONGESches System in den C_μ. Da sich aber die Gleichungen (2'') bei der Substitution $C_\mu = \chi_\mu$ augenscheinlich in die Gleichungen (2) verwandeln, so ist klar, daß die aus (2'') folgenden Schnittbedingungen bei der Substitution $C_\mu = \chi_\mu$ in die aus (2) folgenden Schnittbedingungen übergehen, und da die dC_μ von einander unabhängige lineare homogene Funktionen der dc_ν sind, so liefern selbstverständlich die Gleichungen (2) genau so viele von einander unabhängige, in den Differentialen algebraische Relationen wie die Gleichungen (2) und auch die Zahl der von einander linear unabhängigen Relationen, die in den Differentialen vom ersten Grade, vom zweiten Grade, ... werden, ist bei (2) dieselbe wie bei (2''). Es ist also wirklich, wenn man bloß die Klasse festzustellen wünscht, der eine Kurvenschar angehört, gleichgültig, ob man die Form (1) oder die Form (1'') der Schar zur Ableitung der Schnittbedingungen benutzt.

Wenn nun auch eine jede Kurvenschar (1) einer ganz bestimmten der von uns unterschiedenen Klassen angehört, so ist es doch, wie schon erwähnt, unsicher, ob jede an und für sich denkbare Klasse wirklich durch Kurvenscharen vertreten ist. Es erhebt sich daher ganz von selbst die Frage: Wie kann man für eine bestimmte der von uns unterschiedenen Klassen entscheiden, ob es Kurvenscharen gibt, die ihr angehören? und wenn diese Frage mit ja zu beantworten ist: wie lassen sich die ihr angehörigen Kurvenscharen bestimmen? Die früher aufgestellte Frage, ob ein MONGEsches System (3) von gegebener Form die Schnittbedingungen von Kurvenschaaren darstellen könne und für

welche Kurvenscharen es diese Eigenschaft besitze, hat damit eine präzisere Fassung erhalten und ist, wie wir sehen werden, in dieser Fassung wirklich lösbar.

Lie hat zwar die von uns beschriebene Klassifikation der Kurvenscharen (1) nicht ausdrücklich aufgestellt, es ist aber klar, daß sie ganz in seinem Geiste gedacht ist, denn er beschäftigt sich in der vorhin erwähnten Abhandlung von 1898 eingehend mit dem Fall, daß alle Gleichungen (3) Pfaffsche Gleichungen sind, und erwähnt auch ausdrücklich den Fall, daß nicht alle $n-2$ sondern nur eine geringere Anzahl der Gleichungen (3) Pfaffsche Gleichungen sind. Dagegen findet sich allerdings bei Lie keine Andeutung darüber, wie man ermitteln kann, ob eine bestimmte Klasse wirklich durch Kurvenscharen vertreten ist, und wie man die betreffenden Kurvenscharen, wenn es welche gibt, finden kann. Er setzt bloß aus einander, was für Folgerungen sich aus dem Umstande ziehen lassen, daß das zu einer Kurvenschar (1) gehörige Mongesche System (3) aus lauter Pfaffschen Gleichungen besteht, geht aber gar nicht auf die Frage nach den Kriterien ein, an denen man erkennen kann, ob dieser Fall bei einer vorgelegten Kurvenschar wirklich eintritt oder nicht.

Im Folgenden werde ich nun eine allgemeine Methode entwickeln, die zu entscheiden gestattet, ob es Scharen von ∞^{n+m} Kurven des R_n gibt, unter deren Schnittbedingungen (3) eine beliebige vorgeschriebene Zahl von Pfaffschen Gleichungen, von Mongeschen Gleichungen zweiten Grades, dritten Grades usw. vorkommen, und werde zugleich zeigen, wie diese Kurvenscharen, wenn es welche gibt, zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke müssen wir aber noch einen Mangel beseitigen, der durch die bisher benutzte Darstellung (1) der Kurvenscharen bedingt ist, den Mangel nämlich, daß sich die Darstellung der Kurvenschar ändert, wenn man an Stelle der c_ν neue Parameter einführt. Wir erreichen das, indem wir für die Kurvenschar eine Darstellung wählen, die von der Wahl der Parameter c_ν unabhängig ist, das heißt, wir denken uns die Kurvenschar nicht durch ihre endlichen Gleichungen (1) definirt, sondern durch das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen die Gleichungen (1) darstellen. Die Aufgabe ist demnach so zu fassen:

Im Raume $x_1 \ldots x_n$ ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben, das eine Kurvenschar mit einer end-

lichen Zahl und zwar mit mindestens n Parametern definirt; die Differentialquotienten lassen sich nicht sämtlich aus dem Systeme eliminiren, so daß also die Kurvenschar den Raum ganz ausfüllt. Gesucht werden die Kriterien dafür, ob unter den MONGEschen *Gleichungen, die ausdrücken, daß zwei unendlich benachbarte Kurven der Schar einander schneiden, so und so viele* PFAFFsche *Gleichungen, so und so viele* MONGEsche *Gleichungen zweiten, dritten, ... Grades enthalten sind.*

Im Folgenden werde ich zeigen, daß man diese Frage in jedem einzelnen Falle ohne Integration, durch bloße Differentiationen und Eliminationen entscheiden kann; wir werden sogar sehen, daß sich, wenn die gesuchten Kriterien erfüllt sind, die betreffenden PFAFFschen Gleichungen und MONGEschen Gleichungen zweiten, dritten, ... Grades ohne Integration aufstellen lassen, sobald man als Parameter der Kurvenschar die Anfangswerte benutzt, die $x_2 \ldots x_n$ und deren Ableitungen nach x_1 für $x_1 = x_1^0$ annehmen.

Übrigens will ich ausdrücklich erwähnen, daß die Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Kurvenscharen von der hier verlangten Beschaffenheit definiren, sämtliche *reduzibel* sind in dem Sinne, den PAINLEVÉ in seinem auf dem Heidelberger Kongresse gehaltenen Vortrage: „Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles" entwickelt hat.[1]) Doch muß ich zugleich hervorheben, daß ich die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Theorien schon besaß, als ich in Heidelberg diesen allgemeinen Begriff der Reduzibilität kennen lernte. Die These von J. DRACH[2]), die diesen Begriff wenigstens im Keime enthält, war mir natürlich nicht unbekannt, doch hat sie auf die Entwicklung meiner Ideen gar keinen Einfluß ausgeübt.

§ 2.

Worauf die neue Methode beruht.

Es seien $x_1 \ldots x_n$ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x bestimmt durch ein simultanes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

---

1) Vgl. Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses S. 90 ff. (Leipzig, bei Teubner, 1905).

2) „Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes, Paris 1898 (bei Gauthier-Villars).

$$\frac{dx_i}{dx} = \xi_i(x, x_1 \ldots x_n) \qquad (i=1 \ldots n); \tag{6}$$

die ξ_i denken wir uns als analytische Funktionen ihrer Argumente und beschränken uns auf ein Gebiet, innerhalb dessen die ξ_i überall in gewöhnliche Potenzreihen entwickelbar sind. Die allgemeinen Lösungen des Systems (6) enthalten dann n wesentliche willkürliche Konstante und haben daher die Form:

$$x_i = \varphi_i(x, c_1 \ldots c_n) \qquad (i=1 \ldots n), \tag{7}$$

wo die Wesentlichkeit der Konstanten dadurch zum Ausdrucke kommt, daß die Gleichungen (7) nach $c_1 \ldots c_n$ auflösbar sind.

Meine ganze Methode beruht nun auf der nahezu trivialen, aber bisher noch von niemandem vollständig ausgenutzten Bemerkung, daß die nach den c_k genommenen Ableitungen der unbekannten Funktionen (7) gewisse *lineare* homogene gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen, nämlich diese:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial c_\mu} = \sum_{\nu}^{1 \ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial c_\mu} \qquad (i,\mu=1 \ldots n), \tag{8}$$

die zusammen mit (6) als ein simultanes System aufgefaßt werden können, das die x_i und deren Ableitungen nach den c_μ als Funktionen von x bestimmt. Für die nach x genommenen Ableitungen einer Funktion von $x, c_1 \ldots c_n$ behalte ich hier die gewöhnlichen d bei, weil kein Mißverständniß zu befürchten ist.

Es versteht sich von selbst, daß auch die höheren Ableitungen der x_i nach den c_μ ähnlichen Differentialgleichungen genügen, die jedesmal in den höchsten vorkommenden Ableitungen der x_i nach den c_μ linear werden. Enthalten andrerseits schon die Funktionen ξ_i des simultanen Systems (6) eine Anzahl von Parametern, etwa $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ und werden also in (7) die x_i Funktionen von x, $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, $c_1 \ldots c_n$, so bekommt man für die Ableitungen der x_i nach den λ_k gewisse lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda_k} + \sum_{\nu}^{1 \ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \lambda_k}$$

$$(i=1 \ldots n;\ k=1 \ldots r),$$

eine Bemerkung, die ich schon im Jahre 1891 in der Abhandlung: „Die kanonische Form der Parametergruppe“ mit großem

Nutzen verwertet habe.[1]) Hier wollen wir uns jedoch mit den Differentialgleichungen (8) begnügen.

Bezeichnet man mit δx_i den Zuwachs, den das x_i in (7) erhält, wenn man bloß die c_μ unendlich wenig ändert, setzt man also:

$$\delta x_i = \sum_{\nu}^{1 \dots n} \frac{\partial x_i}{\partial c_\nu} dc_\nu \qquad (i = 1 \dots n), \tag{9}$$

so kann man die nn Gleichungen (8) in die n folgenden:

$$\frac{d}{dx} \delta x_i = \sum_{\nu}^{1 \dots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = \delta \xi_i \qquad (i = 1 \dots n) \tag{10}$$

zusammenfassen, die augenscheinlich den großen Vorteil haben, ihre Form beizubehalten, wenn man an Stelle von $c_1 \dots c_n$ irgend n neue willkürliche Konstanten einführt. Aus der Auflösbarkeit der Gleichungen (7) nach $c_1 \dots c_n$ folgt überdies, daß die Gleichungen (9) nach $dc_1 \dots dc_n$ auflösbar sind, und darin liegt, daß so lange x, die c_i und die dc_i ganz beliebig sind, zwischen den n Größen δx_i keine homogene Relation von der Form:

$$\chi(x, c_1 \dots c_n,\ \delta x_1 : \dots : \delta x_n) = 0 \tag{11}$$

bestehen kann, daß vielmehr jede solche Relation, die bei der Substitution (9) zu einer Identität wird, schon an sich, also insbesondere in den δx_i eine Identität sein muß.

Die Gleichungen (10) sind dieselben, die POINCARÉ *als „équations aux variations"* bezeichnet[2]), doch verwendet er sie in ganz anderer Weise als ich es hier tun werde. Auch darf ich nicht unerwähnt lassen, daß die rechten Seiten von (8) nichts andres sind als die Zuwachse, die die Ableitungen der x_i nach den c_μ bekommen, wenn man die infinitesimale Transformation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i}^{1 \dots n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

im Sinne von LIE derart erweitert, daß man die x_i als Funktionen von x und von n Veränderlichen $c_1 \dots c_n$ betrachtet, die nicht transformirt werden.

---

1) S. diese Berichte 1891, S. 311—314.

2) „Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste", Bd. I, S. 162, Paris 1892.

Bevor ich auf die Anwendungen der Gleichungen (8) und (10) eingehe, will ich noch eine Form dieser Gleichungen besprechen, die sich bei besonderer Wahl der Integrationskonstanten ergibt.

Denkt man sich nämlich das simultane System (6) unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen:

$$(12) \qquad (x_i)_{x=x_0} = x_i^0 \qquad (i=1\ldots n)$$

integrirt, so erscheinen die allgemeinen Lösungen (7) in der Form:

$$(7') \qquad x_i = \Phi_i(x, x_0, x_1^0 \ldots x_n^0) \qquad (i=1\ldots n),$$

wo die Φ_i gewöhnliche Potenzreihen von $x - x_0$ sind:

$$\Phi_i = x_i^0 + \frac{x-x_0}{1}\xi_i(x_0, x_1^0 \ldots x_n^0) + \cdots$$

und wo man dem x_0 einen festen Zahlenwert erteilen kann, so daß $x_1^0 \ldots x_n^0$ die willkürlichen Konstanten sind, wo man aber auch $x_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ sämtlich als willkürliche Konstanten betrachten kann, die dann freilich nicht alle wesentlich sind. Die zweite Auffassung der Lösungen (7′) ist besonders dann vorzuziehen, wenn man wünscht, die durch einen beliebig gegebenen Punkt des Raumes $x, x_1 \ldots x_n$ gehende Integralkurve des simultanen Systems (6) sofort angeben zu können, was bei Benutzung der Form (7) der Lösungen und ebenso, wenn man in (7′) dem x_0 einen festen Zahlenwert erteilt hat, erst noch die Auflösung von Gleichungen erfordert.

Legt man die neue Form (7) der Lösungen des simultanen Systems (6) zugrunde, so tritt an Stelle von (8) das System:

$$(8') \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial x_\mu^0} = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu^0} \qquad (i,\mu=1\ldots n),$$

zu dem man noch die Gleichungen:

$$(8'') \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial x_0} = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_0} \qquad (i=1\ldots n)$$

fügen kann. Die Gleichungen (6) und (8′), (8″) bilden dann zusammen ein simultanes System, das unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen (12) und

$$(13)\qquad \left\{ \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_\mu^0}\right)_{x=x_0} = \varepsilon_{i\mu}, \quad \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_0}\right)_{x=x_0} = -\,\xi_i(x^0, x_1^0 \ldots x_n^0) \right.$$
$$(i, \mu = 1 \ldots n)$$

zu integriren ist, wo $\varepsilon_{i\mu}$ für $i \neq \mu$ verschwindet und für $i = \mu$ den Wert 1 besitzt.

Setzt man ferner:

$$(9')\qquad \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_0} dx_0 + \sum_{\nu}^{1 \ldots n} \frac{\partial x_i}{\partial x_\nu^0} dx_\nu^0 \qquad (i = 1 \ldots n),$$

wo dem dx_0 der Wert Null zu erteilen ist, wenn man für x_0 einen festen Zahlenwert gewählt hat, so genügen die δx_i wieder den Differentialgleichungen (10) und durch die vereinigten Gleichungen (6) und (10) sowie durch die Anfangsbedingungen (12) und:

$$(14)\qquad (\delta x_i)_{x=x_0} = dx_i^0 - \xi_i(x_0, x_1^0 \cdots x_n^0) dx_0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

sind die x_i und die δx_i als Funktionen von x und x_0, $x_1^0 \cdots x_n^0$ vollständig bestimmt.

Erinnert man sich endlich noch, daß die Integration des simultanen Systems (6) mit der Integration der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{\nu}^{1 \cdots n} \xi_\nu(x, x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0$$

gleichbedeutend ist, und daß, wenn $\Psi_i(x, x_1 \cdots x_n)$ $(i = 1 \cdots n)$ unabhängige Lösungen von $Xf = 0$ sind, die Gleichungen (7') durch Auflösung der Gleichungen:

$$\Psi_i(x, x_1 \cdots x_n) = \Psi_i(x_0, x_1^0 \cdots x_n^0) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

nach $x_1 \cdots x_n$ erhalten werden, so erkennt man sofort, daß die rechten Seiten von (7') die Größen $x_0, x_1^0 \cdots x_n^0$ nur in den n Verbindungen Ψ_i^0 enthalten, daß also die durch (6) und durch die Anfangsbedingungen (12) definirten Funktionen x_i von x, x_0, $x_1^0 \cdots x_n^0$ sämtlich Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(15)\qquad X^0 f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_{\nu}^{1 \cdots n} \xi_\nu(x_0, x_1^0 \cdots x_n^0) \frac{\partial f}{\partial x_\nu^0} = 0$$

sind. Hieraus ergibt sich noch, daß die Zuwachse (9′) der Lösungen (7′) unsers simultanen Systems (6) die einfache Form:

$$(9'') \qquad \delta x_i = \sum_{\nu}^{1\cdots n} \frac{\partial x_i}{\partial x_\nu^0} (dx_\nu^0 - \xi_\nu(x^0, x_1^0 \cdots x_n^0)\, dx_0) \qquad (i=1\ldots n)$$

erhalten, daß man also diese Zuwachse bilden kann, indem man bloß $x_1^0 \cdots x_n^0$ als veränderlich ansieht und dann jedes dx_ν^0 durch $dx_\nu^0 - \xi_\nu^0 dx_0$ ersetzt. Da überdies die Funktionaldeterminante:

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial x_1^0} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0}$$

für $x = x_0$ den Wert 1 bekommt, so ist jetzt zugleich unmittelbar klar, daß bei beliebigen $x, x_0, x_\nu^0, dx_0, dx_\nu^0$ eine Relation von der Form:

$$(11'') \qquad \chi(x, x_0, x_1^0 \cdots x_n^0, \delta x_1 : \cdots : \delta x_n) = 0$$

dann und nur dann bestehen kann, wenn sie schon vor der Substitution (9″), also insbesondere in den δx_i identisch besteht.

Die eben abgeleiteten Eigenschaften der Lösungen (7′) des simultanen Systems (6) sind nur der analytische Ausdruck dafür, daß in (7′) je ∞^1 Wertsysteme $x_0, x_1^0 \cdots x_n^0$ dieselbe Lösung von (6) liefern oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß jede Bahnkurve der infinitesimalen Transformation Xf durch die Gleichungen (7′) gerade ∞^1-mal dargestellt wird. Ist nämlich $\xi, \xi_1 \cdots \xi_n$ ein beliebiger Punkt auf der durch $x_0, x_1^0 \cdots x_n^0$ gehenden Bahnkurve (7′) von Xf, setzt man also:

$$\xi_i = \Phi_i(\xi, x_0, x_1^0 \cdots x_n^0) \qquad (i=1\ldots n)$$

wo ξ ganz beliebig wählbar ist, so stellen die Gleichungen:

$$x_i = \Phi_i(x, \xi, \xi_1 \cdots \xi_n) \qquad (i=1\ldots n)$$

offenbar stets dieselbe Bahnknrve dar, wie die Gleichungen (7′).

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen, die allerdings auf Neuheit keinen Anspruch machen können, die ich aber vorausschicken mußte, um die Darstellung der folgenden Entwickelungen zu erleichtern, kehre ich zu den Gleichungen (8) und (10) zurück.

Was diese Gleichungen so wichtig und brauchbar macht, ist ihre lineare Form. Man könnte sie unmittelbar für die Untersuchung allgemeiner simultaner Systeme (6) verwenden, indem man sich die Frage stellte: Wie muß das simultane

System (6) beschaffen sein, damit seine Lösungen (7) in einer bestimmten vorgeschriebenen Weise von den Integrationskonstanten $c_1 \cdots c_n$ abhängen. Man könnte zum Beispiel verlangen, daß die x_i als Funktionen der c_ν betrachtet einem vorgelegten Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\Psi_\mu\left(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_n, \frac{\partial x_1}{\partial c_1}, \cdots \frac{\partial x_n}{\partial c_n}\right) = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

genügen, das aber so allgemein gewählt werden müßte, daß es bei allen Punkttransformationen der c_ν seine Form behielte. Durch Verbindung der Gleichungen $\Psi_\mu = 0$ mit den Gleichungen (8) könnte man gewisse partielle Differentialgleichungen für die ξ_i ableiten, die für die verlangte Beschaffenheit des simultanen Systems (6) notwendig und hinreichend wären.

Wir wollen jedoch auf diese Art von Fragen[1]) nicht eingehen, denn dabei wird die eine Veränderliche x des simultanen Systems (6) vor den übrigen ausgezeichnet, wir bekommen also keine Eigenschaften des simultanen Systems (6), die gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen des Raumes $x, x_1 \ldots x_n$ invariant sind, und das ist selbstverständlich, da das simultane System gar keine solchen Eigenschaften besitzt.

Wir wollen vielmehr nur den Fall betrachten, daß das simultane System (6) eine Kurvenschar in einem Raume von weniger als $n + 1$ Dimensionen definirt, und wollen zeigen, daß die Differentialgleichungen (8) und (8′) uns erlauben, die in § 1 gestellte Frage zu beantworten, ob unter den zu dieser Kurvenschar gehörigen Schnittbedingungen solche vorhanden sind, die durch MONGESche Gleichungen ersten, zweiten, ... Grades dargestellt werden.

§ 3.

Simultane Systeme als Definitionsgleichungen von Kurvenscharen.

Jede Schar von ∞^{n+m} Kurven $(m > 0)$ des Raumes $x, x_1 \ldots x_n$ läßt sich durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen definiren, dessen Ordnung höchstens gleich $m + 1$ ist, wenn die Kurvenschar, wie wir hier voraussetzen, den ganzen Raum erfüllt. Aber die Integration jedes solchen

1) Ähnliche Fragen behandelt eine Arbeit von Tullio Levi-Civita, „Sulla ricerca di soluzioni particolari dei sistemi differenziali", Acc. dei Lincei, Rend. 19. Febr. 1905.

Systems läßt sich immer auf die Integration eines simultanen Systems erster Ordnung:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx} = \xi_i(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) & (i=1 \ldots n) \\ \dfrac{dy_\mu}{dx} = \eta_\mu(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) & (\mu=1 \ldots m) \end{cases}$$

in $n+m+1$ Veränderlichen zurückführen, und diese Form der Differentialgleichungen der Kurvenschar ist für unsere Zwecke viel bequemer. Nur dürfen wir dabei nicht übersehen, daß jede Schar von ∞^{n+m} Kurven des Raumes $x, x_1 \cdots x_n$ auf unbegrenzt viele Arten durch ein simultanes System von der Form (16) definirt werden kann.

Ist nämlich (16) ein System, das die Kurvenschar definirt und führen wir in (16) an Stelle der y_μ neue Veränderliche $\mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_m$ ein durch m beliebige, aber nach $y_1 \cdots y_m$ auflösbare Gleichungen von der Form:

$$(17)\qquad \mathfrak{y}_\mu = \varphi_\mu(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) \qquad (\mu=1 \ldots m),$$

so erhalten wir in den Veränderlichen $x, x_1 \cdots x_n, \mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_m$ ein simultanes System, das dieselbe Kurvenschar des $R_{n+1}: x, x_1 \cdots x_n$ definirt, wie das ursprüngliche System (16), und zwar erhalten wir auf diese Weise offenbar das allgemeinste simultane System in $n+m+1$ Veränderlichen, durch das diese Kurvenschar dargestellt werden kann, vorausgesetzt daß unter diesen Veränderlichen die $m+1$ Punktkoordinaten $x, x_1 \cdots x_n$ unsers R_{n+1} vorkommen sollen.

Denken wir uns jetzt umgekehrt in $m+n+1$ Veränderlichen ein simultanes System von der Form (16) vorgelegt und machen wir nur die Voraussetzung, daß die ξ_i nicht sämtlich von $y_1 \cdots y_m$ frei sind, so ist durch (16) stets eine Schar von mindestens ∞^{n+1} und von höchstens ∞^{n+m} Kurven des $R_{n+1}: x, x_1 \cdots x_n$ definirt. Stellen nämlich die Gleichungen:

$$(18)\qquad \begin{cases} x_i = X_i(x, c_1 \cdots c_{n+m}) & (i=1 \ldots n) \\ y_\mu = Y_\mu(x, c_1 \cdots c_{n+m}) & (\mu=1 \ldots m) \end{cases}$$

mit den $n+m$ wesentlichen Parametern $c_1 \cdots c_{n+m}$ die allgemeinen Lösungen von (16) dar, so erscheint die durch (16) definirte Kurvenschar in der Form:

$$(19)\qquad x_i = X_i(x, c_1 \cdots c_{n+m}) \qquad (i=1 \ldots n),$$

wo unter den $n + m$ Parametern c_ν mindestens $n + 1$ wesentlich sind. Überdies ist klar, daß die Schar (19) den ganzen R_{n+1} erfüllt, daß also durch jeden Punkt des R_{n+1} mindestens ∞^1 Kurven der Schar gehen. Nehmen wir daher noch $n > 1$ an, so sind durch die simultanen Systeme von der Form (16), in denen nicht alle ξ_i von $y_1 \cdots y_m$ frei sind, alle den ganzen R_{n+1} erfüllenden Kurvenscharen definirt, die aus höchstens ∞^{n+m} Kurven bestehen und zu denen Schnittbedingungen in dem auf S. 161 erklärten Sinne gehören.

Soll die durch (16) definirte Kurvenschar (19) aus gerade ∞^{n+m} verschiedenen Kurven bestehen, so müssen entweder schon die Gleichungen:

$$\frac{dx_i}{dx} = \xi_i(x, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) \qquad (i=1\dots n)$$

nach $y_1 \dots y_m$ auflösbar sein, oder man muß, wenn man diese Gleichungen unter fortwährender Benutzung von (16) genügend oft, nämlich höchstens $(m-1)$-mal nach x differentiirt, schließlich zu einem Systeme von Differentialgleichungen gelangen, das m nach $y_1 \dots y_m$ auflösbare Gleichungen enthält. Das System (16) definirt daher dann und nur dann eine Schar von ∞^{n+m} verschiedenen Kurven des R_{n+1}, wenn es eine solche positive ganze Zahl $h \leqq m$ gibt, daß $y_1 \dots y_m$ durch $x, x_1 \dots x_n$ und durch die Differentialquotienten erster bis h-ter Ordnung von von $x_1 \dots x_n$ nach x ausdrückbar sind, wenn also Relationen von der Form:

$$y_\mu = \Omega_\mu\left(x, x_1 \dots x_n, \frac{dx_1}{dx} \dots \frac{d^h x_n}{dx^h}\right) \qquad (\mu=1\dots m)$$

bestehen. Diese Relationen bestimmen dann die Größen y_μ, die in dem simultanen Systeme (16) zur Definition unsrer Kurvenschar dienen, doch ist noch zu beachten, daß die $n \,.\, h$ Differentialquotienten erster bis h-ter Ordnung von $x_1 \dots x_n$ unter einander und mit $x, x_1 \dots x_n$ durch $n \,.\, h - m$ nach ebensovielen der Differentialquotienten auflösbare Relationen verknüpft sind.

Für unsere Zwecke ist es aber gar nicht nötig, sich darum zu kümmern, ob das System (16) gerade ∞^{n+m} verschiedene Kurven definirt oder nicht. Uns kommt es ja nur darauf an festzustellen, ob und wann unter den Schnittbedingungen einer Kurvenschar MONGESche Gleichungen vom ersten, zweiten, ... Grade in den Differentialen enthalten sind. Für die Beantwortung dieser Frage ist es aber, wie wir S. 165 f. gesehen haben, einerlei,

ob in den Gleichungen (19) der Kurvenschar die Parameter sämtlich wesentlich sind oder nicht. Da nun jedes simultane System (16), in dem die ξ_i nicht alle von $y_1 \dots y_m$ frei sind, eine Kurvenschar des R_{n+1} definirt, zu der Schnittbedingungen in unserm Sinne gehören, und da umgekehrt, wenn man nur m groß genug wählt, jede Kurvenschar dieser Art durch ein solches System (16) definirbar ist, so brauchen wir nur zu zeigen, daß unsere Frage nach Schnittbedingungen von der verlangten Art für jede Kurvenschar beantwortet werden kann, die durch ein beliebiges simultanes System (16) definirt ist, in dem nicht alle ξ_i von $y_1 \dots y_m$ frei sind.

Bevor wir zur wirklichen Beantwortung dieser Frage schreiten, was in den beiden nächsten Paragraphen geschehen soll, ist noch ein Punkt zu erledigen.

Da wir nämlich die zu untersuchenden Kurvenscharen des R_{n+1} grundsätzlich durch simultane Systeme von der Form (16) definiren, so müssen wir wissen, wie aus den vorgelegten Definitionsgleichungen (16) einer bestimmten Kurvenschar die Definitionsgleichungen der Kurvenschar erhalten werden, in die sich die erste Schar bei einer beliebigen Transformation:

$$(20) \qquad \xi = \Psi(x, x_1 \dots x_n), \quad \xi_i = \Psi_i(x, x_1 \dots x_n) \qquad (i = 1 \dots n)$$

des R_{n+1} verwandelt. Aber das allgemeinste simultane System, das die transformirte Kurvenschar definirt, erhalten wir offenbar, wenn wir in (16) vermöge (20) und (17) die neuen Veränderlichen $\xi_1 \dots \xi_n$, $\eta_1 \dots \eta_m$ einführen; dabei sind die Gleichungen (20) durch die gewählte Punkttransformation bestimmt, während die Gleichungen (17) ganz beliebig wählbar sind, nur müssen sie nach $y_1 \dots y_m$ auflösbar sein. Genau ebenso ist es, wenn wir die Gleichungen (20) nicht als eine Transformation des R_{n+1} auffassen, bei der die Punkte des R_{n+1} unter einander vertauscht werden, sondern als einen Wechsel der im R_{n+1} benutzten Punktkoordinaten. Die angedeutete Operation liefert dann das allgemeinste simultane System, das unsre Kurvenschar definirt, wenn diese auf das neue Koordinatensystem bezogen wird.

§ 4.

Pfaffsche Gleichungen als Schnittbedingungen einer Kurvenschar.

Wir denken uns also in dem $R_{n+1}: x, x_1 \dots x_n$ eine Kurvenschar durch ein simultanes System (16) definirt, bei dem die ξ_i nicht alle von $y_1 \dots y_m$ frei sind, und legen uns zunächst die

Frage vor, ob unter den Schnittbedingungen dieser Kurvenschar PFAFFsche Gleichungen enthalten sind und wie viele es deren gibt.

Ist (18) die allgemeine Lösung des simultanen Systems (16), so wird unsre Kurvenschar durch die Gleichungen (19) dargestellt, und die zugehörigen Schnittbedingungen ergeben sich aus:

$$(21) \qquad \delta x_i = \sum_1^{n+m} {}_\nu \frac{\partial x_i}{\partial c_\nu'} dc_\nu = 0 \qquad (i=1\ldots n)$$

durch Elimination von x. Es handelt sich also darum, unter welchen Bedingungen aus (21) eine PFAFFsche Gleichung:

$$(22) \qquad \sum_1^{n+m} {}_\nu \gamma_\nu(c_1 \ldots c_{n+m}) dc_\nu = 0$$

folgt. Dabei ist es, wie wir gesehen haben, vollkommen gleichgültig, ob die Parameter $c_1 \ldots c_{n+m}$ in den Gleichungen (19) sämtlich wesentlich sind oder nicht.

Weil die Gleichungen:

$$(23) \qquad \begin{cases} \delta x_i = \sum_1^{n+m} {}_\nu \dfrac{\partial x_i}{\partial c_\nu} dc_\nu & (i=1\ldots n) \\ \delta y_\mu = \sum_1^{n+m} {}_\nu \dfrac{\partial y_\mu}{\partial c_\nu} dc_\nu & (\mu=1\ldots m) \end{cases}$$

sicher nach $dc_1 \ldots dc_{n+m}$ auflösbar sind, so können wir die linke Seite von (22) durch die δx_i, δy_μ ausdrücken:

$$\sum_1^{n+m} {}_\nu \gamma_\nu(c) dc_\nu = \sum_1^n {}_i \alpha_i(x, c_1 \ldots c_{n+m}) \delta x_i + \sum_1^m {}_\mu \beta_\mu(x, c_1 \ldots c_{n+m}) \delta y_\mu.$$

Nun aber soll (22) eine Folge von (21) sein, es muß also der Ausdruck $\Sigma \beta_\mu \delta y_\mu$ für alle Wertsysteme dc_ν verschwinden, die den Gleichungen (21) genügen, und das ist wegen der Auflösbarkeit der Gleichungen (23) nur möglich, wenn $\beta_1 \ldots \beta_m$ identisch verschwinden. Wir erkennen hieraus, daß aus (21) dann und nur dann eine PFAFFsche Gleichung als Schnittbedingung unsrer Kurvenschar folgt, wenn es möglich ist, n Funktionen α_i von $x, c_1 \ldots c_{n+m}$ derart zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$A = \sum_1^n {}_i \alpha_i(x, c_1 \ldots c_{n+m}) \delta x_i$$

von x frei wird, ohne daß die α_i alle verschwinden.

Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck:

$$\frac{dA}{dx} = \sum_1^n{}_i \frac{d\alpha_i}{dx}\delta x_i + \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{d}{dx}\delta x_i$$

identisch gleich Null wird. Bilden wir nun die aus unserm simultanen Systeme (16) folgenden Differentialgleichungen für die δx_i, δy_μ:

$$\frac{d}{dx}\delta x_i = \delta\xi_i, \quad \frac{d}{dx}\delta y_\mu = \delta\eta_\mu \qquad (i=1\ldots n;\ \mu=1\ldots m), \tag{24}$$

wo zum Beispiel:

$$\delta\xi_i = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial\xi_i}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \sum_1^m{}_k \frac{\partial\xi_i}{\partial y_k}\delta y_k$$

so finden wir:

$$\frac{dA}{dx} = \sum_1^n{}_\nu \left\{\frac{d\alpha_\nu}{dx} + \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial\xi_i}{\partial x_\nu}\right\}\delta x_\nu + \sum_1^m{}_k \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial\xi_i}{\partial y_k}\delta y_k,$$

und dieser Ausdruck kann dann und nur dann identisch verschwinden, wenn die Koeffizienten der δx_ν und der δy_k dies einzeln tun. Demnach bekommen wir für die α_ν gerade n Differentialgleichungen:

$$\frac{d\alpha_\nu}{dx} + \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial\xi_i}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\nu=1\ldots n) \tag{25}$$

und außerdem m endliche Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial\xi_i}{\partial y_k} = 0 \qquad (k=1\ldots m), \tag{26}$$

die sich nicht alle auf $0 = 0$ reduziren, da ja die ξ_i nicht sämtlich von $y_1 \ldots y_m$ frei sind.

Die ganze Aufgabe ist hierdurch auf die Beantwortung der Frage zurückgeführt, ob die endlichen Gleichungen (26) mit den Differentialgleichungen (25) zusammen bestehen können, ohne daß $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ alle verschwinden. Diese Frage aber kann, wie leicht zu sehen ist, stets durch bloße Differentationen und Eliminationen beantwortet werden.

Wir wollen zunächst annehmen, daß wir es mit einer ganz bestimmten Kurvenschar des Raumes $x, x_1 \ldots x_n$ zu tun haben, von der wir feststellen wollen, ob unter ihren Schnittbedingungen Pfaffsche Gleichungen vorhanden sind oder nicht, und wir denken

uns daher (16) als ein gegebenes simultanes System, so daß die ξ_i, η_μ bekannte Funktionen ihrer Argumente und insbesondre die ξ_i nicht sämtlich von $y_1 \ldots y_m$ frei sind. Unsre Frage kommt dann, um mit LIE zu reden, auf die folgende hinaus: In den Veränderlichen x, $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_m$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ soll das kleinste in $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ lineare homogene Gleichungssystem bestimmt werden, das die Gleichungen (26) umfaßt und das die infinitesimale Transformation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^n{}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\mu \eta_\mu \frac{\partial f}{\partial y_\mu} - \sum_1^n{}_i \left\{ \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

gestattet. Wir können sie aber auch direkt beantworten, ohne uns auf diese LIEschen Theorien zu stützen:

Es sei h der Rang der Matrix:

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_m} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

so daß also alle $(h+1)$-reihigen Determinanten von (27) identisch verschwinden, nicht aber alle h-reihigen. Da die ξ_i nicht alle von $y_1 \ldots y_m$ frei sind, so ist h sicher $\geqq 1$. Wäre nun $h = n$, so würde aus (26) folgen: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, zu unsrer Kurvenschar gehörte daher sicher keine PFAFFsche Gleichung als Schnittbedingung; wir nehmen deshalb $h < n$ an. Wir differentiiren die Gleichungen (26), indem wir (25) benutzen, und finden die Gleichungen:

$$(26_1) \qquad \sum_1^n{}_i \alpha_i \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_k} - \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial y_k} \right\} = 0 \qquad (k = 1 \ldots m)$$

wo:

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x \partial y_k} + \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\nu \partial y_k} + \sum_1^m{}_\mu \eta_\mu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y_\mu \partial y_k} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_k}$$

gesetzt ist.

Hat die aus den Koeffizienten von (26) und (26_1) gebildete Matrix den Rang n, so verschwinden alle α_i, und unsre Kurvenschar besitzt daher unter ihren Schnittbedingungen sicher keine PFAFFsche Gleichung. Hat andrerseits diese Matrix gerade den Rang h, ist also jede der Gleichungen (26_1) eine Folge von (26),

so ziehen (25) und (26) zusammengenommen keine endliche Gleichung nach sich, die nicht schon ohne Differentiation ans (26) allein folgt. Denken wir uns daher (26) nach h von den α_i aufgelöst, etwa nach $\alpha_1 \ldots \alpha_h$ und setzen wir die erhaltenen Ausdrücke in (25) ein, so reduziren sich die ersten h dieser Differentialgleichungen auf Identitäten und wir behalten $n - h$ lineare homogene Differentialgleichungen für $\alpha_{h+1} \ldots \alpha_n$ allein übrig, während endliche Gleichungen zwischen $\alpha_{h+1} \ldots \alpha_n$ nicht mehr bestehen. Demnach hängt das allgemeinste Lösungssystem der Gleichungen (25) und (26) linear und homogen von $n - h$ willkürlichen Konstanten ab nnd zu unsrer Kurvenschar gehören gerade $n - h$ von einander unahhängige Pfaffsche Gleichungen als Schnittbedingungen.

Übrig hleiht der Fall, daß der Rang der Matrix der vereinigten Gleichungen (26) und (26_1) zwar kleiner als n, aber größer als h ist, etwa $= h + h_1$. Dann aher hehandeln wir die vereinigten Gleichungen (26) und (26_1) genau so wie vorher die Gleichungen (26). Wir differentiiren also (26_1) unter Benutzung von (25) und erhalten so ein neues System (26_2) von endlichen Gleichungen zwischen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Hat die Matrix der vereinigten Gleichungen (26), (26_1), (26_2) den Rang n, so giht es keine Pfaffsche Gleichung als Schnitthedingung, hat sie gerade den Rang $h + h_1$, so giht es deren gerade $n - h - h_1$ unabhängige, hat sie einen Rang $> h + h_1$, aber $< n$, so müssen wir wieder die Gleichungen (26_2) differenziren, gelangen auf diese Weise zu neuen endlichen Gleichungen (26_3) und so fort.

Es leuchtet ein, daß wir die heschriehene Operation, also die Hinzufügung der durch Differentiation entstehenden neuen endlichen Gleichungen, höchstens $(n - 1)$-mal auszuführen brauchen, um entweder zu finden, daß $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sämtlich verschwinden müssen oder daß unter den Schnittbedingungen unsrer Kurvenschar eine ganz bestimmte Zahl von einander unabhängiger Pfaffscher Gleichungen auftritt.

Bei einer Knrvenschar, die durch ein vorgelegtes simultanes System (16) definirt ist, können wir also stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, wie viele von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen unter ihren Schnittbedingungen enthalten sind. Aher noch mehr; wir können sogar, wenn wir als Parameter der Kurvenschar die Anfangswerte von $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_m$ für $x = x_0$ benutzen, die hetreffenden Pfaffschen

Gleichungen selbst hinschreiben, ohne das simultane System (16) integriren zu müssen.

In der Tat, auf dem angegebenen Wege finden wir aus (26) ein System von $l \gtrless h$ linearen homogenen Gleichungen zwischen $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, das die Gleichungen (26) umfaßt und das durch Differentiation nach x und Benutzung von (25) keine neue endliche Gleichung zwischen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ liefert. Wir lösen dieses System nach l von den α_i, etwa nach $\alpha_1 \ldots \alpha_l$, auf:

$$(28) \qquad \alpha_\pi = \sum_1^{n-l}{}_j \vartheta_{\pi j}(x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m)\, \alpha_{l+j} \qquad (\pi = 1 \ldots l)$$

und setzen diese Ausdrücke für $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ in (25) ein, dann bekommen wir für $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_n$ die Differentialgleichungen:

$$(29) \qquad \frac{d\alpha_{l+j}}{dx} + \sum_1^{n-l}{}_\tau \alpha_{l+\tau}\left(\frac{\partial \xi_{l+\tau}}{\partial x_{l+j}} + \sum_1^{l}{}_\pi \vartheta_{\pi\tau}\frac{\partial \xi_\pi}{\partial x_{l+j}}\right) = 0$$
$$(j = 1 \ldots n-l),$$

während die l ersten Gleichungen (25) eine Folge von (29) werden und sich zwischen $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_n$ allein keine endliche Relation ergibt. Der allgemeinste Ausdruck:

$$A = \sum_1^n{}_i \alpha_i \delta x_i,$$

der von x frei wird, hat demnach die Form:

$$(30) \qquad A = \sum_1^{n-l}{}_j \alpha_{l+j}\left(\delta x_{l+j} + \sum_1^{l}{}_\pi \vartheta_{\pi j}\delta x_\pi\right),$$

wo für $\alpha_{l+1}, \ldots \alpha_n$ die allgemeinsten Lösungen der Differentialgleichungen (29) zu setzen sind.

Denken wir uns jetzt in den Gleichungen (19) unsrer Kurvenschar die Konstanten $c_1 \ldots c_{n+m}$ durch die Anfangswerte x_i^0, y_μ^0 ausgedrückt, die x_i, y_μ für $x = x_0$ annehmen, so erscheinen die Gleichungen unserer Kurvenschar in der Form:

$$(19') \qquad x_i = \Xi_i(x, x_0, x_1^0 \ldots x_n^0, y_1^0 \ldots y_m^0) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

und die Gleichungen (21), aus denen durch Elimination von x die Schnittbedingungen hervorgehen, werden nach S. 173:

$$(21') \quad \delta x_i = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial x_i}{\partial x_\nu^0}(dx_\nu^0 - \xi_\nu^0 dx_0) + \sum_1^m{}_\mu \frac{\partial x_i}{\partial y_\mu^0}(dy_\mu^0 - \eta_\mu^0 dx_0) = 0,$$
$$(i = 1 \ldots n),$$

wo:

$$\xi_\nu^0 = \xi_\nu(x_0, x_1^0 \ldots x_n^0, y_1^0 \ldots y_m^0)$$

ist. Da nun der Ausdruck (30) von x frei wird, so können wir seinen Wert berechnen, indem wir $x = x_0$ setzen. Die Anfangswerte der α_{l+j} für $x = x_0$ sind dabei ganz beliebig wählbar, folglich hat der allgemeinste von x freie Ausdruck $\sum \alpha_i \delta x_i$ die Form:

$$\sum_1^{n-l} {}_j C_{l+j} \left\{ dx_{l+j}^0 - \xi_{l+j}^0 dx_0 + \sum_1^l {}_\pi \vartheta_{\pi j}^0 (dx_\pi^0 - \xi_\pi^0 dx_0) \right\},$$

wo die C_{l+j} willkürliche Konstante oder, wenn man will, willkürliche Funktionen der x_0, x_l^0, y_μ^0 sind. Unter den Schnittbedingungen unserer Kurvenschar sind daher gerade $n - l$ von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen enthalten, und diese lauten, wenn man als Integrationskonstanten des simultanen Systems (16) die Anfangswerte benutzt, so:

$$(31) \qquad dx_{l+j}^0 - \xi_{l+j}^0 dx_0 + \sum_1^l {}_\pi \vartheta_{\pi j}^0 (dx_\pi^0 - \xi_\pi^0 dx_0) = 0 \qquad (j = 1 \ldots n-l),$$

ihre Aufstellung erfordert also nur Differentiationen und Eliminationen, nicht aber die Integration des simultanen Systems (16).

Nehmen wir an, daß die durch (16) definierte Kurvenschar aus gerade ∞^{n+m} Kurven besteht, und erteilen wir x_0 einen festen Zahlenwert, so sind die übrig bleibenden Parameter $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_m^0$ in den Gleichungen (19′) sämtlich wesentlich und unter den Schnittbedingungen unserer Kurvenschar befinden sich gerade $n - l$ von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen, die augenscheinlich die Form:

$$(31') \qquad dx_{l+j}^0 + \sum_1^l {}_\pi \vartheta_{\pi j}^0 dx_\pi^0 = 0 \qquad (j = 1 \ldots n-l)$$

haben. Deuten wir, wie es Lie zu tun pflegt, die Größen $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_m^0$ als Punktkoordinaten in einem R_{n+m}, so erhalten wir eine Abbildung der Kurven unsrer Schar auf die Punkte dieses R_{n+m}, und das Pfaffsche System (31′) stellt dann in diesem R_{n+m} ein Gebilde dar, das gegenüber allen Punkttransformationen des R_{n+1}: x, $x_1 \ldots x_n$ mit unsrer Kurvenschar invariant verknüpft ist.

Es hat jedoch seine großen Vorteile, dem x_0 keinen festen Zahlenwert zu erteilen, sondern es in den Gleichungen (19′) als einen überzähligen Parameter beizubehalten. Dann brauchen wir nämlich, um die Größen x_0, x_i^0, y_μ^0 und die Schnittbedingungen (31) zu deuten, nicht erst einen neuen Raum einzuführen, sondern können in dem ursprünglichen $R_{n+1}: x, x_1 \ldots x_n$ bleiben.

In der Tat, jedes Wertsystem: x_0, x_i^0, y_μ^0 bestimmt eine der ∞^m durch den Punkt $x_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ des R_{n+1} gehenden Integralkurven des simultanen Systems (16) und man kann dabei auch mit $y_1^0 \ldots y_m^0$ eine geometrische Bedeutung verbinden, wenn man sich erinnert, daß die y_μ durch die Differentialquotienten von $x_1 \ldots x_n$ nach x ausdrückbar sind (vgl. S. 176). Die Gleichungen (31) sind nun Bedingungen dafür, daß die beiden unendlich benachharten, durch die Wertsysteme x_0, x_i^0, x_μ^0 und $x_0 + dx_0$, $x_i^0 + dx_i^0$, $y_\mu^0 + dy_\mu^0$ hestimmten Integralkurven von (16) einander schneiden, und zwar sind es unter den sämtlichen Bedingungen für dieses Schneiden die einzigen, die in den Differentialen dx_0, dx_i^0, dy_μ^0 linear sind. Hierin liegt, daß wir in den Gleichungen (31) die Indices 0 überall weglassen und die Gleichnngen:

$$(31'') \quad dx_{i+j} - \xi_{i+j}\,dx + \sum_1^i{}_\pi \vartheta_{\pi j}(dx_\pi - \xi_\pi dx) = 0 \quad (j=1\ldots n-i)$$

unmittelbar in dem $R_{n+1}: x, x_1 \ldots x_n$ als ein System von PFAFFschen Gleichungen deuten können, das mit unserer Kurvenschar gegenüber allen Punkttransformationen dieses Raumes invariant verknüpft ist. Etwas präziser ausgedrückt: Das PFAFFsche System (31″) in den Veränderlichen $x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m$ ist mit dem simultanen Systeme (16) invariant verknüpft gegenüber der unendlichen Gruppe aller Transformationen, die durch Gleichnngen von der Form (20) und (17) dargestellt werden.

Da in (31″) die Differentiale der y_μ gar nicht vorkommen, so erhält man aus (31″) durch Elimination von $y_1 \ldots y_m$, vorausgesetzt, daß sie möglich ist, ein MONGESches System in den Veränderlichen $x, x_1 \ldots x_n$, das ebenfalls mit unserer Kurvenschar invariant verknüpft ist gegenüber allen Punkttransformationen des Raumes $x, x_1 \ldots x_n$.

Wir dachten uns bisher das simultane System (16) gegeben, weil es die Definitionsgleichungen einer bestimmten Kurvenschar darstellen sollte, von der wir feststellen wollten, ob unter ihren

Schnittbedingungen Pfaffsche Gleichungen vorkommen. Wir können aber die Gleichungen (25) und (26) auch benutzen, um die folgende allgemeine Aufgabe zu lösen: Welche den ganzen R_{n+1} erfüllenden Scharen von mindestens ∞^{n+1} und höchstens ∞^{n+m} Kurven gibt es, unter deren Schnittbedingungen mindestens eine Pfaffsche Gleichung enthalten ist?

Da jede derartige Kurvenschar durch ein simultanes System von der Form (16) definirt werden kann, in dem die ξ_i nicht sämtlich von $y_1 \ldots y_m$ frei sind, so handelt es sich jetzt darum, welchen Bedingungen die Funktionen $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$ genügen müssen, damit die Gleichungen (25) und (26) zusammen bestehen können, ohne daß alle α_i verschwinden.

Um diese Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen, denken wir uns wie früher aus (26) durch Differentiation nach x und durch Benutzung von (25) das System (26_1) abgeleitet, aus diesem wieder das System (26_2) und so fort bis zu dem System (26_{n-1}), dessen Koeffizienten die Differentialquotienten der ξ_i bis zur $n$ten Ordnung und die der η_μ bis zur $(n-2)$ten Ordnung enthalten. Sodann wählen wir auf alle möglichen Arten $l+1$ von Null verschiedene positive ganze Zahlen $h, h_1 \ldots h_l$ derart, daß $l < n-1$ und $h + h_1 + \ldots + h_l < n$ ist, und stellen für jede so erhaltene Folge von Zahlen die Bedingungen dafür auf, daß die Matrix der Gleichungen (26) den Rang h bekommt, die der vereinigten Gleichungen (26) und (26_1) den Rang $h + h_1, \ldots$ die der vereinigten Gleichungen (26), $(26_1) \ldots (26_l)$ den Rang $h + h_1 + \ldots + h_l$ und die der vereinigten Gleichungen (26), $(26_1) \ldots (26_l)$, (26_{l+1}) ebenfalls den Rang $h + h_1 + \ldots + h_l$. Jede Zahlenfolge $h, h_1 \ldots h_l$ liefert uns auf diese Weise ein System von partiellen Differentialgleichungen für $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$, das in den ξ_i von der $(l+2)$ten, in den η_i von der $l$ten Ordnung ist. Besitzt dieses System von Differentialgleichungen überhaupt keine Lösungen oder besitzt es nur solche Lösungen $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$, wo alle ξ_i von $y_1 \ldots y_m$ frei sind, so kommt es für uns nicht in Betracht und die betreffende Zahlenfolge $h, h_1 \ldots h_l$ ist zu verwerfen, besitzt es dagegen Lösungen $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$, wo nicht alle ξ_i von $y_1 \ldots y_m$ frei sind, so definirt es gewisse simultane Systeme (16) mit mindestens ∞^{n+1} und höchstens ∞^{n+m} Integralkurven, bei denen unter den Schnittbedingungen der Integralkurven gerade $n - (h + h_1 + \ldots + h_l)$ von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen vorhanden sind;

außerdem kann man nach Einführung der Anfangswerte x_0, x_i^0, y_μ^0 diese PFAFFschen Gleichungen sofort hinschreiben: ihre Koeffizienten sind aus den ξ_i, η_μ und aus den Ableitungen erster bis $(l+1)$ter Ordnung der ξ_i und aus den Ableitungen erster bis $(l-1)$ter Ordnung der η_μ gebildet.

Führt man die beschriebene Untersuchung für alle möglichen Zahlenfolgen h, $h_1 \ldots h_l$ durch, so erhält man eine Reihe von Systemen partieller Differentialgleichungen für die ξ_i, η_μ, und durch diese Systeme sind alle Scharen von mindestens ∞^{n+1} und höchstens ∞^{n+m} Kurven des R_{n+1} definirt, unter deren Schnittbedingungen mindestens eine PFAFFsche Gleichung vorkommt.

Wir haben bisher von den $n+1$ Punktkoordinaten des R_{n+1}: x, $x_1 \ldots x_n$ immer die eine x bevorzugt, indem wir sie als unabhängige Veränderliche benutzten. Wir wollen jetzt noch andeuten, wie sich unsere Entwicklungen gestalten, wenn wir unsere Kurvenschar in der Weise darstellen, daß wir uns alle x als Funktionen einer Hilfsveränderlichen t gegeben denken. Um jedoch die Schreibung der Formeln zu erleichtern, wollen wir dabei die Punktkoordinaten des R_{n+1} mit $x_1 \ldots x_{n+1}$ bezeichnen.

Bei Einführung der Hilfsveränderlichen t kann jede den ganzen R_{n+1} ausfüllende Schar von mindestens ∞^{n+1} und höchstens ∞^{n+m} Kurven durch ein simultanes System von der Form:

$$(32) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1 \ldots x_{n+1},\ y_1 \ldots y_m) & (i=1 \ldots n+1) \\ \dfrac{dy_\mu}{dt} = \eta_\mu(x_1 \ldots x_{n+1},\ y_1 \ldots y_m) & (\mu=1 \ldots m) \end{cases}$$

definirt werden, wo jetzt die Quotienten der ξ_i nicht alle von $y_1 \ldots y_m$ frei sein dürfen. Sind nun:

$$(33) \qquad \begin{cases} x_i = \Phi_i(t,\ c_1 \ldots c_{n+m+1}) & (i=1 \ldots n+1) \\ y_\mu = X_\mu(t,\ c_1 \ldots c_{n+m+1}) & (\mu=1 \ldots m) \end{cases}$$

die allgemeinen Lösungen von (32), so wird unsere Kurvenschar durch die Gleichungen:

$$(34) \qquad x_i = \Phi_i(t,\ c_1 \ldots c_{n+m+1}) \qquad (i=1 \ldots n+1)$$

dargestellt und die Schnittbedingungen erhalten wir nach S. 161 f. durch Elimination von t und dt aus den Gleichungen:

$$(35) \qquad \xi_i dt + \delta x_i = 0 \qquad (i=1 \ldots n+1).$$

wenn wir wie früher setzen:

$$(36)\qquad \begin{cases} \delta x_i = \sum_1^{n+m+1}{}_\nu \dfrac{\partial x_i}{\partial c_\nu} dc_\nu & (i=1\ldots n+1) \\ \delta y_\mu = \sum_1^{n+m+1}{}_\nu \dfrac{\partial y_\mu}{\partial c_\nu} dc_\nu & (\mu=1\ldots m). \end{cases}$$

Wir fragen, wann aus (35) durch Elimination von t und dt eine Pfaffsche Gleichung:

$$(37)\qquad \sum_1^{n+m+1}{}_\nu \gamma_\nu(c_1 \ldots c_{n+m+1}) dc_\nu = 0$$

hervorgeht.

Da die Gleichungen (36) sicher nach den dc_ν auflösbar sind, so können wir die linke Seite von (37) durch die δx_i, δy_μ ausdrücken:

$$(38)\qquad \begin{cases} \sum_1^{n+m+1}{}_\nu \gamma_\nu(c) dc_\nu = \sum_1^{n+1}{}_i \alpha_i(t, c_1 \ldots c_{n+m+1}) \delta x_i + \\ \qquad + \sum_1^{m}{}_\mu \beta_\mu(t, c_1 \ldots c_{n+m+1}) \delta y_\mu. \end{cases}$$

Nun aber soll (37) eine Folge von (35) sein und andrerseits ergibt sich aus (35) und (36) sicher keine von den dc_ν freie Relation zwischen $\delta y_1 \ldots \delta y_m$ uud dt, folglich müssen erstens alle β_μ identisch verschwinden, zweitens muß:

$$(39)\qquad \sum_1^{n+1}{}_i \alpha_i \xi_i = 0$$

sein, und wir erkennen, daß eine Pfaffsche Gleichung (37) als Schnittbedingung dann und nur dann auftritt, wenn es möglich ist, n nicht sämtlich verschwindende Funktionen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ von t und den c_ϱ so zu bestimmen, daß (39) erfüllt ist und daß der Ausdruck:

$$A = \sum_1^{n+1}{}_i \alpha_i \delta x_i$$

von t frei wird.

Bedenken wir jetzt noch, daß die δx_i, δy_μ den Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\delta x_i = \delta \xi_i, \quad \frac{d}{dt}\delta y_\mu = \delta \eta_\mu \qquad (i=1\ldots n+1;\ \mu=1\ldots m)$$

genügen, wo zum Beispiel:

$$\delta\xi_i = \sum_1^{n+1}{}_r \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r}\delta x_r + \sum_1^{m}{}_\mu \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\mu}\delta y_\mu$$

ist, so finden wir:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_1^{n+1}{}_i \left(\frac{d\alpha_i}{dt}\delta x_i + \alpha_i \delta\xi_i\right)$$

$$= \sum_1^{n+1}{}_i \left(\frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_1^{n+1}{}_r \alpha_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \sum_1^{m}{}_\mu \sum_1^{n+1}{}_i \alpha_i \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\mu}\delta y_\mu.$$

Dieser Ausdruck muß identisch verschwinden, was uns zur Bestimmung der α_i noch die Gleichungen:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_1^{n+1}{}_r \alpha_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} = 0 \qquad (i=1\ldots n+1) \tag{41}$$

und:

$$\sum_1^{n+1}{}_i \alpha_i \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\mu} = 0 \qquad (\mu=1\ldots m) \tag{42}$$

liefert.

Damit ist unsre Frage auf die andre zurückgeführt, ob die Differentialgleichungen (41) und die endlichen Gleichungen (39) und (41) befriedigt werden können, ohne daß $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sämtlich verschwinden. Die Beantwortung dieser Frage aber erfordert offenbar nur Differentiationen und Eliminationen, was näher zu begründen nur auf eine Wiederholung des auf S. 179 ff. Gesagten hinauskommen würde.

Nur noch eine Bemerkung wollen wir hieran knüpfen, weil sie sich jetzt bequemer aussprechen läßt, als früher, wo wir das x bevorzugten.

Wenn wir nach allen Scharen von mindestens ∞^{n+1} und höchstens ∞^{n+m} Kurven des R_{n+1} fragen, unter deren Schnittbedingungen PFAFFsche Gleichungen vorkommen, so erhalten wir, wie früher gezeigt, eine Reihe von Systemen partieller Differentialgleichungen für die ξ_i, η_μ. Jedes dieser Systeme definirt eine unendliche Mannigfaltigkeit von Kurvenscharen und der Inbegriff aller durch ein solches System definirten Kurvenscharen bleibt offenbar invariant bei der Gruppe aller Punkttransformationen des R_{n+1}. Hieraus folgt, daß jedes der betreffenden Systeme

von partiellen Differentialgleichungen selbst bei einer leicht angebbaren unendlichen Gruppe invariant bleibt.

Wollen wir nämlich auf eine Kurvenschar des R_{n+1}, die durch ein simultanes System (32) definirt ist, die allgemeinste Punkttransformation:

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \ldots x_{n+1}) \qquad (i=1\ldots n+1) \tag{43}$$

des R_{n+1} ausführen, so erreichen wir das (vgl. S. 177), indem wir in das simultane System (32) neue Veränderliche x_i', y_μ' einführen durch eine Transformation, die von den Gleichungen (43) und:

$$y_\mu' = \chi_\mu(x_1 \ldots x_{n+1}, y_1 \ldots y_m) \qquad (\mu=1\ldots m) \tag{44}$$

dargestellt wird, wo die χ_μ ganz willkürlich sind und nur in bezug auf $y_1 \ldots y_m$ von einander unabhängig sein müssen. Das simultane System (32) erhält dabei die neue Form:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i', \quad \frac{dy_\mu'}{dt} = \eta'_\mu \qquad (i=1\ldots n+1;\ \mu=1\ldots m), \tag{32'}$$

wo:

$$\begin{cases} \xi_i' = \sum_1^{n+1} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \xi_\nu \\ \eta_\mu' = \sum_1^{n+1} \dfrac{\partial \chi_\mu}{\partial x_\nu} \xi_\nu + \sum_1^{m} \dfrac{\partial \chi_\mu}{\partial x_k} \eta_k \end{cases} \qquad (i=1\ldots n+1;\ \mu=1\ldots m), \tag{45}$$

und die Gleichungen (43), (44), (45) zusammengenommen stellen nun augenscheinlich die unendliche Gruppe dar, bei der jedes der vorher erwähnten Systeme von partiellen Differentialgleichungen für die ξ_i, η_μ invariant bleibt.

Schreibt man für x_{n+1} wieder x und ersetzt man $\xi_i : \xi_{n+1}$ durch ξ_i, sowie $\eta_i : \xi_{n+1}$ durch η_i so erhält man die unendliche Gruppe, bei der die auf S. 186 erwähnten Systeme von partiellen Differentialgleichungen für $\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$ invariant bleiben.

§ 5.

Mongesche Systeme zweiten und höheren Grades als Schnittbedingungen einer Kurvenschar.

Wir denken uns jetzt wieder im $R_{n+1} : x, x_1 \ldots x_n$ eine Kurvenschar durch ein simultanes System von der Form (16), S. 175 definirt, dessen allgemeine Lösungen wieder die Gleichungen (18), ebenda, seien, so daß unsere Kurvenschar durch die

Gleichungen (19) dargestellt wird, und die Schnittbedingungen aus den Gleichungen (21), S. 178 durch Elimination von x hervorgehen. Nunmehr aber verlangen wir, daß unter diesen Schnittbedingungen eine MONGEsche Gleichung zweiten Grades.

$$(46) \qquad \sum_{\nu\pi}^{1\ldots n+m} \omega_{\nu\pi}(c_1 \ldots c_{n+m})\, dc_\nu dc_\pi = 0$$

enthalten sei.

Auf Grund der Gleichungen (23), S. 178 denken wir uns die linke Seite von (46) durch die δx_i, δy_μ ausgedrückt:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu\pi}^{1\ldots n+m} \omega_{\nu\pi} dc_\nu dc_\pi = \sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{ij}\delta x_i \delta x_j + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1\ldots m} \beta_{i\mu}\delta x_i \delta y_\mu + \\ + \sum_{\mu k}^{1\ldots m} \gamma_{\mu k}\delta y_\mu \delta y_k, \end{aligned} \right.$$

wo die α, β, γ gewisse Funktionen von x, $c_1 \ldots c_{n+m}$ werden. Soll daher die Gleichung (46) eine Folge von:

$$(21) \qquad \delta x_1 = 0, \ \ldots, \ \delta x_n = 0$$

sein, so muß jedenfalls der Ausdruck $\Sigma\gamma_{\mu k}\delta y_\mu \delta y_k$ für alle Wertsysteme $dc_1, \ldots dc_{n+m}$ verschwinden, die den Gleichungen (21) genügen, das aber ist, weil die Gleichungen (23) nach den dc_ν auflösbar sind und weil also aus (21) und (23) keine von den dc_ν freie Relation zwischen $\delta y_1 \ldots \delta y_m$ folgt, nur möglich, wenn alle $\gamma_{\mu k}$ identisch verschwinden.

Folglich ist unsre Forderung dann und nur dann erfüllt, wenn es möglich ist, die Funktionen α_{ij}, $\beta_{i\mu}$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$(48) \qquad A = \sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{ij}\delta x_i \delta x_j + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1\ldots m} \beta_{i\mu}\delta x_i \delta y_\mu$$

von x frei wird und nur die c_ν, dc_ν enthält. Hierzu wiederum ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA}{dx} = \sum_{ij}^{1\ldots n} \frac{d\alpha_{ij}}{dx}\delta x_i \delta x_j + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1\ldots m} \frac{d\beta_{i\mu}}{dx}\delta x_i \delta y_\mu + \\ + 2\sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{ij}\delta x_i \delta \xi_j + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1\ldots m} \beta_{i\mu}(\delta x_i \delta \eta_\mu + \delta \xi_i \delta y_\mu) \end{aligned} \right.$$

für alle Werte der dc_ν verschwindet, was augenscheinlich nur möglich ist, wenn er schon in den δx_i, δy_μ identisch verschwindet. Ersetzen wir daher in (49) die $\delta\xi_i$, $\delta\eta_\mu$ durch ihre Werte:

$$\delta\xi_i = \sum_j^{1\ldots n} \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\delta x_j + \sum_k^{1\ldots m} \frac{\partial\xi_i}{\partial y_k}\delta y_k$$

$$\delta\eta_\mu = \sum_j^{1\ldots n} \frac{\partial\eta_\mu}{\partial x_j}\delta x_j + \sum_k^{1\ldots m} \frac{\partial\eta_\mu}{\partial y_k}\delta y_k,$$

ordnen wir dann nach Potenzen der δx_i, δy_μ und setzen wir die Koeffizienten der einzelnen Glieder gleich Null, so erhalten wir als analytischen Ausdruck unsrer Forderung die Gleichungen:

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_{ij}}{dx} + \sum_\nu^{1\ldots n}\left(\alpha_{i\nu}\dfrac{\partial\xi_\nu}{\partial x_j} + \alpha_{j\nu}\dfrac{\partial\xi_\nu}{\partial x_i}\right) + \sum_k^{1\ldots m}\left(\beta_{ik}\dfrac{\partial\eta_k}{\partial x_j} + \beta_{jk}\dfrac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\right) = 0 \\ \dfrac{d\beta_{i\mu}}{dx} + \sum_\nu^{1\ldots n}\alpha_{i\nu}\dfrac{\partial\xi_\nu}{\partial y_\mu} + \sum_k^{1\ldots m}\beta_{ik}\dfrac{\partial\eta_k}{\partial y_\mu} + \sum_\nu^{1\ldots n}\beta_{\nu\mu}\dfrac{\partial\xi_\nu}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

$$(i, j = 1\ldots n;\ \mu = 1\ldots m)$$

und:

$$(51)\qquad \sum_i^{1\ldots n}\left(\beta_{i\mu}\frac{\partial\xi_i}{\partial y_k} + \beta_{ik}\frac{\partial\xi_i}{\partial y_\mu}\right) = 0 \qquad (\mu, k = 1\ldots m).$$

Unsre Aufgabe kommt also darauf hinaus, festzustellen, ob die Differentialgleichungen (50) und die endlichen Gleichungen (51) zusammen bestehen können, ohne daß die α_{ij} und die $\beta_{i\mu}$ alle verschwinden.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß diese Frage auf genau demselben Wege erledigt werden kann wie die entsprechende Frage für die Gleichungen (25) und (26) auf S. 179. Wir können uns daher begnügen, das Ergebnis, zu dem man dabei gelangen wird, kurz anzugeben.

Ist das simultane System (16) vorgelegt, handelt es sich also darum, festzustellen, ob zu einer ganz bestimmten Kurvenschar Mongesche Gleichungen zweiten Grades als Schnittbedingungen gehören, so findet man, indem man (51) unter Benutzung von (50) genügend oft nach x differentiirt, entweder, daß alle α und β verschwinden, daß also keine Mongeschen Gleichungen von der verlangten Art existiren, oder man erhält

zwischen den $\frac{1}{2}n(n+1)+nm=N$ Größen α, β eine bestimmte Anzahl, etwa L von einander unabhängige lineare homogene Gleichungen, die nach x differentiirt mit Benutzung von (50) keine neuen endlichen Gleichungen zwischen den α, β liefern. Im zweiten Falle kann man L von den Größen α, β durch die $N-L$ übrigen ausdrücken, die ihrerseits nicht mehr durch endliche Relationen verknüpft sind, sondern durch $N-L$ lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmt werden. Der allgemeinste von x freie Ausdruck (48) hängt daher linear und homogen von $N-L$ willkürlichen Konstanten ab.

Führt man statt der Konstanten $c_1 \ldots c_{n+m}$ die Anfangswerte x_ν^0, y_μ^0 ein, die die x_ν, y_μ für $x=x_0$ annehmen, so kann man den allgemeinsten von x freien Ausdruck (48) sofort hinschreiben, und man findet, daß zu der vorgelegten Kurvenschar gerade $N-L$ linear unabhängige MONGEsche Gleichungen zweiten Grades in den Ausdrücken $dx_i^0-\xi_i^0 dx_0$, $dy_\mu^0-\eta_\mu^0 dx_0$ gehören. Es bedarf dann natürlich noch einer besondern Untersuchung, um festzustellen, wieviele von einander unabhängige Gleichungen diese $N-L$ linear unabhängigen Gleichungen zweiten Grades repräsentiren. Andrerseits versteht es sich von selbst, daß die gefundenen $N-L$ MONGEschen Gleichungen, wenn man den Index 0 wegläßt ein System darstellen, das mit der betrachteten Kurvenschar gegenüber allen Punkttransformationen des R_{n+1}: x, $x_1 \ldots x_n$ invariant verknüpft ist.

Denkt man sich nicht eine bestimmte Kurvenschar gegeben, sondern stellt sich die allgemeinere Aufgabe, alle Kurvenscharen des R_{n+1} von mindestens ∞^{n+1} und von höchstens ∞^{n+m} Kurven zu bestimmen, unter deren Schnittbedingungen mindestens eine MONGEsche Gleichung zweiten Grades auftritt, so erhält man in derselben Weise wie auf S. 185 f. eine Reihe von Systemen partieller Differentialgleichungen für die ξ_i, η_μ, und jedes dieser Systeme definirt einen bei allen Punkttransformationen des R_{n+1} invarianten Inbegriff von solchen Kurvenscharen, unter deren Schnittbedingungen eine ganz bestimmte Anzahl von linear unabhängigen MONGEschen Gleichungen zweiten Grades enthalten ist. Kennt man ein Lösungensystem eines solchen Systems von Differentialgleichungen, so kann man bei Einführung der Anfangswerte x_0, x_i^0, y_μ^0 die betreffenden MONGEschen Gleichungen zweiten Grades sofort hinschreiben.

Es hat jetzt offenbar nicht die geringste Schwierigkeit mehr, die entwickelte Methode auch auf den Fall anzuwenden, wo Mongesche Gleichungen dritten, vierten oder noch höheren Grades als Schnittbedingungen auftreten sollen. Verlangt man zum Beispiel solche vom dritten Grade, so kommt alles darauf hinaus, gewisse Funktionen α, β, γ von x und $c_1 \ldots c_{n+m}$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$\sum_{ij\nu}^{1\ldots n} \alpha_{ij\nu}\delta x_i \delta x_j \delta x_\nu + \sum_{ij}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1\ldots n} \beta_{ij\mu}\delta x_i \delta x_j \delta y_\mu + \sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{k\mu}^{1\ldots m} \gamma_{ik\mu}\delta x_i \delta y_k \delta y_\mu$$

von x frei wird, und man erhält wieder für die α, β, γ gewisse lineare homogene Differentialgleichungen und gewisse lineare homogene endliche Gleichungen, die befriedigt werden müssen, ohne daß die α, β, γ sämtlich verschwinden.

Näher darauf einzugehen, wäre zwecklos, da die Methode klar ist. Dagegen ist es es vielleicht nicht unangebracht noch etwas darüber zu sagen, wie sich die Untersuchung über Mongesche Gleichungen zweiten Grades als Schnittbedingungen gestaltet, wenn man zur Darstellung der Kurvenscharen eine Hilfsveränderliche t benutzt.

Wir denken uns also in dem $R_{n+1} : x_1 \ldots x_{n+1}$ eine Kurvenschar durch ein simultanes System von der Form (32) S. 186, definirt und fragen nach den etwa vorhandenen Schnittbedingungen, die Mongesche Gleichungen zweiten Grades sind.

Die Kurvenschar selbst wird durch Gleichungen von der Form (34) dargestellt und die Schnittbedingungen ergeben sich aus (35) durch Elimination von t und dt. Soll nun eine der Schnittbedingungen die Form:

$$\sum_{\nu\pi}^{1\ldots n+m+1} \gamma_{\nu\pi}(c_1 \ldots c_{n+m+1})\, dc_\nu\, dc_\pi = 0 \tag{52}$$

haben, so denken wir uns wieder die linke Seite von (52) vermöge (36) durch die δx_i, δy_μ ausgedrückt und bekommen eine Gleichung von der Form:

$$\sum \gamma_{\nu\pi}\, dc_\nu\, dc_\pi = \sum_{ij}^{1\ldots n+1} \alpha_{ij}\,\delta x_i\,\delta x_j + 2\sum_{i}^{1\ldots n+1}\sum_{\mu}^{1\ldots m} \beta_{i\mu}\,\delta x_i\,\delta y_\mu, \tag{53}$$

wo die α und β gewisse Funktionen von t und den c_ν sind und wo wir rechts die Glieder zweiter Ordnung in den δy_μ schon

weggelassen haben, da die augenscheinlich verschwinden müssen, wenn (52) eine Folge von (35) sein soll.

Es muß nun, wenn wir auf der rechten Seite von (53) für δx_i setzen $\delta x_i + \xi_i dt$ und dann nach Potenzen von dt entwickeln, ein Ausdruck herauskommen, der von dt frei ist, also ergeben sich für die α und β von vornherein die endlichen Gleichungen:

$$(54) \qquad \begin{cases} \sum_j^{1\ldots n+1} \alpha_{ij}\xi_j = 0 & \sum_j^{1\ldots n+1} \beta_{j\mu}\xi_j = 0 \\ (i = 1\ldots n+1, & \mu = 1\ldots m). \end{cases}$$

Endlich muß es möglich sein, die α und β so zu bestimmen, daß die rechte Seite von (53) von t frei wird, und das führt auf Gleichungen, die genau so gebildet sind, wie die Gleichungen (50) und (51), nur daß an Stelle von x die Veränderliche t eintritt und dazu i, j und ν die Werte $1 \ldots n+1$ zu durchlaufen haben. Die Aufgabe kommt dann darauf hinaus, festzustellen, ob die gefundenen Differentialgleichungen und endlichen Gleichungen zusammen bestehen können, ohne daß alle α, β verschwinden.

§ 6.

Eine Erweiterung der in § 1 gegebenen Klassifikation der Kurvenscharen.

Bevor wir zur Behandlung einiger spezieller Probleme von der betrachteten Art übergehen, wollen wir noch zeigen, daß sich an die Betrachtung der Schnittbedingungen einer Kurvenschar noch allgemeinere Aufgaben knüpfen lassen, die aber ebenfalls durch unsre Methode gelöst werden können.

In dem $R_{n+1} : x,\ x_1 \ldots x_n$ $(n > 1)$ sei eine Schar:

$$(55) \qquad x_i = X_i(x,\ c_1 \ldots c_{n+m}) \qquad (i = 1\ldots n)$$

von ∞^{n+m} Kurven vorgelegt $(m > 0)$, die den Raum ausfüllt, und:

$$(56) \quad \varphi_\mu(c_1 \ldots c_{n+m},\ \ dc_1 : \ldots : dc_{n+m}) = 0 \qquad (\mu = 1\ldots n-1)$$

seien die zugehörigen Schnittbedingungen, die aus:

$$(57) \qquad \sum_1^{n+m} \frac{\partial x_i}{\partial c_\tau} dc_\tau = 0 \qquad (i = 1\ldots n)$$

durch Elimination von x entstehen. Betrachten wir nun irgend eine Kurve c_τ von allgemeiner Lage, so bestimmen die Verhältnisgrößen: $dc_1 : \ldots : dc_{n+m}$ alle dieser Kurve c_τ unendlich benachbarten Kurven der Schar (55) und die Gleichungen (56) bestimmen unter diesen unendlich benachbarten Kurven alle die, von denen die Kurve c_τ geschnitten wird, während die Gleichungen (57) unter deu der Kurve c_τ unendlich benachbarten Kurven alle die ausscheiden, die die Kurve c_τ in demselben Punkte $x, x_1 \ldots x_n$ treffen.

Eine anschaulichere Vorstellung von diesen Verhältnissen bekommen wir, wenn wir die dc_τ als homogene Punktkoordinaten in einem Raume $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ deuten. Die Punkte dieses Raumes stellen dann alle der Kurve c_τ unendlich benachbarten Kurven der Schar (55) dar; alle die Kurve c_τ schneidenden Kurven $c_\tau + dc_\tau$ werden durch die Punkte einer m-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_m$ des $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ abgebildet, deren Gleichungen unsre Schnittbedingungen (56) sind, und auf dieser $\mathfrak{M}_m$ liegen ∞^1 ebene $(m-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{E}_{m-1}$, die durch die Gleichungen (57) dargestellt werden und unter denen jede das Bild ist der ∞^{m-1} Kurven $c_\tau + dc_\tau$, welche die Kurve c_τ in demselben Punkte $x, x_1 \ldots x_n$ treffen.

Unsre früher aufgestellte Klassifikation der Kurvenscharen des R_{n+1} (vgl. S. 163 ff.) beschränkte sich auf solche Kurvenscharen, bei denen es unter den Schnitthedingungen (56) mindestens eine in den dc_ν algebraische Gleichung gab; mit andern Worten, wir betrachteten nur den Fall, daß die eben definirte Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_m$ entweder selbst algebraisch war oder doch auf einer algebraischen Punktmannigfaltigkeit lag. Nun aber kann der Fall eintreten, daß $\mathfrak{M}_m$ zwar auf keiner algebraischen Punktmannigfaltigkeit liegt, dafür aber gewisse andre algebraische Mannigfaltigkeiten des $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ bestimmt. Es können zum Beispiel, wenn $m > 1$ ist, die homogenen Koordinaten der ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ (57) eine Anzahl algebraischer Gleichungen befriedigen, andrerseits können, wenn $m \gtreqless 1$ aber $n > 2$, also $n + m - 1 > m + 1$ ist, die homogenen Koordinaten der m-fach ausgedehnten Tangentialebenen von $\mathfrak{M}_m$ gewissen algebraischen Gleichungen genügen, beide Male ohne daß $\mathfrak{M}_m$ selbst das zu tun braucht.

Demnach ist unsre Klassifikation der Kurvenscharen noch einer Erweiterung fähig, bei der man auch die Möglichkeit berücksichtigt, daß für $m > 1$ die Koordinaten der ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ (57)

gewisse Gleichungen ersten, zweiten, ... Grades erfüllen, und daß für $n > 2$ zwischen den Koordinaten der m-fach ausgedehnten Tangentialebenen von $\mathfrak{M}_m$ Relationen ersten, zweiten, ... Grades bestehen. Man kann ferner, wenn $m = 1$ und $n > 3$ ist, die zweifach ausgedehnten Schmiegungsebenen von $\mathfrak{M}_1$ in Betracht ziehen, usf.

Um zu zeigen, daß unsre Methode auch zur Erledigung derartiger Fragen führt, wollen wir einige einfache Fälle behandeln.

Zuerst setzen wir $m = 2$, während n beliebig, nur größer als 1 sein soll, so daß unsre $\mathfrak{M}_m$ zweifach ausgedehnt, eine $\mathfrak{M}_2$ ist und aus einer Schar von ∞^1 Geraden des $\mathfrak{R}_{n+1}$ $(n+1 \geqq 3)$ besteht. Wir fragen, wann die Koordinaten dieser Geraden eine lineare homogene Gleichung befriedigen, wann also die Erzeugenden unsrer $\mathfrak{M}_2$ einem linearen Komplexe angehören. Dabei versteht sich von selbst, daß die Koeffizienten der Gleichung dieses Komplexes gewisse Funktionen von $c_1 \ldots c_{n+2}$ sein müssen.

Unsre $(n+2)$-fach unendliche Kurvenschar:

$$x_i = X_i(x,\ c_1 \ldots c_{n+2}) \qquad (i=1\ldots n) \tag{58}$$

denken wir uns durch ein simultanes System:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx} = \xi_i\,(x,\ x_1 \ldots x_n,\ y_1,\ y_2) & (i=1\ldots n) \\ \dfrac{dy_\mu}{dx} = \eta_\mu(x,\ x_1 \ldots x_n,\ y_1,\ y_2) & (\mu=1,2) \end{cases} \tag{59}$$

definirt, dessen allgemeine Lösung sei:

$$\begin{cases} x_i = X_i\,(x,\ c_1 \ldots c_{n+2}) & (i=1\ldots n) \\ y_\mu = Y_\mu(x,\ c_1 \ldots c_{n+2}) & (\mu=1,2), \end{cases} \tag{60}$$

und wie früher setzen wir:

$$\begin{cases} \delta x_i = \sum_1^{n+2} \dfrac{\partial x_i}{\partial c_\nu}\, dc_\nu, \quad \delta y_\mu = \sum_1^{n+2} \dfrac{\partial y_\mu}{\partial c_\nu}\, dc_\nu \\ (i=1\ldots n;\ \ \mu=1,2). \end{cases} \tag{61}$$

Die ∞^1 Erzeugenden unsrer $\mathfrak{M}_2$, die in dem $\mathfrak{R}_{n+1} : dc_1 \ldots dc_{n+2}$ liegt, werden dann durch die Gleichungen: $\delta x_1 = 0, \ldots, \delta x_n = 0$ dargestellt, und es fragt sich, unter welchen Bedingungen hieraus eine lineare Gleichung zwischen den Koordinaten dieser Erzeugenden folgt.

Sind dc_ν und $d'c_\nu$ zwei verschiedene Punkte des $\mathfrak{R}_{n+1}$, so hat ihre Verbindungslinie die Koordinaten $dc_\nu\, d'c_\pi - dc_\pi\, d'c_\nu$,

und bezeichnen wir mit $\delta' x_i$, $\delta' y_i$ das, was aus δx_i, δy_i wird, wenn man dc_ν durch $d'c_\nu$ ersetzt, so kommt unsre Frage darauf hinaus, ob aus den $2n$ Gleichungen: $\delta x_i = 0$, $\delta' x_i = 0$ durch Elimination von x eine Relation von der Form:

$$(62) \qquad \sum_{\nu\pi}^{1\ldots n+2} \chi_{\nu\pi}(c_1 \ldots c_{n+2})(dc_\nu d'c_\pi - dc_\pi d'c_\nu) = 0$$

hergeleitet werden kann, wo $\chi_{\nu\pi} + \chi_{\pi\nu} = 0$ ist.

Da die Gleichungen (61) linear und homogen und nach den dc_ν auflösbar sind, so werden die zweireihigen Determinanten:

$$(63) \qquad \begin{vmatrix} \delta x_1 & \ldots \delta x_n & \delta y_1 & \delta y_2 \\ \delta' x_1 & \ldots \delta' x_n & \delta' y_1 & \delta' y_2 \end{vmatrix}$$

lineare homogene Funktionen der $dc_\nu d'c_\pi - dc_\pi d'c_\nu$ und umgekehrt, wir können demnach die linke Seite von (62) durch diese Determinanten ausdrücken:

$$(64) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu\pi}^{1\ldots n+2} \chi_{\nu\pi}(dc_\nu d'c_\pi) = \\ = \displaystyle\sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{ij}(\delta x_i \delta' x_j) + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1,2} \beta_{i\mu}(\delta x_i \delta' y_\mu) + \gamma(\delta y_1 \delta' y_2), \end{cases}$$

wo die Bedeutung der Klammern ersichtlich ist, wo ferner $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$ und die α_{ij}, $\beta_{i\mu}$, γ Funktionen von x, $c_1 \ldots c_{n+2}$ sind. Weil aber (62) eine Folge von $\delta x_i = 0$, $\delta' x_i = 0$ sein soll, so muß γ identisch verschwinden und es müssen außerdem die α_{ij}, $\beta_{i\mu}$ solche Funktionen von x sein, daß die rechte Seite von (64) x gar nicht enthält. Bedenken wir jetzt noch, daß zum Beispiel:

$$\frac{d}{dx}(\delta x_i \delta' x_j) = (\delta \xi_i \delta' x_j) + (\delta x_i \delta' \xi_j)$$

wird, wo $\delta \xi_i$ und $\delta' \xi_i$ in bekannter Weise zu bilden sind (vgl. S. 191), so erkennen wir, daß es möglich sein muß, die α und β derart zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$\sum_{ij}^{1\ldots n} \frac{d\alpha_{ij}}{dx}(\delta x_i \delta' x_j) + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1,2} \frac{d\beta_{i\mu}}{dx}(\delta x_i \delta' y_\mu) +$$

$$+ 2\sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{ij}(\delta x_i \delta' \xi_j) + 2\sum_{i}^{1\ldots n}\sum_{\mu}^{1,2} \beta_{i\mu}\{(\delta \xi_i \delta' y_\mu) + (\delta x_i \delta' \eta_\mu)\}$$

identisch verschwindet, was wiederum offenbar nur eintreten kann, wenn die Koeffizienten der einzelnen Klammerausdrücke $(\delta x_i \delta' x_j)$, $(\delta x_i \delta' y_\mu)$, $(\delta y_1 \delta' y_2)$ verschwinden.

Auf diese Weise erhalten wir zur Bestimmung der α, β die Differentialgleichungen:

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_{ij}}{dx} + \sum_1^n{}_\nu \left(\alpha_{i\nu} \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial x_j} - \alpha_{j\nu} \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} \right) + \sum_1^2{}_\mu \left(\beta_{i\mu} \dfrac{\partial \eta_\mu}{\partial x_j} - \beta_{j\mu} \dfrac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \dfrac{d\beta_{i\mu}}{dx} + \sum_1^n{}_j \alpha_{ij} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial y_\mu} + \sum_1^n{}_j \beta_{j\mu} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \sum_1^2{}_\pi \beta_{i\pi} \dfrac{\partial \eta_\pi}{\partial y_\mu} = 0 \end{cases} \qquad (i, j = 1 \ldots n;\ \mu = 1,2)$$

zweitens die endliche Gleichung:

$$(66)\qquad \sum_1^n{}_i \left(\beta_{i1} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_2} - \beta_{i2} \frac{\partial \xi_i}{\partial y_1} \right) = 0,$$

nnd es bleibt nur noch übrig festzustellen, ob die Gleichungen (65) und (66) znsammen bestehen können, ohne daß die α und β sämtlich verschwinden. Führt man die Anfangswerte x_i^0, y_μ^0 der x_i, y_μ für $x = x_0$ ein, so kann man natürlich die etwa auftretenden Relationen von der Form (62) hinschreiben, ohne das simultane System (59) integriren zu müssen.

Ähnlich würde sich ermitteln lassen, ob aus den Gleichungen: $\delta x_i = \delta' x_i = 0$ Relationen zweiten und höheren Grades zwischen den $(dc_\nu d' c_\pi)$ folgen. Anch liegt auf der Hand, welches Verfabren man einzuschlagen hätte, um im Falle $m > 2$ festzustellen, ob die Koordinaten der ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ (57) durch Relationen ersten, zweiten, ... Grades verknüpft sind. Auf diese Anfgabe kommen wir übrigens später noch einmal zurück.

Zweitens wollen wir $m = 1$ setzen, während $n > 2$ sein soll. Dann stellen die Gleichungen (56) eine Kurve $\mathfrak{C}$ des $\mathfrak{R}_n : dc_1 \ldots dc_{n+1}$ dar und die Gleichungen (57) die ∞^1 Punkte dieser Kurve. Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die Koordinaten der Tangenten dieser Kurve einem linearen Komplexe angehören. Die Koeffizienten der Gleichung dieses Komplexes müssen natürlich gewisse Funktionen von $c_1 \ldots c_{n+1}$ sein.

Es sei:

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx} = \xi_i (x, x_1 \ldots x_n, y) & (i = 1 \ldots n) \\ \dfrac{dy}{dx} = \eta (x, x_1 \ldots x_n, y) \end{cases}$$

das simultane System, das unsre $(n+1)$-fach unendliche Kurvenschar definirt und:

$$(68)\qquad \begin{cases} x_i = X_i(x, c_1 \dots c_{n+1}) \\ y = Y(x, c_1 \dots c_{n+1}) \end{cases} \qquad (i = 1 \dots n)$$

sei seine allgemeine Lösung, ferner setzen wir wieder:

$$(69)\qquad \begin{cases} \delta x_i = \sum_1^{n+1} {}_\tau \dfrac{\partial x_i}{\partial c_\tau} dc_\tau \\ \delta y = \sum_1^{n+1} {}_\tau \dfrac{\partial y}{\partial c_\tau} dc_\tau \end{cases} \qquad (i = 1 \dots n)$$

so daß die ∞^1 Punkte dc_τ der besprochenen Kurve $\mathfrak{C}$ des $\mathfrak{R}_n$ durch die n Gleichungen: $\delta x_i = 0$ bestimmt werden. Dabei spielt x die Rolle der unabhängigen Veränderlichen, wir können also auch kurz von dem Punkte x der Kurve $\mathfrak{C}$ sprechen.

Jeder lineare Komplex unseres $\mathfrak{R}_n$ wird durch eine Gleichung von der Form:

$$(70)\qquad \sum_{\tau\pi}^{1 \dots n+1} \chi_{\tau\pi}(c_1 \dots c_{n+1})(dc_\tau d' c_\pi - dc_\pi d' c_\tau) = 0$$

dargestellt, wo schon angedeutet ist, daß in unserem Falle die Koeffizienten Funktionen von $c_1 \dots c_{n+1}$ sein sollen. Drücken wir hier vermöge (69) die dc_τ, $d'c_\tau$ durch δx_i, δy, $\delta' x_i$, $\delta' y$ aus, so erhält die linke Seite von (70) die Gestalt:

$$(71)\qquad \sum_{\tau\pi}^{1 \dots n+1} \chi_{\tau\pi}(dc_\tau d' c_\pi) = \sum_{i\nu}^{1 \dots n} \alpha_{i\nu}(\delta x_i \delta' x_\nu) + 2 \sum_i^{1 \dots n} \beta_i(\delta x_i \delta' y),$$

wo die $\alpha_{i\nu}$, β_i gewisse Funktionen von $x, c_1 \dots c_{n+1}$ sind, wo $\alpha_{i\nu} + \alpha_{\nu i} = 0$ und wo die Klammern $(dc_\tau d' c_\pi)$, ... ebenso zu verstehen sind wie auf S. 197. Demnach werden wir den allgemeinsten linearen Komplex (70) auch dadurch bekommen, daß wir die rechte Seite von (71) gleich Null setzen, wofern wir nur die Funktionen $\alpha_{i\nu}$, β_i in allgemeinster Weise so bestimmen, daß die rechte Seite von (71) das x gar nicht enthält und sich also auf einen Ausdruck von der auf der linken Seite von (71) stehenden Form reduzirt. Die rechte Seite von (71) wird aber dann und nur dann von x frei, wenn ihr, ähnlich wie auf S. 197 zu bildender Differentialquotient nach x identisch verschwindet, und das ist nur möglich, wenn in diesem Differentialquotienten

die Faktoren von $(\delta x_i \delta' x_\nu)$, $(\delta x_i \delta' y)$ einzeln verschwinden, da bei beliebigen dc_τ, $d'c$ zwischen diesen Klammerausdrücken augenscheinlich keine lineare homogene Relation bestehen kann. Wir finden so für die Funktionen $\alpha_{i\nu}$, β_i die Differentialgleichungen:

$$(72)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_{i\nu}}{dx} + \sum_1^n{}_j \left(\alpha_{ij} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_\nu} - \alpha_{\nu j} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) + \beta_i \dfrac{\partial \eta}{\partial x_\nu} - \beta_\nu \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{d\beta_i}{dx} + \sum_1^n{}_j \alpha_{ij} \dfrac{\partial \xi_j}{\partial y} + \beta_i \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (i, \nu = 1 \ldots n)$$

deren allgemeinste Lösungen uns die Form liefern, die der allgemeinste lineare Komplex (70) annimmt, wenn wir die dc_ν, $d'c_\nu$ durch die δx_i, δy, $\delta' x_i$, $\delta' y$ ausdrücken.

Die $n+1$ Koordinaten dc_τ des Punktes x der Kurve $\mathfrak{C}$ sind nun durch die Gleichungen: $\delta x_1 = 0, \ldots, \delta x_n = 0$ bestimmt; den dabei auftretenden willkürlichen Proportionalitätsfaktor können wir so wählen, daß $\delta y = 1$ wird, dann sind die dc_τ ganz bestimmte Funktionen von x. Der dem Punkte x unendlich benachbarte Punkt $x + \delta x$ von $\mathfrak{C}$ hat gewisse Koordinaten $dc_\tau + d^2 c_\tau$, die wir aus den Gleichungen:

$$d(\delta x_i) = \sum_1^{n+1}{}_\tau \frac{d}{dx} \frac{\partial x_i}{\partial c_\tau} \cdot dc_\tau \cdot dx + \sum_1^{n+1}{}_\tau \frac{\partial x_i}{\partial c_\tau} d^2 c_\tau = 0$$

$$d(\delta y) = \sum_1^{n}{}_\tau \frac{d}{dx} \frac{\partial y}{\partial c_\tau} \cdot dc_\tau \cdot dx + \sum_1^{n+1}{}_\tau \frac{\partial y}{\partial c_\tau} d^2 c_\tau = 0$$

berechnen können. Hier sind aber die Faktoren von dx nichts anderes als $\delta \xi_i$ und $\delta \eta$ gebildet für den Punkt x von $\mathfrak{C}$, also für $\delta x_\nu = 0$, $\delta y = 1$, folglich bekommen wir für die $d^2 c_\tau$ die Gleichungen:

$$(73)\quad \begin{cases} \sum_1^{n+1}{}_\tau \dfrac{\partial x_i}{\partial c_\tau} d^2 c_\tau = - \dfrac{\partial \xi_i}{\partial y} dx \qquad (i = 1 \ldots n) \\ \sum_1^{n+1}{}_\tau \dfrac{\partial y}{\partial c_\tau} d^2 c_\tau = - \dfrac{\partial \eta}{\partial y} dx \end{cases}$$

und können nunmehr, wenn wir wollen, auch die Koordinaten $dc_\tau d^2 c_\pi - dc_\pi d^2 c_\tau$ der Tangente unserer Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkte x berechnen.

Aber das ist gar nicht nötig. Die Tangenten von $\mathfrak{C}$ sollen dem linearen Komplexe (70) angehören, also muß (70) identisch erfüllt sein, wenn man jedes dc_τ durch den aus $\delta x_i = 0$, $\delta y = 1$ folgenden Wert ersetzt und jedes $d'c_\tau$ durch $dc_\tau + d^2c_\tau$ oder einfach durch d^2c_τ. Nun zeigen die Gleichungen (69) und (73), daß sich dabei ergibt:

$$\delta' x_i = -\frac{\partial \xi_i}{\partial y} dx, \qquad \delta' y = -\frac{\partial \eta}{\partial y} dx,$$

mithin ist unsre Forderung dann und nur dann erfüllt, wenn die rechte Seite von (71) verschwindet, sobald man alle $\delta x_i = 0$, $\delta y = 1$ setzt und den $\delta' x_i$, $\delta' y$ die eben gefundenen Werte erteilt. Hieraus folgt, daß zwischen den α und β noch die neue endliche Gleichung:

$$\sum_1^n \beta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = 0 \tag{74}$$

bestehen muß.

Sollen daher die Tangenten der Kurve $\mathfrak{C}$ einem linearen Komplexe (70) angehören, so ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen (72) und (74) zusammen bestehen können, ohne daß alle α und β verschwinden. Man kann infolgedessen stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, wievielen linear unabhängigen linearen Komplexen (70) die Tangenten von $\mathfrak{C}$ angehören, und wenn man statt der Konstanten c_τ die Anfangswerte x_i^0, y_0 einführt, die $x_1 \ldots x_n$, y für $x = x_0$ annehmen, kann man sogar die Gleichungen der betreffenden linearen Komplexe hinschreiben, ohne vorher das simultane System (67) integriren zu müssen.

Die eben entwickelten Betrachtungen gestatten uns auch noch andere Fragen zu beantworten, zum Beispiel die, ob die Tangenten der Kurve $\mathfrak{C}$ auf einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades:

$$\sum_{\tau\pi}^{1\ldots n+1} \psi_{\tau\pi}(c_1 \ldots c_{n+1})\, dc_\tau dc_\pi = 0 \tag{75}$$

liegen.

Drücken wir in (75) die dc_τ durch die δx_i, δy aus, so erscheint die Gleichung der Mannigfaltigkeit zweiten Grades (75) in der Form:

$$\sum_{ij}^{1\ldots n} \alpha_{ij} \delta x_i \delta x_j + 2 \sum_i^{1\ldots n} \beta_i \delta x_i \delta y + \gamma \delta y^2 = 0, \tag{76}$$

wo die α, β, γ gewisse Funktionen von x, $c_1 \ldots c_{n+1}$ bezeichnen. Umgekehrt wird die allgemeinste Mannigfaltigkeit zweiten Grades (75) durch die Gleichung (76) dargestellt, wenn wir die α, β, γ in allgemeinster Weise so bestimmen, daß die linke Seite von (76) das x gar nicht enthält, wenn wir also für die α, β, γ die allgemeinsten Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$(77)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_{ij}}{dx} + \sum_1^n{}_\nu \left(\alpha_{i\nu} \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial x_j} + \alpha_{j\nu} \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} \right) + \beta_i \dfrac{\partial \eta}{\partial x_j} + \beta_j \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{d\beta_i}{dx} + \sum_1^n{}_\nu \alpha_{i\nu} \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial y} + \beta_i \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{d\gamma}{dx} + 2 \sum_1^n{}_\nu \beta_\nu \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial y} + 2\gamma \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (i, j = 1 \ldots n)$$

setzen.

Soll nun zunächst die Kurve $\mathfrak{C}$ selbst auf der Mannigfaltigkeit (75) liegen, so muß deren Gleichung, wenn sie in der Form (76) dargestellt wird, für $\delta x_1 = \ldots = \delta x_n = 0$, $\delta y = 1$ erfüllt sein, was die Bedingung:

$$(78)\qquad \gamma = 0$$

liefert. Sollen überdies alle Tangenten von $\mathfrak{C}$ der Mannigfaltigkeit (75) angehören, so muß (75) erfüllt sein, wenn man dc_τ durch $\lambda dc + \mu d^2 c_\tau$ ersetzt, wo $d^2 c_\tau$ die früher erklärte Bedeutung hat, während λ und μ willkürlich bleiben. Daher muß (76) bei beliebigen λ, μ zu einer Identität werden, wenn man für δx_i, δy einsetzt:

$$\lambda \cdot 0 - \mu \frac{\partial \xi_i}{\partial y} dx, \quad \lambda - \mu \frac{\partial \eta}{\partial y} dx.$$

Das ergibt die beiden Bedingungen $\gamma = 0$ und

$$\sum_1^n{}_\nu \beta_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial y} = 0,$$

die schon aus (78) und (77) folgen, und außerdem noch die neue Bedingung:

$$(79)\qquad \sum_{ij}^{1 \ldots n} \alpha_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} = 0.$$

Damit ist unsre Aufgabe auf die andere zurückgeführt, zu entscheiden, ob die Gleichungen (77), (78), (79) zusammen be-

stehen können, ohne daß auch die α und β alle verschwinden. Es ist somit klar, daß man durch Differentiationen und Eliminationen ermitteln kann, wie vielen linear unabhängigen Mannigfaltigkeiten zweiten Grades die Tangenten von $\mathfrak{C}$ angehören, und daß man bei Einführung der Anfangswerte x_0, x_i^0, y_0 die Gleichungen dieser Mannigfaltigkeiten hinschreiben kann, ohne vorher das simultane System (67) integriren zu müssen.

Den beiden auf S. 195 f. besprochenen Erweiterungen unsrer Klassifikation können wir schließlich noch eine dritte hinzufügen. Wir erhalten diese, wenn wir bedenken, daß die ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ (57) ein Umhüllungsgebilde besitzen können, das sich durch Elimination von x aus den Gleichungen (57) und:

$$\sum_1^{n+m} \frac{d}{dx}\frac{\partial x_i}{\partial c_\tau} \cdot dc_\tau = 0 \qquad (i=1\ldots n) \tag{80}$$

ergibt. Das so entstehende Mongesche System stellt augenscheinlich die Bedingungen dafür dar, daß die beiden unendlich benachbarten Kurven c_τ und $c_\tau + dc_\tau$ einander in der ersten Ordnung berühren, und ähnlich würde man, wenn die ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ (57) Umhüllungsgebilde höherer Ordnung besitzen, zu den Bedingungen für die Berührung zweiter, dritter, ... Ordnung zwischen zwei unendlich benachbarten Kurven der Schar (55) aufsteigen können. Die angekündigte Erweiterung unsrer Klassifikation würde dann darauf beruhen, daß sich unter den Berührungsbedingungen so und so viele linear unabhängige Mongesche Gleichungen von bestimmtem Grade in den Differentialen befinden können.

Die Untersuchung der Berührungsbedingungen einer Kurvenschar des R_{n+1} läßt sich nun allerdings, wie auf S. 162 erwähnt ist, stets auf die der Schnittbedingungen einer Kurvenschar in einem höheren Raume zurückführen, es wird aber trotzdem nicht überflüssig sein, wenn ich hier kurz auf die direkte Behandlung derartiger Fragen eingehe. Das empfiehlt sich schon deshalb, weil diese Betrachtungen auch auf den bisher ausgeschlossenen Fall $n = 1$, also auf den Fall der Kurvenscharen einer Ebene anwendbar sind, wo Schnittbedingungen in unserm Sinne gar nicht auftreten. Ich beschränke mich jedoch auf die Frage nach den Berührungsbedingungen erster Ordnung, was zum Verständnis der ganzen Methode genügen wird.

Wir denken uns also eine Kurvenschar des R_{n+1}: $x, x_1 \ldots x_n$ ($n \geqq 1$) durch ein simultanes System von der Form (16), S. 175,

definirt, dessen allgemeine Lösungen die Form (18) haben mögen. Unter δx_i, δy_μ verstehen wir wieder die durch (23), S. 178, definirten Größen. Die Berührungsbedingungen erster Ordnung unsrer Kurvenschar erhalten wir durch Elimination von x aus den Gleichungen (57) und (80), mit andern Worten aus:

$$\delta x_i = 0, \quad \frac{d}{dx}\delta x_i = 0 \qquad (i = 1 \ldots n), \tag{81}$$

wofür wir offenbar das Gleichungensystem:

$$\delta x_i = 0, \quad \sum_1^m{}_\mu \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\mu}\delta y_\mu = 0 \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{82}$$

setzen können.

Reduzirt sich das System (82) auf die n Gleichungen: $\delta x_i = 0$ oder zieht es die $n + m$ Gleichungen: $\delta x_i = 0$, $\delta y_\mu = 0$ nach sich, so wird überhaupt keine allgemein gelegene Kurve unsrer Schar von einer unendlich benachbarten Kurve der Schar berührt. Demnach treten Berührungsbedingungen in unserm Sinne dann und nur dann auf, wenn die ξ_i nicht alle von $y_1 \ldots y_m$ frei sind, wenn ferner m mindestens gleich 2 ist und wenn endlich in der Matrix (27), S. 180, alle m-reihigen Determinanten verschwinden, wobei die letzte Forderung natürlich nur für $m \leqq n$ in Betracht kommt.

Ist $n > 1$, so sind selbstverständlich unter den Berührungsbedingungen der Kurvenschar auch alle ihre Schnittbedingungen mit enthalten. Aber die einfachste Form der Berührungsbedingungen wird sich keineswegs immer dadurch ergeben, daß man zu den Schnittbedingungen gewisse neue MONGESche Gleichungen hinzufügt. So findet man zum Beispiel für $n = 2$, $m = 2$ nur eine Schnittbedingung, aber, wenn es Berührungsbedingungen gibt, deren zwei von einander unabhängige. Deutet man, wie auf S. 195, die vier dc_τ als homogene Koordinaten in einem $\mathfrak{R}_3$, so stellt die Schnittbedingung eine geradlinige Fläche dieses $\mathfrak{R}_3$ dar und zwar eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante durch die Berührungsbedingungen geliefert wird. Ist diese Rückkehrkante insbesondere eine gewundene rationale Kurve dritter Ordnung, so werden die Berührungsbedingungen vollständig und rein durch drei linear unabhängige MONGESche Gleichungen zweiten Grades dargestellt, die Schnittbedingung aber ist eine MONGESche Gleichung vierten Grades. Bei Kurvenscharen, die Berührungsbedingungen in unserm Sinne liefern, wird man daher gut tun, zuerst nach den Be-

rührungsbedingungen zn fragen und zwar gleich nach denen von möglichst hoher Ordnung der Berührung, und dann wird man nach einander die Berührungsbedingungen der niedrigeren Ordnungen betrachten, bis man schließlich zu den Schnittbedingungen gelangt. Die geometrische Deutung der Berührungs- und der Schnittbedingungen durch Punktmannigfaltigkeiten in dem $\mathfrak{R}_{m+n-1}$ (vgl. S. 195) wird dabei von großem Nutzen sein.

Wir wollen jetzt noch andeuten, wie man entscheidet, ob nnter den Berührungsbedingungen erster Ordnung Mongesche Gleichungen zweiten Grades vorkommen.

Die Gleichungen (82) seien nach gerade $m-l$ von den δy_μ auflösbar und also in der Form

$$(82') \qquad \begin{cases} \delta x_i = 0, \quad \Delta_k = \delta y_{l+k} - \sum_1^l{}_\lambda \varphi_{k\lambda} \delta y_\lambda = 0 \\ \qquad\qquad (i=1\ldots n;\ k=1\ldots m-l) \end{cases}$$

darstellbar, wo $0 < l \leqq n$ und $l < m$ und wo die $\varphi_{k\lambda}$ bekannte Funktionen von x, $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_m$ sind. Soll dann aus (82') eine Mongesche Gleichnng zweiten Grades von der Form (46), S. 190 folgen, die nicht schon aus $\delta x_i = 0$ $(i=1\ldots n)$ allein folgt, so mnß die linke Seite von (46), wenn man sie auf Grund von (23), S. 178 durch die δx_i, δy_μ ausdrückt, die Form bekommen:

$$(83) \quad \sum_{i\nu}^{1\ldots n} \alpha_{i\nu} \delta x_i \delta x_\nu + 2 \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_\mu \beta_{i\mu} \delta x_i \delta y_\mu + \sum_1^m{}_\lambda \sum_1^{m-l}{}_k \gamma_{\lambda k} \delta y_\lambda \Delta_k,$$

wo die α, β, γ solche Funktionen von x und $c_1 \cdots c_{n+m}$ sind, daß der Ausdruck (83) von x frei wird, und wo die $\gamma_{\lambda k}$ nicht alle verschwinden dürfen. Berechnet man nun den nach x genommenen Differentialquotienten von (83) auf Grund der Formeln:

$$\frac{d}{dx} \delta x_i = \delta \xi_i, \qquad \frac{d}{dx} \delta y_\mu = \delta \eta_\mu,$$

$$\frac{d}{dx} \Delta_k = \delta \eta_{l+k} - \sum_1^l{}_\lambda \left\{ \varphi_{k\lambda} \delta \eta_\lambda + \frac{d\varphi_{k\lambda}}{dx} \delta y_\lambda \right\},$$

so erhält man eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der δx_i, δy_μ, deren Koeffizienten sämtlich verschwinden müssen, und gelangt so zu einem Systeme von Differentialgleichungen nnd von endlichen Gleichnngen für die α, β, γ, das, wenn man alle γ gleich Nnll setzt, in das System (50), (51) auf S. 191 übergeht. Alles kommt nunmehr darauf an, ob das gefundene System durch ge-

wisse Funktionen α, β, γ befriedigt werden kann, ohne daß die γ alle verschwinden. Ist diese Frage mit ja zu beantworten, so kann man bei Einführung der Anfangswerte x_0, x_i^0, y_μ^0 ohne Integration alle Berührungsbedingungen hinschreiben, die keine Schnittbedingungen sind und die durch MONGEsche Gleichungen zweiten Grades dargestellt werden.

Wir verlassen jetzt die allgemeinen Betrachtungen und wenden uns zur Behandlung einiger spezieller Aufgaben.

§ 7.

Kurvenscharen des gewöhnlichen Raumes.

Zu jeder dreifach unendlichen Kurvenschar:

$$y = Y(x, c_1, c_2, c_3), \quad z = Z(x, c_1, c_2, c_3), \tag{84}$$

die den ganzen Raum x, y, z ausfüllt, gehören zwei MONGEsche Gleichungen: erstens genügt sie selbst einer ganz bestimmten MONGEschen Gleichung in x, y, z:

$$\frac{dz}{dx} = \omega\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right), \tag{85}$$

die aus (84) und

$$\frac{dy}{dx} = Y_x, \quad \frac{dz}{dx} = Z_x \tag{86}$$

durch Elimination von c_1, c_2, c_3 erhalten wird. Zweitens wird ihre Schnittbedingung durch eine MONGEsche Gleichung

$$\varphi(c_1, c_2, c_3, dc_1 : dc_2 : dc_3) = 0 \tag{87}$$

in den c_k dargestellt, die sich aus

$$\sum_1^3{}_k \frac{\partial y}{\partial c_k} dc_k = 0, \quad \sum_1^3{}_k \frac{\partial z}{\partial c_k} dc_k = 0 \tag{88}$$

durch Elimination von x ergibt.

Deuten wir andrerseits die c_k als Veränderliche und x, y, z als Parameter, so stellen die Gleichungen (84) eine dreifach unendliche Kurvenschar des Raumes c_1, c_2, c_3 dar, die diesen Raum ganz ausfüllt und die augenscheinlich der MONGEschen Gleichung (87) genügt, während ihre Schnittbedingung durch die MONGEsche Gleichung (85) geliefert wird.

Wir haben also — und das ist die Auffassung, die LIE schon bei seinen frühesten Untersuchungen über Kurvenkomplexe zugrundegelegt hat — zwei Räume und in jedem eine dreifach

unendliche Kurvenschar, die einer Mongeschen Gleichung genügt, aber die Mongesche Gleichung des einen Raumes ist jedesmal zugleich die Schnittbedingung für die Kurvenschar des anderen Raumes.

Lie hat nun bewiesen, daß die beiden Mongeschen Gleichnngen (85) und (87) niemals beide in den Differentialen linear sein können, ohne zugleich beide integrabel zu sein.[1]) Mit anderen Worten: Ist die eine der beiden Gleichungen (85) und (87) eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung, so kann die andere nicht linear sein. Wir werden jetzt zeigen, daß sich dieser Liesche Satz sozusagen ganz von selber ergibt, wenn wir auf Grund unserer allgemeinen Methode die Bedingungen dafür aufsnchen, daß die zn einer Kurvenschar (84) gehörige Schnittbedingung (87) eine Pfaffsche Gleichung wird.

Da wir uns die Kurvenscharen, die wir betrachten, immer durch Differentialgleichungen definirt denken, so setzen wir voraus, daß uns eine beliebige Mongesche Gleichung (85) vorgelegt ist, und fassen die Aufgabe so: Es soll festgestellt werden, wann eine dreifach unendliche Kurvenschar, die den ganzen Raum x, y, z ausfüllt und die der Gleichnng (85) genügt, als Schnittbedingung (87) eine Pfaffsche Gleichung in den c_k besitzt. Dabei ist übrigens zu bemerken, daß eine Schar von ∞^3 Integralkurven der Gleichung (85) den Raum stets von selber ausfüllt, es sei denn (85) eine integrable Pfaffsche Gleichung.

Die allgemeinste den Raum ausfüllende Schar (84) von ∞^3 Integralkurven der Gleichung (85) läßt sich durch ein simultanes System von der Form

$$(89)\qquad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = \omega(x, y, z, y'), \quad \frac{dy'}{dx} = \chi(x, y, z, y')$$

definiren, dessen allgemeine Lösung durch die vereinigten Gleichungen (84) und

$$(90)\qquad y' = Y_x$$

dargestellt wird. Unsere Aufgabe kommt also darauf hinaus, bei gegebenem ω die Funktion χ so zu bestimmen, daß die Schnitt-

1) Ohne Beweis teilt er den Satz mit in der Arbeit „Über Complexe", Math. Ann. Bd. V, S. 163, Z. 6 f. Seinen Beweis hat Lie erst im Jahrgange 1897 dieser Berichte auf S. 723 veröffentlicht. Einen etwas anderen Beweis enthält die auf S. 163 angeführte nachgelassene Arbeit (vgl. das. S. 308—310).

bedingung der durch (89) definirten Kurvenschar des Raumes x, y, z eine PFAFFsche Gleichung wird.

Setzen wir wie gewöhnlich:

$$(91)\qquad \begin{cases} \delta y = \sum_1^3{}_k \dfrac{\partial y}{\partial c_k} dc_k \\ \delta z = \sum_1^3{}_k \dfrac{\partial z}{\partial c_k} dc_k \\ \delta y' = \sum_1^3{}_k \dfrac{\partial y'}{\partial c_k} dc_k, \end{cases}$$

so genügen die hierdurch definirten Größen δy, δz, $\delta y'$ den Differentialgleichungen:

$$(92)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\delta y = \delta y', \quad \dfrac{d}{dx}\delta z = \omega_y \delta y + \omega_z \delta z + \omega_{y'} \delta y'; \\ \dfrac{d}{dx}\delta y' = \chi_y \delta y + \chi_z \delta z + \chi_{y'} \delta y'. \end{cases}$$

Nun ergibt sich die Schnittbedingung unserer Kurvenschar durch Elimination von x aus den beiden Gleichungen $\delta y = \delta z = 0$, und diese Elimination liefert nach S. 178 dann und nur dann eine PFAFFsche Gleichung in c_1, c_2, c_3, wenn es möglich ist, zwei Funktionen β und γ von x, c_1, c_2, c_3 derart zu bestimmen, daß der Ausdruck

$$(93)\qquad A = \beta \delta y + \gamma \delta z$$

von x frei wird, ohne daß β und γ beide verschwinden. Wegen (92) wird jetzt:

$$(94)\qquad \frac{dA}{dx} = \left(\frac{d\beta}{dx} + \gamma \omega_y\right)\delta y + \left(\frac{d\gamma}{dx} + \gamma \omega_z\right)\delta z + (\beta + \gamma \omega_{y'})\delta y',$$

und dieser Ausdruck, der identisch verschwinden muß, tut das dann und nur dann, wenn die Faktoren von δy, δz, $\delta y'$ einzeln verschwinden, wenn also β und γ den beiden Differentialgleichungen

$$(95)\qquad \frac{d\beta}{dx} + \gamma \omega_y = 0, \qquad \frac{d\gamma}{dx} + \gamma \omega_z = 0$$

und der endlichen Gleichung

$$(96)\qquad \beta + \gamma \omega_{y'} = 0$$

genügen.

Differentiirt man (96) nach x, indem man (95) benutzt, und bedenkt man, daß γ nicht verschwinden darf, weil sonst β auch null wäre, so erhält man die folgende Bedingung:

$$\frac{d}{dx}\omega_{y'} - \omega_y - \omega_z\omega_{y'} = 0 \tag{97}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\omega_{xy'} + y'\omega_{yy'} + \omega\omega_{zy'} + \chi\omega_{y'y'} - \omega_y - \omega_z\omega_{y'} = 0, \tag{98}$$

deren identisches Bestehen notwendig und hinreichend ist, damit die Schnittbedingung der durch (89) definirten Kurvenschar des Raumes x, y, z eine Pfaffsche Gleichung sei.

Ist (98) identisch erfüllt, so hat der allgemeinste von x freie Ausdruck (93) die Form:

$$A = \gamma(\delta z - \omega_{y'}\delta y), \tag{93'}$$

wo γ aus der zweiten der Gleichungen (95) bestimmt werden muß. Denken wir uns jetzt die Konstanten c_1, c_2, c_3 durch die Anfangswerte y_0, z_0, y_0' ausgedrückt, die y, z, y' für $x = x_0$ annehmen, so können wir den von x freien Ausdruck A ohne Integration des simultanen Systems (89) finden, indem wir die Form bestimmen, die er für $x = x_0$ annimmt. Da nun nach S. 172

$$[\delta y]_{x=x_0} = dy_0 - y_0'dx_0, \qquad [\delta z]_{x=x_0} = dz_0 - \omega_0 dx_0$$

ist, und da dem γ ein beliebiger Anfangswert beigelegt werden kann, so ergibt sich, daß die Schnittbedingung unter der gemachten Voraussetzung durch die Pfaffsche Gleichung

$$dz_0 - \omega_0 dx_0 - [\omega_{y'}]_{x=x_0}(dy_0 - y_0'dx_0) = 0 \tag{99}$$

dargestellt wird.

Jetzt ist noch festzustellen, wann die Bedingung (98) wirklich erfüllt ist.

Nehmen wir zunächst an, daß ω nicht linear in y', daß also die Mongesche Gleichung (85) keine Pfaffsche Gleichung ist. Dann ist $\omega_{y'y'}$ nicht identisch null, und die Gleichung (98) bestimmt also die Funktion χ vollständig. Demnach besitzt jede nicht lineare Mongesche Gleichung (85) stets eine, aber auch nur eine Schar von ∞^3 Integralkurven, deren Schnittbedingung eine Pfaffsche Gleichung ist. Diese Kurvenschar wird durch das simultane System (89) definirt, wo χ aus (98) zu berechnen ist. Ihre Schnittbedingung (87) erscheint, wenn man die Anfangs-

werte x_0, y_0, z_0, y_0' als Integrationskonstanten einführt, in der Form (99).

Es ist klar, daß die so gewonnene Kurvenschar nichts anderes ist als die Schar der MONGEschen Charakteristiken der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die zu der MONGEschen Gleichung (85) gehört. Auch die Schnittbedingung ist in der von uns gefundenen Form (99) sehr leicht zu deuten. Jedes Wertsystem x, y, z, y' bestimmt ja ein Linienelement $x, y, z, y', z' = \omega$, das der MONGEschen Gleichung (85) genügt, und durch jedes solche Linienelement geht eine bestimmte charakteristische Kurve. Die beiden durch die unendlich benachbarten Linienelemente x_0, y_0, z_0, y_0' und $x_0 + dx_0, \cdots, y_0' + dy_0'$ gehenden charakteristischen Kurven schneiden einander, wie (99) zeigt, dann und nur dann, wenn der Punkt $x_0 + dx_0$, $y_0 + dy_0$, $z_0 + dz_0$ auf der durch das Linienelement x_0, y_0, z_0, y_0' gehenden Ebene liegt, die den dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordneten MONGEschen Kegel von Linienelementen berührt.

Nehmen wir jetzt zweitens an, daß ω in y' linear, daß also die MONGEsche Gleichung (85) eine PFAFFsche ist und etwa die Form

$$dz = \lambda(x, y, z)dx + \mu(x, y, z)dy \tag{85'}$$

besitzt. In diesem Falle wird (98) von χ ganz frei und stellt daher eine Bedingung für ω allein dar, die folgende Form erhält:

$$\mu_x + \lambda\mu_z = \lambda_y + \mu\lambda_z \tag{98'}$$

und also aussagt, daß die PFAFFsche Gleichung (85') integrabel sein muß. Die Schnittbedingung (99) wird dann augenscheinlich ihrer Form nach mit der PFAFFschen Gleichung (85') identisch.

Wir sehen hieraus, daß eine nicht integrable PFAFFsche Gleichung des Raumes x, y, z niemals eine Schar von ∞^3 Integralkurven besitzt, deren Schnittbedingung ebenfalls eine PFAFFsche Gleichung ist. Dagegen gehört zu jeder den ganzen Raum erfüllenden Schar von ∞^3 Integralkurven einer integrabeln PFAFFschen Gleichung stets wieder eine integrable PFAFFsche Gleichung als Schnittbedingung.

Hiermit ist der ganze Inhalt des LIEschen Satzes direkt bewiesen.

Da jede nicht lineare MONGEsche Gleichung eine und nur eine Schar von ∞^3 Integralkurven besitzt, deren Schnittbedingung

eine Pfaffsche Gleichung ist, so sieht man sofort, daß für $m > 0$ eine Schar von ∞^{3+m} Integralkurven einer solchen Gleichung niemals eine Pfaff. sche Gleichung als Schnittbedingung liefern kann: sie enthielte ja sonst unbegrenzt viele Scharen von je ∞^3 Kurven, zu deren jeder eine Pfaffsche Gleichung als Schnittbedingung gehörte. Zu demselben Ergebnisse führt aber auch unsre Methode mit der größten Leichtigkeit.

In der Tat, jede Schar von ∞^{3+m} Integralkurven der Mongeschen Gleichung (85) kann durch ein simultanes System von der Form:

$$(100)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \omega\left(x, y, z, y'\right), \dfrac{dy}{dx} = y', \ldots, \dfrac{dy^{(m)}}{dx} = y^{(m+1)} \\ \dfrac{dy^{(m+1)}}{dx} = \chi\left(x, y, z, y' \ldots y^{(m+1)}\right) \end{cases}$$

definirt werden. Soll ihre Schnittbedingung eine Pfaffsche Gleichung sein, so müssen sich β und γ derart als Funktionen von x bestimmen lassen, daß der Ausdruck (93) von x frei wird, was wieder auf die Gleichungen (95) und (96) führt. Weil aber $m > 0$ sein soll, so ergibt sich hieraus nicht die Bedingung (98), sondern die folgende:

$$(101)\quad \omega_{xy'} + y'\omega_{yy'} + \omega\omega_{zy'} + y''\omega_{y'y'} - \omega_y - \omega_z\omega_{y'} = 0,$$

die in x, y, z, y', y'' identisch erfüllt sein muß, und das tritt augenscheinlich dann und nur dann ein, wenn (85) eine integrable Pfaffsche Gleichung ist.

Auch bei den Kurvenscharen des Raumes, die keine Mongesche Gleichung befriedigen, kann niemals eine Pfaffsche Gleichung als Schnittbedingung auftreten. Jede solche Schar enthält nämlich mindestens ∞^4 Kurven und wird durch ein simultanes System definirt, dessen zwei erste Gleichungen die Form:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dz}{dx} = z'$$

haben. Soll nun der Ausdruck (93) von x frei werden, so muß die Gleichung:

$$\frac{d\beta}{dx}\delta y + \frac{d\gamma}{dz}\delta z + \beta\delta y' + \gamma\delta z' = 0$$

bestehen, was nur möglich ist, wenn β und γ beide verschwinden.

§ 8.

Kurvenscharen, bei denen durch jede Kurve der Schar eine Fläche geht, die ∞^2 Kurven der Schar enthält.

Hat man im R_{n+1} $(n>1)$ eine beliebige Schar von ∞^{n+m} Kurven, so erzeugen je ∞^1 Kurven der Schar eine Fläche (eine zweifach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit) des R_{n+1}, aber diese Fläche wird im allgemeinen keine andern Kurven der Schar enthalten. Die Kurvenschar wird daher ganz besondere Bedingungen erfüllen müssen, wenn es Flächen geben soll, auf denen ∞^2 oder gar ∞^3 und noch mehr Kurven der Schar liegen. Es ist aber offenbar von größter Wichtigkeit, die Bedingungen angeben zu können, unter denen dieser Fall eintritt. Von Wert ist das namentlich dann, wenn die Kurvenschar durch Differentialgleichungen definirt ist, weil das Auftreten solcher Flächen immer eine Zerlegung des Integrationsproblems nach sich ziehen wird.

Wir wollen jetzt zeigen, daß unsre allgemeine Methode auch die Beantwortung derartiger Fragen ermöglicht, und denken uns daher in dem $R_{n+1}: x, x_1 \dots x_n$ $(n>1)$ eine Schar von ∞^{n+m} Kurven $(m>0)$ durch ein simultanes System:

$$(102)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx} = \xi_i(x, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) & (i=1 \dots n) \\ \dfrac{dy_\mu}{dx} = \eta_\mu(x, x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) & (\mu=1 \dots m) \end{cases}$$

definirt, dessen allgemeine Lösung sei:

$$(103)\qquad \begin{cases} x_i = X_i(x, c_1 \dots c_{n+m}) & (i=1 \dots n) \\ y_\mu = Y_\mu(x, c_1 \dots c_{n+m}) & (\mu=1 \dots m). \end{cases}$$

Wir wollen untersuchen, wie man die Bedingungen dafür finden kann, daß jede Kurve unsrer Schar mindestens einer Fläche angehört, auf der gerade ∞^2 Kurven der Schar liegen. Um die Existenz von Flächen auszuschließen, die ∞^3 Kurven der Schar enthalten, und um überhaupt die Aufgabe etwas zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß wenigstens im allgemeinen keine Kurve der Schar von einer unendlich benachbarten Kurve der Schar berührt wird, was nach S. 204 darauf hinauskommt, daß $m \leqq n$ ist und daß in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_m} \end{vmatrix} \tag{104}$$

nicht alle m-reihigen Determinanten verschwinden.

Setzen wir wie früher:

$$\delta x_i = \sum_1^{n+m} \frac{\partial x_i}{\partial c_\nu} dc_\nu, \quad \delta y_\mu = \sum_1^{n+m} \frac{\partial y_\mu}{\partial c_\nu} dc_\nu \tag{105}$$

und deuten wir wie auf S. 195 die dc_ν als homogene Koordinaten in einem $\mathfrak{R}_{n+m-1}$, so sagt die zuletzt genannte Voraussetzung aus, daß die ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}: \delta x_1 = 0, \dots, \delta x_n = 0$ kein Umhüllungsgebilde besitzen, daß also je zwei unendlich benachbarte dieser $\mathfrak{E}_{m-1}$ zu einander windschief sind.

Gehört nun jede Kurve c_ν unsrer Schar einer Fläche F an, auf der ∞^2 Kurven der Schar liegen, so zerfällt die Schar in ∞^{n+m-2} Scharen von je ∞^2, die durch $n+m-2$ Gleichungen:

$$\chi_\tau(c_1 \dots c_{n+m}) = C_\tau \qquad (\tau = 1 \dots n+m-2) \tag{106}$$

mit den willkürlichen Konstanten C_τ dargestellt werden. Daß jede solche Teilschar von ∞^2 Kurven c_ν eine Fläche F des R_{n+1} erfüllt, kommt dadurch zum Ausdruck, daß aus den Gleichungen: $x_i = X_i\,(i = 1 \dots n)$ und (106) gerade $n-1$ unabhängige Relationen zwischen $x, x_1 \dots x_n$ und den C_τ folgen. Ist aber c_ν eine beliebige unsrer ∞^{n+m} Kurven und F die hindurchgehende Fläche, so wird die Kurve c_ν von jeder der ∞^1 unendlich benachbarten auf F liegenden Kurven geschnitten und zwar in jedem ihrer Punkte von einer dieser ∞^1 Kurven. Erinnern wir uns daher, daß jede der ∞^1 früher erwähnten $\mathfrak{E}_{m-1}$ das Bild ist aller unendlich benachbarten Kurven $c_\nu + dc_\nu$, von denen die Kurve c_ν in einem bestimmten ihrer ∞^1 Punkte geschnitten wird, bedenken wir überdies, daß die ∞^1 auf F liegenden Kurven $c_\nu + dc_\nu$, von deren jeder die Kurve c_ν geschnitten wird, durch Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{n+m} \frac{\partial \chi_\tau}{\partial c_\nu} dc_\nu = 0 \qquad (\tau = 1 \dots n+m-2) \tag{107}$$

definirt sind, so erkennen wir sofort, daß diese ∞^1 Kurven in dem $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ durch die Punkte einer Geraden abgebildet werden

und daß diese Gerade mit jeder der ∞^1 $\mathfrak{F}_{m-1}$ einen Punkt gemein hat.

Soll daher durch jede Kurve c_ν eine Fläche F von der verlangten Beschaffenheit hindurchgehen, so ist jedenfalls notwendig, daß es bei beliebiger Wahl der c_ν stets eine Gerade des $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ gibt, die jede der ∞^1 $\mathfrak{F}_{m-1}$ schneidet.

Gibt es für allgemeine Werte der c_ν überhaupt keine Gerade des $\mathfrak{R}_{n+m-1}$, die alle ∞^1 $\mathfrak{F}_{m-1}$ trifft, so geht durch eine Kurve c_ν von allgemeiner Lage sicher keine Fläche, auf der ∞^2 Kurven unsrer Schar liegen. Gibt es andrerseits bei beliebigen c_ν stets eine und nur eine solche Gerade, so wird die augenscheinlich durch ein System von $n+m-2$ linear unabhängigen PFAFFschen Gleichungen:

$$\sum_1^{n+m} \nu \gamma_{k\nu}(c_1 \dots c_{n+m}) dc_\nu = 0 \qquad (k=1 \dots n+m-2) \tag{108}$$

dargestellt, und soll dann durch jede Kurve c_ν eine Fläche F von der verlangten Beschaffenheit gehen, so ist offenbar notwendig und hinreichend, daß dieses PFAFFsche System unbeschränkt integrabel ist. Gibt es eine diskrete Anzahl von Geraden, die alle ∞^1 $\mathfrak{F}_{m-1}$ treffen, so entspricht jeder ein PFAFFsches System (108), und wenn unter diesen PFAFFschen Systemen unbeschränkt integrable vorhanden sind, so heißt das, daß durch jede Kurve c_ν mehrere Flächen gehen, deren jede ∞^2 Kurven unsrer Schar enthält. Giebt es schließlich unendlich viele gerade Linien, von denen alle ∞^1 $\mathfrak{F}_{m-1}$ getroffen werden, so entspricht denen ein PFAFFsches System (108), dessen Koeffizienten $\gamma_{k\nu}$ außer den c_ν noch gewisse Parameter $\beta_1, \beta_2, \dots$ enthalten. Die Beantwortung unsrer Frage kommt dann darauf hinaus, festzustellen, ob sich $\beta_1, \beta_2, \dots$ derart als Funktionen von $c_1 \dots c_{n+m}$ bestimmen lassen, daß das System (108) unbeschränkt integrabel wird.

Demnach zerfällt unser Problem in zwei ganz getrennte Aufgaben: Erstens sind alle geraden Linien zu bestimmen, von denen die ∞^1 $\mathfrak{F}_{m-1}$ des $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ geschnitten werden, das heißt, es sind die PFAFFschen Systeme (108) zu ermitteln, durch die diese geraden Linien dargestellt werden. Zweitens sind unter den so gefundenen PFAFFschen Systemen alle die aufzusuchen, die unbeschränkt integrabel sind. Hier brauchen wir uns offenbar nur mit dem ersten dieser beiden Probleme zu beschäftigen.

Als Koordinaten der $(m-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten des $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ dienen die m-reihigen Determinanten $p_{i_1 \dots i_m}$ der Matrix:

$$\begin{vmatrix} d_1 c_1 \dots d_1 c_{n+m} \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ d_m c_1 \dots d_m c_{n+m} \end{vmatrix} \tag{109}$$

Insbesondere haben wir es mit einer unsrer $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ zu tun, wenn die $d_\mu c_\nu$ den Gleichungen:

$$\delta_\mu x_i = \sum_1^{n+m} \frac{\partial x_i}{\partial c_\nu} d_\mu c_\nu = 0 \qquad (\mu = 1 \dots m;\ i = 1 \dots n) \tag{110}$$

genügen. Soll $q_{ij} = \delta c_i \delta' c_j - \delta c_j \delta' c_i$ eine Gerade sein, die alle ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ trifft, so müssen gewisse lineare Gleichungen:

$$\sum \pm q_{i_1 i_2} p_{i_3 \dots i_{m+2}} = 0 \tag{111}$$

erfüllt sein, und zwar muß das bei beliebigem x gelten, vorausgesetzt, daß die $d_\mu c_\nu$ den Gleichungen (110) genügen. Demnach müssen die Koordinaten $p_{i_1 \dots i_m}$ der $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ gewissen linearen homogenen Relationen genügen, deren Koeffizienten von x frei sind. Nehmen wir nun an, wir kennen alle linearen homogenen Relationen mit von x freien Koeffizienten, denen die Koordinaten unsrer $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ genügen, so können wir auch alle Geraden finden, von denen alle $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ getroffen werden. Wir denken uns zu diesem Zwecke die betreffenden Relationen zwischen den $p_{i_1 \dots i_m}$ nach so vielen dieser Größen aufgelöst als es von einander unabhängige lineare homogene Relationen gibt, drücken dann in (111) die $p_{i_1 \dots i_m}$, nach denen wir aufgelöst haben, durch die übrigen aus und setzen endlich in (111) die Koeffizienten der übrig gebliebenen $p_{i_1 \dots i_m}$ alle gleich Null. Auf diese Weise erhalten wir gewisse lineare homogene Relationen zwischen den q_{ij}, und wenn wir alle Wertsysteme q_{ij} bestimmen, die diesen linearen homogenen Relationen und außerdem noch den Gleichungen zweiten Grades:

$$q_{ik} q_{jl} + q_{kj} q_{il} + q_{ji} q_{kl} = 0 \qquad (i, k, j, l = 1 \dots n)$$

genügen, so finden wir alle geraden Linien, von denen unsre ∞^1 $\mathfrak{E}_{m-1}$ getroffen werden.

Jetzt bleibt noch zu zeigen, daß die linearen homogenen Relationen mit von x freien Koeffizienten, die zwischen den

Koordinaten der $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ bestehen, wirklich gefunden werden können. Unsere allgemeine Methode leistet das in der Tat, wie schon auf S. 198 erwähnt worden ist.

Die m-reihigen Determinanten der Matrix (109) lassen sich durch die m-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \delta_1 x_1 \dots \delta_1 x_n & \delta_1 y_1 \dots \delta_1 y_m \\ \dots & \dots \\ \delta_m x_1 \dots \delta_m x_n & \delta_m y_1 \dots \delta_m y_m \end{vmatrix} \tag{112}$$

ausdrücken und zwar linear und homogen mit Koeffizienten, die Funktionen von x, $c_1 \dots c_{n+m}$ sind. Denken wir uns nun irgend eine lineare homogene Gleichung zwischen den Koordinaten $p_{i_1 \dots i_m}$ unsrer $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ und zwar eine, deren Koeffizienten von x frei sind, so muß diese Gleichung eine Folge von (110) sein, ihre linke Seite wird daher eine lineare homogene Funktion der m-reihigen Determinanten von (112), die vermöge (110) verschwinden. Hieraus ergibt sich folgende Methode zur Bestimmung der gesuchten linearen homogenen Relationen:

Man bildet aus den m-reihigen Determinanten von (112) unter Weglassung der Determinante $\sum \pm \delta_1 y_1 \dots \delta_m y_m$ einen linearen homogenen Ausdruck und versucht dessen Koeffizienten in allgemeinster Weise derart als Fnnktionen von x zu bestimmen, daß der Ausdruck von x frei wird. Wegen:

$$\frac{d}{dx}\delta_\mu x_i = \delta_\mu \xi_i, \qquad \frac{d}{dx}\delta_\mu y_k = \delta_\mu \eta_k$$

liefert das für die Koeffizienten eine Reihe von linearen homogenen Differentialgleichungen und eine Reihe von endlichen Gleichungen, und man kann immer durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob diese Gleichungen sämtlich erfüllbar sind, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden. Führt man endlich an Stelle der c_ν die Anfangswerte x_i^0, y_k^0 ein, die x_i, y_k für $x = x_0$ annehmen, so ergibt der vorhin besprochene lineare homogene Ausdruck in den m-reihigen Determinanten von (112), wenn man in ihm die Substitution $x = x_0$ macht und ihn dann gleich Null setzt, die allgemeinste lineare homogene Relation mit von x freien Koeffizienten, die zwischen den Koordinaten der $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ besteht.

Damit ist gezeigt, daß man stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden kann, ob jede Kurve der durch

das simultane System (102) definirten Kurvenschar auf einer Fläche liegt, die ∞^2 Kurven der Schar enthält. Tritt dieser Fall ein, stellt sich also heraus, daß eine der Geraden, die alle $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ trifft, ein unbeschränkt integrables System (108) liefert, so kann man auch die betreffenden Flächen selbst durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen finden. Man kann ja das System (108) in den Anfangswerten x_0, x_i^0, y_μ^0 wirklich hinschreiben. Nimmt man dabei x_0 als überzählige Konstante mit und läßt man dann den Index Null weg, so hat man ein unbeschränkt integrables Pfaffsches System, aus dessen Integralgleichungen man nur die y_μ zu eliminiren hat, um die Gleichungen der betreffenden Flächen zu erhalten.

Man kann ferner verlangen, daß jede Kurve der Schar einem R_3 angehört, der ∞^3 (oder ∞^4) verschiedene Kurven der Schar enthält. Dann kommt es darauf an, ob es in dem $\mathfrak{R}_{n+m-1}$ eine ebene zweifach oder dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit gibt, die mit jeder der $\infty^1 \mathfrak{E}_{m-1}$ einen Punkt (oder eine Gerade) gemein hat, und ob das entsprechende System von $n+m-3$ ($n+m-4$) Pfaffschen Gleichungen unbeschränkt integrabel ist. Doch wird wohl das Gesagte schon ausreichen, um auch die Zugänglichkeit dieser und ähnlicher Fragen erkennen zu lassen.

§ 8.

Die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$p = F(x, x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) \tag{113}$$

des $R_{n+2}: x, x_1 \ldots x_n, z$ bestimmt nach der von Lie herrührenden Auffassung ∞^{2n+2} unter den ∞^{2n+3} Elementen z, x, p dieses Raumes, und ihre Integration kommt darauf hinaus, alle Vereine von je ∞^{n+1} Elementen zu ermitteln, die unter den ∞^{2n+2} Elementen der Gleichung enthalten sind. Es ist ferner bekannt, daß sich die Elemente von (113) auf eine und nur eine Art in ∞^{2n+1} charakteristische Streifen — Vereine von je ∞^1 Elementen — derart anordnen lassen, daß jedes allgemein gelegene Element der Gleichung einem solchen Streifen angehört und daß jeder nicht singuläre Integralverein von je ∞^n charakteristischen Streifen erzeugt ist.

LIE hat nun schon in seinen älteren Arbeiten über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung darauf hingewiesen[1]), daß es unter den Integralvereinen von (113) solche geben kann, die als Punktmannigfaltigkeiten nicht $(n+1)$-fach ausgedehnt sind, sondern eine geringere Dimensionenzahl besitzen, ja daß unter Umständen sogar die ∞^{n+1} Integralvereine einer vollständigen Lösung von (113) sämtlich diese Eigenschaft haben können. Für $n = 2$ und 3 hat sich später BÄCKLUND mit solchen Differentialgleichungen beschäftigt[2]), und LIE selbst ist gegen das Ende seines Lebens auf diese Möglichkeiten zurückgekommen und hat zum Beispiel die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung untersucht, unter deren Integralvereinen es unbegrenzt viele solche gibt, die als Punktmannigfaltigkeiten zweifach ausgedehnt sind.[3]) Aber LIE hat nirgends, auch in dieser letzten von ihm selbst veröffentlichten Arbeit nicht, die Kriterien aufgestellt, auf Grund deren man es einer vorgelegten Differentialgleichung (113) ansehen kann, ob sie eine vollständige Lösung besitzt, die aus lauter Punktmannigfaltigkeiten von weniger als $n+1$ Dimensionen besteht. Andrerseits hat BÄCKLUND nur die Fälle der Räume von 4 und 5 Dimensionen behandelt und ist überdies auf die explizite Aufstellung der betreffenden Kriterien auch nicht eingegangen. Es verlohnt sich daher wohl, zu zeigen, daß unsre allgemeine Methode geeignet ist, auch zu diesen Kriterien einen Weg zu bahnen, während allerdings die wirkliche Bestimmung aller etwa vorhandenen Integralvereine, die als Punktmannigfaltigkeiten weniger als $n+1$ Dimensionen haben, auf die schwierige, noch nicht genügend entwickelte Theorie der Systeme von PFAFFschen Gleichungen führt. Ich berühre hier diese Frage um so lieber, als ich hoffe, durch die folgenden Betrachtungen auch zur Erleichterung des Verständnisses einiger Abschnitte jener mehrfach erwähnten Abhandlung von LIE beizutragen.

Der Ort aller Punkte der Elemente eines charakteristischen Streifens oder, mit LIE zu reden, der Punktort des Streifens ist eine charakteristische Kurve der Gleichung (113). Da jeder

1) „Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Klassifikation derselben", Gött. Nachr. 1872, S. 473—489.

2) „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichnng erster Ordnung", Math. Ann. Bd. 17, S. 285 ff.

3) In der auf Seite 163 erwähnten Arbeit, diese Berichte 1898.

nichtsinguläre Integralverein von ∞^n verschiedenen charakteristischen Streifen erzeugt ist, so ist er als Punktmannigfaltigkeit betrachtet offenbar von den zu diesen Streifen gehörigen charakteristischen Kurven erzeugt. Gehören zu den ∞^n charakteristischen Streifen des Integralvereins auch ∞^n verschiedene charakteristische Kurven, so wird die Dimensionenzahl der durch den Integralverein bestimmten Punktmannigfaltigkeit dann und nur dann kleiner als $n+1$, etwa gleich $m+1$ ausfallen, wenn durch jeden Punkt dieser Punktmannigfaltigkeit ∞^{n-m} charakteristische Kurven gehen, die ganz auf der Mannigfaltigkeit liegen. Gehören dagegen zu den ∞^n charakteristischen Streifen des Integralvereins etwa bloß ∞^{n-l} verschiedene charakteristische Kurven $(l>0)$, so wird seine Dimensionenzahl als Punktmannigfaltigkeit sicher kleiner als $n+1$ sein und zwar höchstens gleich $n-l+1$.

Wir wollen isolirte Integralvereine, die als Punktmannigfaltigkeiten nicht $(n+1)$-fach ausgedehnt sind, ganz bei Seite lassen nnd nur solche Differentialgleichungen (113) betrachten, die mindestens eine vollständige Lösung besitzen, deren ∞^{n+1} Integralvereine sämtlich diese Eigenschaft haben. Da in den ∞^{n+1} Integralvereinen einer vollständigen Lösung alle ∞^{2n+} charakteristischen Streifen von (113) enthalten sind, so liegen auf den durch diese Integralvereine bestimmten ∞^{n+1} Punktmannigfaltigkeiten alle charakteristischen Kurven von (113), und es ergibt sich aus dem vorhin Gesagten sofort, daß eine vollständige Lösung von der verlangten Art jedenfalls nur dann vorkommen kann, wenn einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

Erstens: Den ∞^{2n+1} charakteristischen Streifen entsprechen bloß ∞^{2n-l+1} $(l>0)$ verschiedene charakteristische Kurven.

Zweitens: Es gibt zwar ∞^{2n+1} verschiedene charakteristische Kurven, aber unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n-1$ gibt es mindestens eine solche, etwa m, daß durch jede charakteristische Kurve mindestene eine $(m+1)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit geht, auf der ∞^n verschiedene charakteristische Kurven liegen.

Im ersten Falle ist zwar von vornherein sicher, daß es vollständige Lösungen von der verlangten Art gibt. Durch jeden Punkt des R_{n+2} gehen dann nämlich bloß ∞^{n-l} verschiedene charakteristische Kurven, die eine Punktmannigfaltigkeit von $n-l+1$ Dimensionen erzeugen, und diese Punktmannigfaltigkeit ist, um Paul Du Bois Reymonds Benennung anzuwenden, ein

Integralkonoid von (113), denn als Elementverein aufgefaßt stellt sie einen Integralverein von (113) dar. Konstruirt man alle Integralkonoide, die durch die Punkte einer $(n+1)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit des R_{n+2} gehen, so erhält man im allgemeinen eine vollständige Lösung, deren ∞^{n+1} Integralvereine $(n-l+1)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten sind. Dagegen bedarf es noch einer besonderen Untersuchung, um festzustellen, ob es noch andre vollständige Lösungen dieser Art gibt und ob es etwa solche gibt, deren Integralvereine als Punktmannigfaltigkeiten eine noch geringere Dimensionenzahl besitzen.

Tritt dagegen der zweite Fall ein, so weiß man zunächst bloß, daß sich die ∞^{2n+1} charakteristischen Kurven bei geeigneter Wahl von m $(0 < m < n)$ auf ∞^{n+1} $(m+1)$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten derart verteilen, daß jede dieser Punktmannigfaltigkeiten ∞^n verschiedene charakteristische Kurven enthält. Demnach muß erst noch besonders festgestellt werden, ob es eine solche Verteilung dieser Art gibt, bei der die betreffenden $(m+1)$-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten als Elementvereine aufgefaßt eine vollständige Lösung von (113) bilden.

In der mehrfach erwähnten Abhandlung von 1898 hat sich LIE mit dem ersten Falle beschäftigt und die besondern Werte $l = n-1$ und $l = n-2$ eingehend untersucht. Jedoch geht er gar nicht anf die Bedingungen ein, unter denen die von ihm gemachten Voraussetzungen über die Zahl der charakteristischen Kurven wirklich erfüllt sind. Den zweiten Fall hat LIE meines Wissens in keiner der von ihm veröffentlichten Arbeiten näher besprochen.

Wir wollen jetzt in aller Kürze zeigen, wie man zu den Kriterien für das Eintreten des ersten jener beiden Fälle gelangen kann. Vollständig entwickeln werden wir jedoch nur die Kriterien dafür, daß die Zahl der von einander verschiedenen charakteristischen Kurven möglichst klein wird. Auf den zweiten Fall wollen wir nicht näher eingehen, da der nach der in § 7 entwickelten Methode behandelt werden kann, nur daß die besondere Natur der Aufgabe gewisse Vereinfachungen mit sich bringt.

Die Differentialgleichungen der charakteristischen Streifen von (113) könnten wir ja als bekannt voraussetzen; wir wollen

sie aber zunächst ableiten, da sich das auf Grund unsrer allgemeinen Methode sehr bequem machen läßt und zugleich die Darstellung des Folgenden erleichtert.

Nach Lie sind die charakteristischen Streifen von (113) dadurch definirt, daß sie Vereine von je ∞^1 Elementen sind, daß jedes Element von (113) einem und nur einem solchen Streifen angehört und daß endlich zwei unendlich benachbarte charakteristische Streifen, bei denen auch nur ein einziges Element des einen mit einem unendlich benachbarten Element des andern vereinigt liegt, ihrer ganzen Ausdehnung nach in der Beziehung stehen, daß jedes Element des einen mit den unendlich benachbarten Elementen des andern vereinigt liegt.

Da durch jedes Element von (113) ein charakteristischer Streifen gehen soll und da wir die Größen $z, x, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ als Koordinaten für die Elemente der Gleichung (113) benutzen können, so lassen sich die charakteristischen Streifen von (113) jedenfalls durch ein gewisses simultanes System von der Form:

$$\frac{dz}{dx} = \zeta, \quad \frac{dx_i}{dx} = \xi_i, \quad \frac{dp_i}{dx} = \pi_i \qquad (i = 1 \dots n) \tag{114}$$

definiren, wo ζ, ξ_i und π_i gewisse Funktionen von $z, x, x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ sind. Denken wir uns dieses simultane System unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen: $z = z_0$, $x_i = x_i^0$, $p_i = p_i^0$ für $x = x_0$ integrirt:

$$\begin{cases} z = Z(x, x_0, x_1^0 \dots x_n^0, z_0, p_1^0 \dots p_n^0) \\ x_i = X_i(x, x_0, x_1^0 \dots x_n^0, z_0, p_1^0 \dots p_n^0) \\ p_i = P_i(x, x_0, x_1^0 \dots x_n^0, z_0, p_1^0 \dots p_n^0), \\ \qquad (i = 1 \dots n), \end{cases} \tag{115}$$

so wird der durch das Element: $x_0, x_i^0, z_0, p_i^0, p_0 = F(z_0, x_0, x_r^0, p_r^0) = F_0$ gehende charakteristische Streifen durch die vereinigten Gleichungen (113) und (115) dargestellt.

Zweitens sollen die charakteristischen Streifen Vereine sein, je zwei unendlich benachbarte Elemente eines Streifens müssen also die Bedingung

$$dz - p\,dx - \sum_1^n p_i\,dx_i = 0 \tag{116}$$

der vereinigten Lage erfüllen, folglich müssen die unbekannten Funktionen ζ, ξ_i, π_i der Gleichung:

$$(117) \qquad \zeta - \sum_1^n p_i \xi_i = F$$

genügen.

Um endlich die letzte Eigenschaft der charakteristischen Streifen analytisch auszudrücken, denken wir uns zwei beliebige unendlich benachbarte und vereinigt liegende Elemente von (113) gegeben, also zwei Wertsysteme z_0, x_0, x_i^0, p_i^0 und $z_0 + dz_0, x_0 + dx_0, x_i^0 + dx_i^0, p_i^0 + dp_i^0$, die nur der Bedingung:

$$(118) \qquad dz_0 - F_0 dx_0 - \sum_1^n p_i^0 dx_i^0 = 0$$

unterworfen sind. Legen wir durch diese beiden Elemente die hindurchgehenden charakteristischen Streifen, die durch (115) bestimmt sind, und setzen wir wie sonst:

$$(119) \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0 + \sum_1^n \left(\frac{\partial z}{\partial x_\nu^0} dx_\nu^0 + \frac{\partial z}{\partial p_\nu^0} dp_\nu^0 \right),$$

während δx_i, δp_i analog definirt sind, so hat jedes dem Elemente x, z, x_i, p_i des ersten Streifens unendlich benachbarte Element des zweiten Streifens die Koordinaten:

$$x + dx, \; z + \zeta dx + \delta z, \; x_i + \xi_i dx + \delta x_i, \; p_i + \pi_i dx + \delta p_i.$$

Diese beiden Elemente müssen nun stets vereinigt liegen, also muß die Gleichung:

$$\zeta dx + \delta z - F dx - \sum_1^n p_i (\xi_i dx + \delta x_i) = 0,$$

oder wegen (117) die Gleichung:

$$(120) \qquad \delta z - \sum_1^n p_i \delta x_i = 0$$

für jedes x erfüllt sein, sobald die Gleichung (118) besteht.

Da (120) in den Differentialen $dx_0, dz_0, dx_i^0, dp_i^0$ linear und homogen ist, kann dieser Fall nur eintreten, wenn es eine solche nicht identisch verschwindende Funktion ϱ von x und den x_0, z_0, x_i^0, p_i^0 gibt, daß eine Identität von der Form:

$$(121) \qquad \varrho (\delta z - \sum_1^n p_i \delta x_i) = dz_0 - F_0 dx_0 - \sum_1^n p_i^0 dx_i^0$$

besteht. Diese Funktion ϱ muß sich überdies für $x = x_0$ auf 1 reduziren, denn nach S. 172 wird für $x = x_0$:

$$(\delta z)_{x=x_0} = dz_0 - \zeta_0 dx_0, \quad (\delta x_i)_{x=x_0} = dx_i^0 - \xi_i^0 dx_0$$

und die linke Seite von (120) verwandelt sich also für $x = x_0$ in:

$$dz_0 - \zeta_0 dx_0 - \sum_1^n p_i^0 (dx_i^0 - \xi_i^0 dx_0),$$

was wegen (117) mit der rechten Seite von (121) identisch wird.

Wir brauchen demnach jetzt nur noch ϱ so zu bestimmen, daß die linke Seite von (121) x gar nicht enthält. Erinnern wir uns aber, daß nach S. 179:

$$\frac{d}{dx}\delta z = \delta\xi, \quad \frac{d}{dx}\delta x_i = \delta\xi_i$$

ist, und benutzen wir (117) so ergibt die Forderung:

$$\frac{d}{dx}\{\varrho(\delta z - \sum_1^n p_i \delta x_i)\} = 0$$

folgende Gleichung:

$$\frac{d\varrho}{dx}(\delta z - \sum_1^n p_i \delta x_i) - \varrho \sum_1^n (\pi_i \delta x_i - \xi_i \delta p_i) + \varrho \delta F = 0,$$

die sofort in die nachstehenden zerfällt:

$$\frac{d\varrho}{dx} + \varrho F_z = 0, \quad \varrho\pi_i = -p_i \frac{d\varrho}{dz} + \varrho F_{x_i}$$
$$\varrho\xi_i = -\varrho F_{p_i}.$$

Da ϱ nicht identisch verschwindet, gelangen wir zu den bekannten Differentialgleichungen:

$$(114') \quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx} = -F_{p_i}, \quad \dfrac{dp_i}{dx} = F_{x_i} + p_i F_z & (i = 1 \ldots n) \\ \dfrac{dz}{dx} = F - \sum_1^n p_\nu F_{p_\nu} \end{cases}$$

der charakteristischen Streifen. Von jetzt ab können wir also voraussetzen, daß die Gleichungen (115) die Lösungen des simultanen Systems (114') darstellen.

Die charakteristischen Kurven von (113) bilden nun eine Kurvenschar des $R_{n+2}: z, x, x_1 \ldots x_n$, die in der in § 3 aus-

einandergesetzten Weise durch das simultane System (114') definirt wird und deren endliche Gleichungen die $n+1$ ersten unter den Gleichungen (115) sind. Sehen wir von dem trivialen Falle einer linearen Differentialgleichung (113) ab, so sind in den Gleichungen:

$$(122) \qquad \frac{dz}{dx} = F - \sum_1^n p_\nu F_{p_\nu}, \quad \frac{dx_i}{dx} = -F_{p_i} \qquad (i=1\ldots n)$$

die rechten Seiten nicht alle von $p_1 \ldots p_n$ frei, folglich besteht die Schar der charakteristischen Kurven aus mindestens ∞^{n+2} verschiedenen Kurven und besitzt im Sinne von S. 160 ein System von gerade n unabhängigen Schnittbedingungen, das aus den Gleichungen:

$$(123) \qquad \delta z = 0, \ \delta x_1 = 0, \ \ldots, \ \delta x_n = 0$$

durch Elimination von x hervorgeht. Wie die Identität (121) zeigt, ist überdies unter diesen Schnittbedingungen stets eine PFAFFsche Gleichung enthalten, nämlich die Gleichung (118).

Andrerseits genügen die charakteristischen Kurven einer nicht linearen Differentialgleichung (113) immer dem Systeme von MONGEschen Gleichungen, das aus (122) durch Elimination von $p_1 \ldots p_n$ hervorgeht. Nehmen wir an, daß in der Determinante:

$$(124) \qquad \sum \pm F_{p_1 p_1} \ldots F_{p_n p_n}$$

alle $(m+1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, nicht aber alle m-reihigen $(0 < m \leqq n)$, so enthält dieses MONGEsche System gerade $n - m + 1$ von einander unabhängige Gleichungen, die wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Form:

$$(125) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \omega\left(x, x_1 \ldots x_n, z, \dfrac{dx_1}{dx} \ldots \dfrac{dx_m}{dx}\right) \\ \dfrac{dx_{m+k}}{dx} = \omega_k\left(x, x_1 \ldots x_n, z, \dfrac{dx_1}{dx} \ldots \dfrac{dx_m}{dx}\right) \\ \qquad\qquad (k = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

gebracht denken können. Es ist überdies bekannt, daß das MONGEsche System (125) auch ohne Benutzung der charakteristischen Streifen oder Kurven direkt aus der Gleichung (113) abgeleitet werden kann, denn es ordnet jedem Punkte z, x, x_i des R_{n+2} gerade den MONGEschen Kegel von ∞^m Richtungen: $dz : dx : dx_i$ zu, der von den $(n+1)$-fach ausgedehnten Ebenen

der Elemente $z,\ x,\ x_i,\ p_i$ umhüllt wird, die dem Punkte $z,\ x,\ x_i$ durch die Differentialgleichung (113) zugeordnet werden. Setzen wir daher:

$$\frac{dz}{dx} = z',\ \frac{dx_i}{dx} = x_i' \qquad (i=1\ldots n)$$

und denken wir uns $x_1' \ldots x_m'$ aus den Gleichungen:

$$(126)\quad \begin{cases} \omega(x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m') - p - \sum_1^m{}_\mu\, p_\mu x_\mu' - \\ \quad - \sum_1^{n+m}{}_k\, p_{m+k}\, \omega_k(x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m') = 0 \\ \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_j'} - p_j - \sum_1^{n-m}{}_k\, p_{m+k} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j'} = 0 \\ \qquad (j=1\ldots m) \end{cases}$$

eliminirt, mit andern Worten: suchen wir den Ort aller Elemente $z,\ x,\ x_i,\ p_i$, deren $(n+1)$-fach ausgedehnte Ebenen im Punkte $z,\ x,\ x_i$ den durch (125) bestimmten Mongeschen Kegel berühren, so erhalten wir nur eine Relation zwischen den z, x, x_i, p_i, nämlich die ursprüngliche Gleichung (113). Hierin liegt, daß die Determinante:

$$(127)\quad \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu' \partial x_j'} - \sum_1^{n-m}{}_k\, p_{m+k} \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial x_\mu' \partial x_j'} \right| \qquad (\mu, j = 1\ldots m)$$

unter den hier gemachten Voraussetzungen nicht identisch verschwinden kann. Umgekehrt ergibt sich natürlich aus:

$$(122')\qquad z' = F - \sum_1^n{}_\nu\, p_\nu F_{p_\nu},\ x_i' = -F_{p_i} \qquad (i=1\ldots n)$$

durch Elimination von $p_1 \ldots p_n$ gerade das Gleichungensystem:

$$(125')\quad \begin{cases} z' = \omega(x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m'),\ x_{m+k}' = \omega_k(x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m') \\ \qquad (k=1\ldots n-m), \end{cases}$$

das nur eine andre Schreibweise von (125) ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß wir, statt die Größen z, x, x_i, p_i zur Bestimmung der Elemente von (113) zu benutzen, auch die Größen: $z, x, x_1 \ldots x_n,\ x_1' \ldots x_m',\ p_{m+1} \ldots p_n$ als Koordinaten dieser Elemente verwenden können, daß sich also die

charakteristischen Streifen von (113) auch durch ein simultanes System von der Form:

$$(128)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \omega(x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m'), \quad \dfrac{dx_\mu}{dx} = x_\mu' \\ \dfrac{dx_{m+k}}{dx} = \omega_k(x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m') \\ \dfrac{dx_\mu'}{dx} = \varphi_\mu, \quad \dfrac{dp_{m+k}}{dx} = \chi_k \\ \qquad (\mu = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n-m) \end{cases}$$

definiren lassen, wo die φ_μ und χ_k gewisse Funktionen von $x, x_1 \ldots x_n, z, x_1' \ldots x_m', p_{m+1} \ldots p_n$ sind. Dasselbe simultane System (128) dient dann zugleich zur Definition der charakteristischen Kurven von (113), und hier tritt es unmittelbar zutage, daß diese charakteristischen Kurven Integralkurven des MONGEschen Systems (125) sind.

Wir behaupten nun, daß sich die charakteristischen Kurven direkt auf Grund des MONGEschen Systems (125) definiren lassen als eine Kurvenschar, die dem MONGEschen Systeme (125), aber keiner von diesem Systeme unabhängigen MONGEschen Gleichung genügt und bei der unter den Schnitthedingungen mindestens eine PFAFFsche Gleichung enthalten ist.

In der Tat, genügt eine Kurvenschar:

$$(129)\quad \begin{cases} z = Z(x, c_1, c_2 \ldots) \\ x_i = \Xi_i(x, c_1, c_2 \ldots) \\ \qquad (i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

dem MONGEschen Systeme (125) sonst aber keiner MONGEschen Gleichung, so besteht sie aus mindestens ∞^{n+m+1} verschiedenen Kurven und läßt sich durch ein simultanes System definiren, in dem jedenfalls folgende Gleichungen vorkommen:

$$(130)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \omega(x, z, x'), \quad \dfrac{dx_\mu}{dx} = x_\mu' \\ \dfrac{dx_{m+k}}{dx} = \omega_k(x, z, x') \\ \qquad (\mu = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n-m). \end{cases}$$

während $x_1' \ldots x_m', z, x, x_1 \ldots x_n$ sicher nicht durch eine endliche Relation verknüpft sind. Setzen wir nun:

$$(131)\quad \delta z = \sum \frac{\partial z}{\partial c_\tau} dc_\tau, \quad \delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial c_\tau} dc_\tau \qquad (i = 1 \ldots n)$$

und verlangen wir, daß unter den zu der Kurvenschar gehörigen Schnittbedingungen mindestens eine Pfaffsche Gleichung enthalten ist, so müssen wir versuchen, $\gamma, \alpha_1 \dots \alpha_n$ derart als Funktionen von x zu bestimmen, daß

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_1^n \alpha_i \delta x_i + \gamma \delta z\right) = 0 \tag{132}$$

wird, eine Forderung, die auf die folgenden Bedingungen führt:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i}{dx} + \sum\limits_1^{n-m}{}_k \alpha_{m+k} \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_i} + \gamma \dfrac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{d\gamma}{dx} + \sum\limits_1^{n-m}{}_k \alpha_{m+k} \dfrac{\partial \omega_k}{\partial z} + \gamma \dfrac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \\ \alpha_\mu + \sum\limits_1^{n-m}{}_k \alpha_{m+k} \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x'_\mu} + \gamma \dfrac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} = 0 \\ (i = 1 \dots n,\ \mu = 1 \dots m). \end{cases} \tag{133}$$

Eliminiren wir hieraus $\alpha_1 \dots \alpha_m$, so kommt:

$$\begin{cases} \sum\limits_1^{n-m}{}_k \alpha_{m+k} \left\{ \dfrac{d}{dx} \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x'_\mu} - \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_\mu} - \sum\limits_1^{n-m}{}_\tau \dfrac{\partial \omega_\tau}{\partial x'_\mu} \dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_{m+\tau}} - \dfrac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} \dfrac{\partial \omega_k}{\partial z} \right\} + \\ + \gamma \left\{ \dfrac{d}{dx} \dfrac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} - \dfrac{\partial \omega}{\partial x_\mu} - \sum\limits_1^{n-m}{}_\tau \dfrac{\partial \omega_\tau}{\partial x'_\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_{m+\tau}} - \dfrac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} \dfrac{\partial \omega}{\partial z} \right\} = 0 \\ (\mu = 1 \dots m). \end{cases} \tag{134}$$

Da aber unter den hier gemachten Voraussetzungen die Determinante (127) nicht identisch verschwindet, so lassen sich die Gleichungen (134) nach den Differentialquotienten

$$\frac{dx'_1}{dx} \dots \frac{dx'_m}{dx}$$

auflösen, folglich bilden die Gleichungen (130), (133) und (124) nach Weglassung der Gleichungen, in denen $\alpha_1 \dots \alpha_m$ vorkommen, ein simultanes System in den Veränderlichen $x, z, x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_n$, $\alpha_{m+1} \dots \alpha_n, \gamma$, das eine gewisse Kurvenschar des R_{n+2} definirt. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß diese Kurvenschar keine andere ist als die der charakteristischen Kurven.

Das aber hat keine Schwierigkeit. Die Größen $z, x, x_1 \dots x_n$, $x_1 \dots x'_m, p_{m+1} \dots p_n$, die als Koordinaten für die Elemente der

Gleichung (113) dienen können, sind mit den ursprünglichen Koordinaten $z,\ x,\ x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n$ dieser Elemente durch die Gleichungen:

$$(135) \qquad p_\mu = \frac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} - \sum_1^{n-m}{}_k\, p_{m+k} \frac{\partial \omega_k}{\partial x'_\mu} \qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

verbunden, deren Auflösungen nach $x'_1 \ldots x'_m$ so lauten:

$$(136) \qquad x'_\mu = -F_{p_\mu} \qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

außerdem ist nach (126):

$$(137) \qquad \begin{cases} F(z,\ x,\ x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n) = \omega - \sum_1^m{}_\mu\, x'_\mu \frac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} - \\ \qquad - \sum_1^{n-m}{}_k\, p_{m+k} \left(\omega_k - \sum_1^m{}_\mu\, x'_\mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x'_\mu} \right). \end{cases}$$

Die Bedingung (116) für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarter Elemente der Gleichung (113) erhält daher in diesen neuen Elementkoordinaten die Form:

$$(138) \quad dz - \sum_1^m{}_\mu \frac{\partial \omega}{\partial x'_\mu}\, dx_\mu - \sum_1^{n-m}{}_k\, p_{m+k} \left(dx_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x'_\mu}\, dx_\mu \right) - F dx = 0.$$

Sucht man jetzt in den neuen Elementkoordinaten die Differentialgleichungen für die charakteristischen Streifen, so hat man genau wie auf S. 222 eine Funktion ϱ von x so zu bestimmen, daß der nach x genommene Differentialquotient von:

$$\varrho \left(\delta z - \sum_1^m{}_\mu \frac{\partial \omega}{\partial x'_\mu} \delta x_\mu \right) - \varrho \sum_1^{n-m}{}_k\, p_{m+k} \left(\delta x_{m+k} - \sum_1^m{}_\mu \frac{\partial \omega_k}{\partial x'_\mu} \delta x_\mu \right)$$

identisch verschwindet. Wegen:

$$\frac{d}{dx} \delta x_\mu = \delta x'_\mu, \quad \frac{d}{dx} \delta z = \delta \omega; \quad \frac{d}{dx} \delta x_{m+k} = \delta \omega_k$$

erhält man zur Bestimmung der charakteristischen Streifen ein simultanes System, das bei der Substitution:

$$\varrho = \gamma, \quad -\varrho p_{m+k} = \alpha_{m+k} \qquad (k = 1 \ldots n-m)$$

genau in das vorhin gefundene simultane System übergeht. Dieses letztere kann also wirklich auch zur Definition der charakteristischen Kurven dienen.

Von besonderem Interesse ist nun der Fall, daß die Zahl der von einander verschiedenen charakteristischen Kurven den kleinsten möglichen Wert, nämlich den Wert ∞^{n+m+1} besitzt. Dieser Fall wird offenbar dann und nur dann eintreten, wenn die aus (134) folgenden Werte der Ableitungen von $x_1' \dots x_m'$ nach x Funktionen von $z, x, x_1 \dots x_n, x_1' \dots x_m'$ allein werden, das heißt, wenn die Gleichungen:

$$(139)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_\mu'} - \dfrac{\partial\omega}{\partial x_\mu} - \sum_1^{n-m} \dfrac{\partial\omega}{\partial x_{m+\tau}}\dfrac{\partial\omega_\tau}{\partial x_\mu'} - \dfrac{\partial\omega}{\partial z}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_\mu'} = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_\mu'} - \dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_\mu} - \sum_1^{n-m} \dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_{m+\tau}}\dfrac{\partial\omega_\tau}{\partial x_\mu'} - \dfrac{\partial\omega_k}{\partial z}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_\mu'} = 0 \end{cases}$$

$$(k = 1 \dots n-m;\ \mu = 1 \dots m),$$

unter denen sich immer m nach den Ableitungen von $x_1' \dots x_m'$ auflösbare befinden, mit einander verträglich sind, wenn also in einer gewissen aus den Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von ω und den ω_k gebildeten Matrix alle $(m+1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so reduziren sich die Gleichungen (134) für die Schar der charakteristischen Kurven auf Null gleich Null, und zur Bestimmung aller derjenigen Schnittbedingungen der charakteristischen Kurven, die Pfaffsche Gleichungen sind, behält man bloß die Gleichungen (133), aus denen noch alle die wegzulassen sind, die Differentialgleichungen für $\alpha_1 \dots \alpha_m$ darstellen. Die Größen $\alpha_{m+1} \dots \alpha_n$, γ sind infolgedessen überhaupt durch keine endliche Relation verknüpft, und ihre Anfangswerte für $x = x_0$ dürfen vollkommen willkürlich gewählt werden. Die allgemeinste Schnittbedingung der charakteristischen Kurven, die die Form einer Pfaffschen Gleichung hat, ergibt sich daher aus:

$$(140)\quad \gamma\left(\delta z - \sum_1^m \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu'}\delta x_\mu\right) + \sum_1^{n-m} \alpha_{m+k}\left(\delta x_{m+k} - \sum_1^m \frac{\partial\omega_k}{\partial x_\mu'}\delta x_\mu\right) = 0$$

durch die Substitution: $x = x_0$, wobei den α_{m+k} und γ beliebige Werte erteilt werden können.

Damit haben wir den Satz:

Besteht das System von Mongeschen Gleichungen, das zu der nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (113)

gehört, aus gerade $n - m + 1$ unabhängigen Gleichungen $(0 < m \leqq n)$ und gehört zu den ∞^{2n+1} charakteristischen Streifen von (113) die geringste mögliche Zahl, nämlich gerade ∞^{n+m+1} verschiedene charakteristische Kurven, so gibt es unter den Schnittbedingungen der Schar aller charakteristischen Kurven gerade $n - m + 1$ von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen.

In der oft erwähnten LIEschen Abhandlung von 1898 ist dieser Satz für $m = 1$ und $m = 2$ enthalten, und es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß er LIE auch für $m > 2$ bekannt war.

Wir haben gesehen, wie man aus dem MONGEschen Systeme (125), das zu der Gleichung (113) gehört, erkennen kann, ob die Zahl der charakteristischen Kurven den kleinsten möglichen Wert hat. Man kann aber die Bedingungen dafür auch aus der Differentialgleichung (113) selbst ableiten und braucht zu diesem Zwecke nur auszudrücken, daß das zu (113) gehörige MONGEsche System aus gerade $n - m + 1$ unabhängigen Gleichungen bestehen und daß es unter den Schnittbedingungen der charakteristischen Kurven gerade $n - m + 1$ unabhängige PFAFFsche Gleichungen geben soll. Ist nämlich die erste Bedingung erfüllt $(0 < m < n)$, gibt es aber ∞^{n+m+2} oder noch mehr verschiedene charakteristische Kurven, so sind unter den zugehörigen Schnittbedingungen sicher weniger als $n - m + 1$ unabhängige PFAFFsche Gleichungen enthalten.

Die erste Forderung, daß das zu (113) gehörige MONGEsche System aus gerade $n - m + 1$ unabhängigen Gleichungen bestehen soll, kommt, wie wir wissen darauf hinaus, daß in der Determinante (124) alle $(m + 1)$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden müssen, nicht aber alle m-reihigen. Um die zweite Forderung analytisch auszudrücken, gehen wir von dem simultanen Systeme (114′) aus, das die charakteristischen Streifen und also auch die charakteristischen Kurven definirt, und suchen alle Schnittbedingungen der charakteristischen Kurven, die PFAFFsche Gleichungen sind. Da unter diesen Schnittbedingungen immer eine PFAFFsche Gleichung vorkommt, nämlich die Gleichung (118), die aus $\delta z - \Sigma p_i \delta x_i = 0$ durch die Substitution $x = x_0$ hervorgeht (vgl. S. 224), so brauchen wir nur zu verlangen, daß außerdem noch $n - m$ von dieser einen und von einander unabhängige PFAFFsche Gleichungen als Schnittbedingungen auftreten.

Setzen wir:

$$\Delta z = \delta z - \sum_1^n p_i \delta x_i \tag{141}$$

so ist, wie man aus den Entwickelungen auf S. 223 leicht erkennt:

$$\frac{d}{dx}\Delta z = F_z \Delta z, \tag{142}$$

und die Aufsuchung der betreffenden Schnittbedingungen kommt darauf hinaus $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, γ so als Funktionen von x zu bestimmen, daß $\Sigma \alpha_i \delta x_i + \gamma \Delta z$ von x frei wird. Wegen:

$$\frac{d}{dx}\delta x_i = -\delta F_{p_i} =$$

$$= -\sum_1^n{}_\nu (F_{p_i x_\nu} + p_\nu F_{p_i z}) \delta x_\nu - \sum_1^n{}_\nu F_{p_i p_\nu} \delta p_\nu - F_{p_i z} \Delta z$$

führt das auf die Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i}{dx} - \sum_1^n{}_\nu (F_{p_\nu x_i} + p_i F_{p_\nu z}) \alpha_\nu = 0 \\ \dfrac{d\gamma}{dx} - \sum_1^n{}_\nu F_{p_\nu z} \alpha_\nu + F_z \gamma = 0 \end{cases} \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{143}$$

und auf die endlichen Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu F_{p_\nu p_i} \alpha_\nu = 0 \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{144}$$

Unter den Gleichungen (144) sind gerade m von einander unabhängige vorhanden. Sollen daher gerade $n - m + 1$ unabhängige Pfaffsche Gleichungen als Schnittbedingungen auftreten, so darf sich durch Differentiation von (144) bei Benutzung von (143) keine endliche Relation zwischen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ ergeben, die nicht schon aus (144) allein folgt. Durch Differentiation von (144) ergibt sich aber:

$$\left| \sum_1^n{}_\nu \left\{ \frac{d}{dx} F_{p_\nu p_i} + \sum_1^n{}_\tau F_{p_\tau p_i} (F_{p_\nu x_\tau} + p_\tau F_{p_\nu z}) \right\} \alpha_\nu = 0 \right. \qquad (i = 1 \ldots n). \tag{145}$$

Demnach wird die Differentialgleichung (113) dann und nur dann ∞^{n+m+1} verschiedene charakteristische Kurven besitzen, die einem

Mongeschen Systeme von gerade $n - m + 1$ unabhängigen Gleichungen genügen, wenn in der Determinante der Gleichungen (144) nicht alle m-reihigen Unterderminanten verschwinden, während in der Matrix der vereinigten Gleichungen (144), (145) alle $(m + 1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden. Diese Bedingungen kommen auf ein System von partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung hinaus, dem die Funktion F genügen muß.

Auf die andern Möglichkeiten, die sich darbieten können, wollen wir nicht eingehen. Jedenfalls ist klar, daß man bei einer vorgelegten Differentialgleichung (113) immer durch bloße Differentiationen und Eliminationen entscheiden kann, wie viele verschiedene charakteristische Kurven zu ihr gehören und wie viele von einander unabhängige Pfaffsche Gleichungen unter den Schnittbedingungen der charakteristischen Kurven vorhanden sind. Noch weniger können wir uns hier auf die Frage einlassen, wie alle etwa vorhandenen vollständigen Lösungen gefunden werden, deren Integralvereine als Punktmannigfaltigkeiten eine Dimensionenzahl kleiner als $n + 1$ besitzen.

Druckfertig erklärt 25. VII. 1905.]

Notiz über Translationsflächen.

Von

K. Żorawski.

Die von Sophus Lie und dessen Nachfolgern entwickelte Theorie der Translationsflächen kann, soweit es sich um Eigenschaften von allgemeinem Charakter handelt, als ein abgerundetes Ganze angesehen werden.[1]) Trotzdem scheint es mir nicht ohne Interesse zu sein, zu untersuchen, wie sich die Rechnungen gestalten, sobald man folgendes Transformationsproblem in Angriff nimmt. Man denke sich die Fläche in Parameterdarstellung vorgelegt und man suche dieselbe auf derartige neue Parameter zu beziehen, daß die entsprechenden Parameterlinien zwei Scharen von kongruenten und gleichgestellten Kurven bilden. Behufs der Bestimmung der fraglichen Kurvenscharen wird man auf ein System von Differentialgleichungen geführt, dessen Integrabilitätsbedingungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Tatsache liefern sollen, daß die vorgelegte Fläche der Kategorie der Translationsflächen angehöre.

Wir wollen in dieser Notiz die oben angedeuteten Betrachtungen anstellen und uns dieselben in folgender Weise zu erleichtern suchen. Wir nehmen an, daß die ursprünglichen Parameterlinien Krümmungslinien sind, und benutzen die Differentiationen nach Bogenlängen der Krümmungslinien und überhaupt die Formeln der Natürlichen Geometrie. Die Bedingungen dafür, daß eine Fläche zur Kategorie der Translationsflächen gehöre, erscheinen dann als Relationen zwischen den Hauptkrümmungen und den Ableitungen derselben nach den Bogenlängen der Krümmungslinien.

1) Siehe: G. Scheffers, Das Abelsche Theorem und das Liesche Theorem über Translationsflächen. Acta math. Band 28, p. 65—91.

Es sei dabei folgendes bemerkt: Wir setzen voraus, daß die Fläche weder zu denjenigen gehört, für welche in jedem Punkte die Hauptkrümmungen einander gleich sind, noch zu denjenigen, für welche eine der Hauptkrümmungen gleich Null ist. Es ist klar, daß diese Beschränkung keine wesentliche Beschränkung der Resultate hervorbringen kann.

1. Hat man eine Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \cdot \tag{1}$$

und setzt man voraus, daß die Parameterlinien Krümmungslinien sind, so besitzt die erste bezw. zweite Differentialform die einfache Gestalt:

$$E du^2 + G dv^2, \quad L du^2 + N dv^2.$$

Für die geodätischen Krümmungen der Parameterlinien hat man dann die Formeln:

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}$$

und für die Normalkrümmungen derselben die Formeln:

$$n_1 = \frac{L}{E}, \quad n_2 = \frac{N}{G}.$$

Die Differentialquotienten nach den Bogenlängen der Krümmungslinien werden durch die Formeln:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial f}{\partial v}$$

definiert. Wenn man die zweifachen Differentiationen nach den Bogenlängen in der Weise bezeichnet, daß

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_k \partial s_i} = \frac{\partial}{\partial s_i}\left(\frac{\partial f}{\partial s_k}\right),$$

so findet dann folgende identische Beziehung statt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} = g_2 \frac{\partial f}{\partial s_2} - g_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}. \tag{2}$$

Ferner, wenn X, Y, Z die Richtungskosinus der positiven Normalen bezeichnen, welche in der Weise gewählt werden, daß

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_1} \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial z}{\partial s_2} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +1, \tag{3}$$

so sind die Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fläche, wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} &= -g_1 \frac{\partial x}{\partial s_2} + n_1 X, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} = g_2 \frac{\partial x}{\partial s_2}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} &= g_1 \frac{\partial x}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s_2^2} = -g_2 \frac{\partial x}{\partial s_1} + n_2 X. \end{aligned} \tag{4}$$

Endlich sollen noch die Formeln von GAUSS und MAINARDI-CODAZZI angeführt werden. Dieselben lauten:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n_1}{\partial s_2} = g_1 (n_2 - n_1), \quad \frac{\partial n_2}{\partial s_1} = g_2 (n_1 - n_2), \\ &\frac{\partial g_1}{\partial s_2} + \frac{\partial g_2}{\partial s_1} + g_1^2 + g_2^2 + n_1 n_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Man betrachte jetzt auf einer Translationsfläche zwei voneinander verschiedene Scharen Γ und Γ' von kongruenten und gleichgestellten Kurven. Auf dieser Fläche existieren solche infinitesimale Transformationen:

$$\begin{aligned} Df &= p \frac{\partial f}{\partial s_1} + q \frac{\partial f}{\partial s_2}, \\ D'f &= p' \frac{\partial f}{\partial s_1} + q' \frac{\partial f}{\partial s_2}, \end{aligned} \tag{6}$$

für welche $pq' - qp'$ nicht identisch Null ist, deren Bahnkurven beziehungsweise die Scharen Γ und Γ' sind und welche so beschaffen sind, daß erstens Df die Richtungen der Linienelemente von Γ' invariant läßt, daß zweitens $D'f$ die Richtungen der Linienelemente von Γ invariant läßt, und daß drittens die infinitesimalen Transformationen Df und $D'f$ miteinander vertauschbar sind. Anderseits, wenn auf einer Fläche infinitesimale Transformationen Df und $D'f$ existieren, für die $pq' - qp'$ nicht identisch Null ist und welche die Richtungen der Linienelemente der Bahnkurven der infinitesimalen Transformationen $D'f$ und Df beziehungsweise invariant lassen und miteinander vertauschbar sind, so ist diese Fläche eine Translationsfläche und werden die genannten Kurvenscharen Γ und Γ' aus kongruenten und gleichgestellten Kurven gebildet.

Wenn man diese Bedingungen analytisch formuliert, so ergeben sich folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} D(D'x) &= kD'x, \quad D'(Dx) = k'Dx, \\ D(D'y) &= kD'y, \quad D'(Dy) = k'Dy, \\ D(D'z) &= kD'z, \quad D'(Dz) = k'Dz, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$(D, D') = 0, \tag{8}$$

wo k und k' Funktionen von u und v bezeichnen. Wir wollen diese Relationen umformen und bemerken zuerst, daß

$$D(D'x) = D(p')\frac{\partial x}{\partial s_1} + D(q')\frac{\partial x}{\partial s_2} + p\left(p'\frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} + q'\frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1}\right) + \\ + q\left(p'\frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} + q'\frac{\partial^2 x}{\partial s_2^2}\right);$$

benutzt man aber die Formeln (4), so folgt:

$$D(D'x) = [D(p') + q'(g_1 p - g_2 q)]\frac{\partial x}{\partial s_1} + \\ + [D(q') - p'(g_1 p - g_2 q)]\frac{\partial x}{\partial s_2} + (n_1 p p' + n_2 q q')X.$$

Analoge Ausdrücke hat man für $D(D'y)$ und $D(D'z)$; da aber die Determinante (3) von Null verschieden ist, so liefern drei von den Relationen (7) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D(p') + q'(g_1 p - g_2 q) &= kp', \\ D(q') - p'(g_1 p - g_2 q) &= kq', \\ n_1 p p' + n_2 q q' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und auf dieselbe Weise bekommt man aus den drei andern Relationen (7) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} D'(p) + q(g_1 p' - g_2 q') &= k'p, \\ D'(q) - p(g_1 p' - g_2 q') &= k'q \end{aligned} \tag{10}$$

und die mit der dritten der Gleichungen (9) identische Gleichung. Das System der fünf Gleichungen (9) und (10) ist mit dem System (7) äquivalent. Außer denselben findet noch die Bedingung (8) statt, welche man in der Form:

$$[D(p') - D'(p)]\frac{\partial f}{\partial s_1} + [D(q') - D'(q)]\frac{\partial f}{\partial s_2} + \\ + (pq' - p'q)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}\right) = 0$$

darstellen kann. Wenn man aber die Relation (2) berücksichtigt, so liefert die Bedingung (8) die mit derselben äquivalenten Relationen:

$$\begin{aligned} D(p') - D'(p) + g_1(pq' - qp') &= 0, \\ D(q') - D'(q) - g_2(pq' - qp') &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn man jetzt in diese Relationen (11) die Werte von $D(p')$, $D(q')$, $D'(p)$, $D'(q)$ aus (9) und (10) einsetzt, so ergibt sich:

$$pk' - p'k = 0, \quad qk' - q'k = 0,$$

woraus folgt:

$$k = k' = 0.$$

Es ergeben sich also zur Bestimmung der unbekannten infinitesimalen Transformationen Df und $D'f$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D(p') + q'(g_1 p - g_2 q) &= 0, \\ D(q') - p'(g_1 p - g_2 q) &= 0, \\ D'(p) + q(g_1 p' - g_2 q') &= 0, \\ D'(q) - p(g_1 p' - g_2 q') &= 0, \\ n_1 pp' + n_2 qq' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Es ist leicht zu prüfen, daß unter der Voraussetzung der Nichtabwickelbarkeit der Fläche diesem System durch die Annahme, daß irgend welche der Größen p, q, p', q' identisch Null ist, nicht genügt werden kann. Anders gesagt, ist bei unsern Voraussetzungen keine der Scharen Γ und Γ' eine Schar von Krümmungslinien.

Wir wollen nun in dieses System (12) die neuen Unbekannten:

$$t = \frac{q}{p}, \quad t' = \frac{q'}{p'},$$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad r' = \sqrt{p'^2 + q'^2}$$

einführen. Alsdann nehmen diese Gleichungen die Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial s_1} + t\frac{\partial t'}{\partial s_2} &= (1 + t'^2)(g_1 - g_2 t), \\ \frac{\partial t}{\partial s_1} + t'\frac{\partial t}{\partial s_2} &= (1 + t^2)(g_1 - g_2 t'), \\ n_1 + n_2 tt' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial s_1} + t\frac{\partial r'}{\partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial s_1} + t'\frac{\partial r}{\partial s_2} = 0 \tag{14}$$

an. Hat man aus dem System (13) die Unbekannten t und t' bestimmt, so wird man durch Integration der Gleichungen (14) r und r' stets finden können. Unsere Aufgabe besteht also in der Auflösung des Systems (13) in bezug auf die Unbekannten t

und t' und in der Diskussion der Bedingungen, unter welchen diese Auflösung möglich wird.

3. Vermöge der dritten der Gleichnngen (13) kann man eine der Unbekannten eliminieren, und man bekommt auf diese Weise zur Bestimmung einer unbekannten Funktion zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Man hat nämlich:

$$t' = -\frac{n_1}{n_2 t}$$

und daraus durch Differentiation:

$$dt' = \frac{n_1 (t dn_2 + n_2 dt) - t n_2 dn_1}{n_2^2 t^2}.$$

Also die Elimination von t' aus den Gleichungen (13) gibt das Resultat:

$$\frac{\partial t}{\partial s_1} - \frac{n_1}{n_2 t}\frac{\partial t}{\partial s_2} - (1+t^2)\left(g_1 + g_2 \frac{n_1}{n_2 t}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{n_2^2 t^2}\left\{n_1\left(t\frac{\partial n_2}{\partial s_1} + n_2 \frac{\partial t}{\partial s_1}\right) - n_2 t \frac{\partial n_1}{\partial s_1}\right\} + \frac{1}{n_2^2 t}\left\{n_1\left(t\frac{\partial n_2}{\partial s_2} + n_2 \frac{\partial t}{\partial s_2}\right) - n_2 t \frac{\partial n_1}{\partial s_2}\right\} - \left(1 + \frac{n_1^2}{n_2^2 t^2}\right)(g_1 - g_2 t) = 0.$$

Wenn man diese Gleichungen in bezug auf die Ableitungen der Funktion t auflöst, so folgt:

$$\frac{\partial t}{\partial s_1} = \frac{1}{n_2 (n_1 + n_2 t^2)}\left\{\left[n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_1} - n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_1} + \left(n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_2} - n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_2}\right) t\right] t + (g_1 - g_2 t)(n_1^2 + n_2^2 t^2) + n_2 (g_2 n_1 + g_1 n_2 t) t (1 + t^2)\right\},$$

$$\frac{\partial t}{\partial s_2} = \frac{1}{n_1 (n_1 + n_2 t^2)}\left\{\left[n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_1} - n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_1} + \left(n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_2} - n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_2}\right) t\right] t^2 + (g_1 - g_2 t) t (n_1^2 + n_2^2 t^2) - n_1 (g_2 n_1 + g_1 n_2 t)(1 + t^2)\right\}$$

und wir bemerken dabei, daß für eine Funktion t, welche die Bedingungen des Problems erfüllt, der im Nenner dieser Ausdrücke stehende Faktor $n_1 + n_2 t^2$ nicht identisch gleich Null ist. In der Tat, es wäre in diesem Falle infolge der dritten der Gleichungen (13) identisch $t' = t$, was mit der Bedingung $pq' - qp' \neq 0$ unverträglich ist. In diese Gleichungen können wir jetzt statt g_1 und g_2 die Werte einsetzen, welche aus den zwei ersten der Relationen (5) folgen. Nach dieser Umformung erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial s_1} &= \frac{1}{n_2(n_1-n_2)(n_1+n_2t^2)}\Big\{-n_1^2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}+(n_1-n_2)\Big(n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_1}-\\
&-2n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\Big)t+\Big[(n_1-n_2)\Big(n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}-n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_2}\Big)-2n_2^2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}\Big]t^2+\\
&+(n_1-n_2)n_2\frac{\partial n_2}{\partial s_1}t^3-n_2^2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}t^4\Big\},\\
\frac{\partial t}{\partial s_2} &= \frac{1}{n_1(n_1-n_2)(n_1+n_2t^2)}\Big\{-n_1^2\frac{\partial n_2}{\partial s_1}-(n_1-n_2)n_1\frac{\partial n_1}{\partial s_2}t+\\
&+\Big[(n_1-n_2)\Big(n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_1}-n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\Big)-2n_1^2\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\Big]t^2+(n_1-n_2)\Big(2n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}-\\
&-n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_2}\Big)t^3-n_2^2\frac{\partial n_2}{\partial s_1}t^4\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Diese Gleichungen können aber durch geeignete Substitution bedeutend vereinfacht werden. Man setze nämlich:

$$w=\frac{n_1}{t}-n_2t, \qquad (16)$$

so folgt:

$$dw=-\frac{n_1+n_2t^2}{t^2}dt+\frac{dn_1}{t}-td n_2.$$

Mittels der Gleichungen (15) kann man also die Ableitungen der Funktion w nach den Bogenlängen der Krümmungslinien folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s_1} &= -\frac{1}{n_2(n_1-n_2)}\Big\{(n_1-n_2)\Big(n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}-n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_2}\Big)-\\
&-2n_2(n_1+n_2)\frac{\partial n_1}{\partial s_2}+(n_1-n_2)\Big[\Big(n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_1}-2n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\Big)\frac{1}{t}+\\
&+n_2\frac{\partial n_2}{\partial s_1}t\Big]-\frac{\partial n_1}{\partial s_2}\Big(\frac{n_1^2}{t^2}-2n_1n_2+n_2^2t^2\Big)\Big\}+\frac{1}{t}\frac{\partial n_1}{\partial s_1}-t\frac{\partial n_2}{\partial s_1},\\
\frac{\partial w}{\partial s_2} &= -\frac{1}{n_1(n_1-n_2)}\Big\{(n_1-n_2)\Big(n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_1}-n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\Big)-\\
&-2n_1(n_1+n_2)\frac{\partial n_2}{\partial s_1}-(n_1-n_2)\Big[n_1\frac{\partial n_1}{\partial s_2}\frac{1}{t}+\Big(n_1\frac{\partial n_2}{\partial s_2}-2n_2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}\Big)t\Big]\\
&-\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\Big(\frac{n_1^2}{t^2}-2n_1n_2+n_2^2t^2\Big)\Big\}+\frac{1}{t}\frac{\partial n_1}{\partial s_2}-t\frac{\partial n_2}{\partial s_2};
\end{aligned}$$

ordnet man nun hier die Glieder zweckmäßig, so überzeugt man sich, daß sich für w die Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s_1} &= \alpha_0+\alpha_1w+\alpha_2w^2,\\
\frac{\partial w}{\partial s_2} &= \beta_0+\beta_1w+\beta_2w^2
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

ergeben, wo die Koeffizienten α und β die folgenden Werte besitzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{3n_2+n_1}{n_1-n_2}\frac{\partial n_1}{\partial s_2}+\frac{n_1}{n_2}\frac{\partial n_2}{\partial s_2}, & \beta_0 &= \frac{3n_1+n_2}{n_1-n_2}\frac{\partial n_2}{\partial s_1}-\frac{n_2}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial s_1},\\ \alpha_1 &= \frac{2}{n_2}\frac{\partial n_2}{\partial s_1}, & \beta_1 &= \frac{2}{n_1}\frac{\partial n_1}{\partial s_2},\\ \alpha_2 &= -\frac{1}{n_2(n_1-n_2)}\frac{\partial n_1}{\partial s_2}, & \beta_2 &= \frac{1}{n_1(n_1-n_2)}\frac{\partial n_2}{\partial s_1}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

4. Wir wollen uns nun mit der Bestimmung der Funktion w aus den Gleichungen (17) beschäftigen. Durch Differentiation ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial s_2\,\partial s_1} &= \frac{\partial\beta_0}{\partial s_1}+\frac{\partial\beta_1}{\partial s_1}w+\frac{\partial\beta_2}{\partial s_1}w^2+(\beta_1+2\beta_2 w)(\alpha_0+\alpha_1 w+\alpha_2 w^2),\\ \frac{\partial^2 w}{\partial s_1\,\partial s_2} &= \frac{\partial\alpha_0}{\partial s_2}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial s_2}w+\frac{\partial\alpha_2}{\partial s_2}w^2+(\alpha_1+2\alpha_2 w)(\beta_0+\beta_1 w+\beta_2 w^2). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Nimmt man nun die Relation:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s_1\,\partial s_2}-\frac{\partial^2 w}{\partial s_2\,\partial s_1}=\frac{1}{n_1-n_2}\left(\frac{\partial n_1}{\partial s_2}\frac{\partial w}{\partial s_1}+\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\frac{\partial w}{\partial s_2}\right),$$

welche unmittelbar aus den Relationen (2) und den zwei ersten der Relationen (5) folgt, und setzt in dieselbe die Werte (17) und (19) ein, so kommt man auf die Gleichung zweiten Grades:

$$Pw^2+Qw+R=0, \quad (20)$$

in welcher die Koeffizienten folgende Werte besitzen:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial\beta_2}{\partial s_1}-\frac{\partial\alpha_2}{\partial s_2}+\beta_2\alpha_1-\alpha_2\beta_1+\frac{1}{n_1-n_2}\left(\alpha_2\frac{\partial n_1}{\partial s_2}+\beta_2\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\right),\\ Q &= \frac{\partial\beta_1}{\partial s_1}-\frac{\partial\alpha_1}{\partial s_2}+2(\beta_2\alpha_0-\alpha_2\beta_0)+\frac{1}{n_1-n_2}\left(\alpha_1\frac{\partial n_1}{\partial s_2}+\beta_1\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\right),\\ R &= \frac{\partial\beta_0}{\partial s_1}-\frac{\partial\alpha_0}{\partial s_2}+\beta_1\alpha_0-\alpha_1\beta_0+\frac{1}{n_1-n_2}\left(\alpha_0\frac{\partial n_1}{\partial s_2}+\beta_0\frac{\partial n_2}{\partial s_1}\right). \end{aligned}$$

Es leuchtet ein, daß unter der Voraussetzung der Nichtabwickelbarkeit der Fläche eine eventuelle unendliche Wurzel der Gleichung (20) nicht berücksichtigt zu werden braucht. Daher werden wir in der Folge nur die endlichen Wurzeln dieser Gleichung in Betracht ziehen.

Wir setzen zunächst voraus, daß P nicht identisch Null ist und daß die Diskriminante:

$$PR-\tfrac{1}{4}Q^2$$

dieselbe Eigenschaft besitzt, d. h. daß die Gleichung (20) zwei endliche, einfache Wurzeln hat. Durch Differentiationen der Gleichung (20) mit Benutzung der Gleichungen (17) ergibt sich:

$$\begin{aligned}(2Pw+Q)(\alpha_0+\alpha_1 w+\alpha_2 w^2)+\frac{\partial P}{\partial s_1}w^2+\frac{\partial Q}{\partial s_1}w+\frac{\partial R}{\partial s_1}=0,\\ (2Pw+Q)(\beta_0+\beta_1 w+\beta_2 w^2)+\frac{\partial P}{\partial s_2}w^2+\frac{\partial Q}{\partial s_2}w+\frac{\partial R}{\partial s_2}=0,\end{aligned} \tag{21}$$

und man sieht ohne weiteres, daß jedes w, welches das System (17) befriedigt, auch den Gleichungen (20) und (21) Genüge leistet und daß jede gemeinsame Wurzel der Gleichungen (20) und (21) eine Lösung des Systems (17) ist. Es kommt also die Integration des Systems (17) auf die Bestimmung der gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen (20) und (21) heraus. Wenn man in den Gleichungen (21) die dritte Potenz von w vermöge (20) eliminiert, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial s_1}+2P\alpha_1-Q\alpha_2\right)w^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial s_1}+2P\alpha_0+Q\alpha_1-2R\alpha_2\right)w\\ +\frac{\partial R}{\partial s_1}+Q\alpha_0=0,\\ \left(\frac{\partial P}{\partial s_2}+2P\beta_1-Q\beta_2\right)w^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial s_2}+2P\beta_0+Q\beta_1-2R\beta_2\right)w\\ +\frac{\partial R}{\partial s_2}+Q\beta_0=0;\end{aligned}$$

multipliziert man ferner jede dieser Gleichungen mit P und eliminiert aus denselben die zweite Potenz von w, so ergeben sich die Gleichungen:

$$S_1 w+T_1=0,\quad S_2 w+T_2=0, \tag{22}$$

in welchen die Koeffizienten folgende Werte besitzen:

$$\begin{aligned}S_1&=P\frac{\partial Q}{\partial s_1}-Q\frac{\partial P}{\partial s_1}+2P^2\alpha_0-PQ\alpha_1+(Q^2-2PR)\alpha_2,\\ T_1&=P\frac{\partial R}{\partial s_1}-R\frac{\partial P}{\partial s_1}+PQ\alpha_0-2PR\alpha_1+QR\alpha_2,\\ S_2&=P\frac{\partial Q}{\partial s_2}-Q\frac{\partial P}{\partial s_2}+2P^2\beta_0-PQ\beta_1+(Q^2-2PR)\beta_2,\\ T_2&=P\frac{\partial R}{\partial s_2}-R\frac{\partial P}{\partial s_2}+PQ\beta_0-2PR\beta_1+QR\beta_2.\end{aligned}$$

Ist also P von Null verschieden und besitzt die Gleichung (20) zwei einfache Wurzeln, so sind die notwendigen und hin-

reichenden Bedingungen für die Existenz wenigstens einer Lösung w des Systems (17) die folgenden:

$$S_1 T_2 - T_1 S_1 = 0,$$
$$P T_1^2 - Q T_1 S_1 + R S_1^2 = 0,$$
$$P T_2^2 - Q T_2 S_2 + R S_2^2 = 0.$$

Sollen aber zwei Funktionen w (zwei Wurzeln der Gleichung (20)) dem Systeme (17) genügen, so ist es notwendig und hinreichend, daß die Relationen:

$$S_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad T_2 = 0 \tag{23}$$

bestehen.

Wir setzen jetzt voraus, daß P nicht identisch Null ist und daß

$$PR - 4Q^2 = 0, \tag{24}$$

d. h. die Gleichung (20) eine Doppelwurzel besitzt. Diese Doppelwurzel ist

$$w = -\frac{Q}{2P},$$

und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, um das System (17) durch dieselbe befriedigt wäre, die folgenden:

$$\begin{aligned} &2\left(P\frac{\partial Q}{\partial s_1} - Q\frac{\partial P}{\partial s}\right) + 4P^2\alpha_0 - 2PQ\alpha_1 + Q^2\alpha_2 = 0, \\ &2\left(P\frac{\partial Q}{\partial s_2} - Q\frac{\partial P}{\partial s_2}\right) + 4P^2\beta_0 - 2PQ\beta_1 + Q^2\beta_2 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

sind. Man überzeugt sich leicht, daß, wenn man in (23) den aus (24) folgenden Wert von R hineinsetzt, sich die Bedingungen (25) ergeben

Setzt man jetzt

$$P = 0$$

und Q von Null verschieden voraus, so folgt aus (20)

$$w = -\frac{R}{Q},$$

und man bekommt die Bedingungen:

$$Q\frac{\partial R}{\partial s_1} - R\frac{\partial Q}{\partial s_1} + Q^2\alpha_0 - QR\alpha_1 + R^2\alpha_2 = 0,$$
$$Q\frac{\partial R}{\partial s_2} - R\frac{\partial Q}{\partial s_2} + Q^2\beta_0 - QR\beta_1 + R^2\beta_2 = 0.$$

Digitized by Google

Ist endlich

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

so muß auch

$$R = 0$$

sein, und dann wird das System (17) durch eine unendliche Schar von Funktionen befriedigt, welche von einer willkürlichen Konstante abhängig ist.

5. Man setze nun voraus, daß in einem vorgelegten Falle eine Funktion w, welche das System (17) befriedigt, in der Tat gefunden worden ist. Man wende sich alsdann zur Relation (16) und schreibe dieselbe in der Form:

$$n_2 t^2 + wt - n_1 = 0. \tag{26}$$

Es sollen zwei Fälle auseinander gehalten werden. Entweder besitzt diese Gleichung zwei einfache Wurzeln t, oder sie besitzt eine zweifache Wurzel. Werden im ersten Falle diese zwei Wurzeln mit t und t' bezeichnet, so befriedigen dieselben die Relation:

$$n_1 + n_2 tt' = 0,$$

d. h. sie genügen dem Systeme der Differentialgleichungen (13), bestimmen also die Kurvenscharen Γ und Γ', über welche unter 2. die Rede war. Um endliche Gleichungen dieser Kurvenscharen zu bestimmen, sollen die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} + t\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial s_1} + t\frac{\partial \varphi'}{\partial s_2} = 0$$

integriert werden. Hat man aus denselben die Funktionen φ und φ' bestimmt, so stellen die Gleichungen:

$$\varphi = \varphi(u, v), \quad \varphi' = \varphi'(u, v)$$

eine solche Transformation vor, mittels welcher die Gleichungen (1) der Fläche auf die Form:

$$x = f(\varphi) + f'(\varphi'), \quad y = g(\varphi) + g'(\varphi'), \quad z = h(\varphi) + h'(\varphi')$$

gebracht werden können. Man gelangt auf diese Weise in allen Fällen, in welchen eine Funktion w existiert, die das System (17) befriedigt und für welche die Gleichung (26) zwei einfache Wurzeln besitzt, zu zwei Kurvenscharen Γ und Γ' auf einer Translationsfläche. Für eine vorgelegte Fläche können unter Umständen mehrere solche Funktionen w existieren, und man hat sodann eine Fläche, welche in mehrfacher Weise als eine Translationsfläche aufgefaßt werden kann.

Im Falle einer zweifachen Wurzel der Gleichung (26) hat man:

$$n_1 + n_2 t^2 = 0,$$

was mit den Bedingungen des Problems unvereinbar ist, d. h. es entspricht einem solchen Falle keine Erzeugung der Fläche durch Translation von Kurven.

6. Wir wollen noch untersuchen, welche geometrische Bedeutung der zuletzt betrachtete Ausnahmsfall besitzt.

Zu diesem Zwecke sei bemerkt, daß man eine Regelfläche als solche Fläche definieren kann, auf welcher infinitesimale Transformationen existieren, die die Richtungen der Linienelemente ihrer Bahnkurven invariant lassen. Ist nämlich eine solche infinitesimale Transformation

$$Df = p\frac{\partial f}{\partial s_1} + q\frac{\partial f}{\partial s_2},$$

so hat man die Bedingungen:

$$D(Dx) = kDx, \quad D(Dy) = kDy, \quad D(Dz) = kDz.$$

Dieselben können durch die Bedingungen:

$$\begin{gathered} D(p) + q(g_1 p - g_2 p) = kp, \\ D(q) - p(g_1 p - g_2 q) = kq, \\ n_1 p^2 + n_2 q^2 = 0 \end{gathered}$$

ersetzt werden, welche ihrerseits durch Einführung der Bezeichnung:

$$t = \frac{q}{p}$$

und Elimination von k auf die Form:

$$\begin{gathered} \frac{\partial t}{\partial s_1} + t\frac{\partial t}{\partial s_2} = (1 + t^2)(g_1 - g_2 t), \\ n_1 + n_2 t^2 = 0 \end{gathered} \tag{27}$$

gebracht werden können. Diese Gleichungen besagen, daß die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung der erwähnten Bahnkurven gleich Null sein müssen, d. h. daß die Bahnkurven in der Tat gerade Linien sind.

Man wende sich nun zu der Gleichung (26). Dieselbe besitzt eine Doppelwurzel, wenn

$$w = 2\varepsilon\sqrt{-n_1 n_2} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{28}$$

ist; alsdann hat man:

$$t = -\frac{\varepsilon\sqrt{-n_1 n_2}}{n_2}. \tag{29}$$

Die Funktion (28) muß aber das System (17) befriedigen, d. h. es muß sein:

$$2\alpha_1 n_1 n_2 - \left(n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_1} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_1}\right) = \varepsilon \sqrt{-n_1 n_2}\,(\alpha_0 - 4\alpha_2 n_1 n_2),$$

$$2\beta_1 n_1 n_2 - \left(n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_2} + n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_2}\right) = \varepsilon \sqrt{-n_1 n_2}\,(\beta_0 - 4\beta_2 n_1 n_2),$$

und wenn man hier die Werte (18) für α und β mit verschiedenen Indices einsetzt, so zeigt es sich, daß diese beiden Relationen mit der Relation:

$$\left(3n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_1} - n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_1}\right) n_2 + \left(3n_2 \frac{\partial n_1}{\partial s_2} - n_1 \frac{\partial n_2}{\partial s_2}\right) \varepsilon \sqrt{-n_1 n_2} = 0 \qquad (30)$$

identisch sind. Somit ist sie die Bedingung dafür, daß das System (17) durch den Wert (28) befriedigt werde; setzt man aber den Wert (29) in die erste der Gleichungen (27) ein, so bekommt man ebenfalls die Relation (30). Daraus ergibt sich folgendes: ist die Funktion t eine Doppelwurzel der Gleichung (26), so liefert dieselbe die geradlinigen Erzeugenden einer Regelfläche. Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, daß, wenn man die Relation (30) von der Quadratwurzel befreit, man leicht auf die Relation kommt:

$$n_1^7 \left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{n_2^3}{n_1}\right)\right]^2 + n_2^7 \left[\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{n_1^3}{n_2}\right)\right]^2 = 0.$$

Diese Relation ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Tatsache, daß eine nichtabwickelbare Fläche Regelfläche ist.

Druckfertig erklärt 3. VIII. 1905.]

INHALT.

Seite

Gerhardt Kowalewski, Über gewisse Scharen unendlicher Reihen und eine Verallgemeinerung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz 154

Friedrich Engel, Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen 161

K. Żorawski, Notiz über Translationsflächen 233

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

2. Soc 1726.9

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 19 1905
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

IV.

LEIPZIG
BEI B. G TEUBNER
1905.

Einzelpreis 1 Mark 40 Pfg.

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEC 19 1905
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 3. JULI 1905.

Geschäftliche Mitteilungen, Vorlage von Abrechnungen, Danksagungen, Eingänge.

Eine Vermehrung des Möbius-Archivs durch eine Anzahl von Manuskripten, Drucksachen usw., welche der Enkel des Verstorbenen, Herr Dr. med. & phil. Möbius dahier, abzugeben sich bereit erklärt hat, wird mit Dank entgegengenommen.

Herr Dr. Lipps soll ersucht werden, den von ihm fertig gestellten Bericht über den Inhalt des Fechner-Archivs, sowie zwei von ihm aufgefundene bemerkenswerte Briefe Wilhelm Webers in den Berichten der Klasse zu veröffentlichen.

Dem a. o. Professor Herrn Dr. Siegfried Garten dahier wird zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über den Einfluß der Lichtstrahlen auf die Netzhaut eine Quote aus der Mende-Stiftung zugebilligt.

Herr Adolf Mayer, o. M., legt vor: „Nachträgliche Bemerkung zu seiner II. Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz", zum Abdruck in den Berichten.

Herr Wiener, o. M., legt zum Abdruck in den Berichten eine Mitteilung von Herrn Johannes Friedel vor: „Experimentelle Untersuchung über lamellare Doppelbrechung".

Bericht über das Fechner-Archiv.

Von

G. F. Lipps.

Im Jahre 1895 wurde der wissenschaftliche Nachlaß G. Th. Fechners von der Gesellschaft der Wissenschaften übernommen und ein Fechner-Archiv eingerichtet. Der Inhalt desselben besteht aus Briefen und Manuskripten, die nunmehr in zwanzig, durch die Buchstaben A bis U bezeichneten Kasten unter 155 fortlaufenden Nummern untergebracht worden sind. Dazu kommen noch einzelne Druckschriften, Diplome und dergl. in zwei weiteren Kasten V und W.

Im folgenden wird das Verzeichnis der 155 Nummern mitgeteilt. Es zerfällt in neun Abteilungen: Korrespondenz; Biographisches; Literarisches; allgemeine Philosophie; Psychologie; Ästhetik; Naturphilosophie; Versuche und Beobachtungen; Kollektivmaßlehre.

Die nur teilweise druckfertigen Manuskripte zur Kollektivmaßlehre sind bereits im Jahre 1897 im Auftrage der Gesellschaft der Wissenschaften unter dem Titel „Kollektivmaßlehre" von mir ergänzt und herausgegeben worden. Von den sonstigen zusammenhängenden wissenschaftlichen Ausführungen über allgemeine Philosophie, Psychologie, Ästhetik und Naturphilosophie teile ich hier unter den einzelnen Nummern, vielfach mit Benutzung der eigenen Worte Fechners, den Inhalt mit.

Korrespondenz.

A; 1—26. B; 27—44. C; 45—61.

1. Vier Briefe von Acanfora (Palermo) und ein Briefkonzept Fechners.

2. Drei Briefe von Aubert (Breslau).

3. Neun Briefe von Bettina v. Arnim und neun Briefe Fechners an Bettina, nebst zwei Briefen der Enkelin Bettinas an Kuntze.

4. Drei Briefe von Ferd. Avenarius (Dresden).

5. Zwei Briefe von v. Bärenbach (Budapest) und ein Briefkonzept Fechners.

6. Ein Brief von Billroth (Halle).

7. Ein Brief von Brandes.

8. Elf Briefe von Breitkopf und Härtel und Briefkonzepte Fechners.

9. Ein Brief von F. Brentano (Wien).

10. 55 Briefe von Camerer (Riedlingen und Urach) und Briefkonzepte Fechners.

11. Ein Brief von Doebereiner (Jena).

12. Ein Brief von Dove (Berlin).

13. Drei Briefe von Drobisch.

14. Sieben Briefe von Duboc (Dresden).

15. Ein Brief von Elsas (Marburg).

16. Ein Brief von J. H. Fichte (Tübingen).

17. Ein Brief von A. Fick (Würzburg).

18. Ein Brief von Gauss (Göttingen) und ein Begleitschreiben von Brendel an die Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. bei Zurücksendung des (1899) der Göttinger Gesellsch. d. Wissensch. zur Verfügung gestellten Briefes.

19. Ein Brief von A. v. Graefe (Berlin).

20. Drei Briefe von Graefe (Halle) und ein Briefkonzept Fechners.

21. Ein Brief von Gisela Grimm (geb. v. Arnim) und Briefkonzepte Fechners.

22. Dreizehn Briefe von Groddeck (Marienwerder) und Briefkonzepte Fechners.

23. Ein Brief von Helmholtz (Heidelberg).

24. Vier Briefe und zwei Mitteilungen von Hering (Prag) und Briefkonzepte Fechners.

25. Ein Brief von Hermann (Leipzig).

26. Zwei Briefe von Höfler (Wien).

27. Zwei Briefe von Hübbe-Schleiden (Neuhausen-München).

28. Abschrift aus einem Brief von A. v. Humboldt.

29. Ein Brief von J. Jastrow (Baltimore) nebst Übersetzung.

30. Ein Brief von Krukenberg (Halle).

31. Zwei Briefe von Liebig (Gießen).

32. Ein Briefchen von Ludwig (Leipzig).

33. Drei Briefe von Mach (Graz und Prag) und ein Briefkonzept Fechners.

34. Ein Brief von Martius (München).

35. Ein Brief von Meinong (Prag).

36. Ein Brief von Mitscherlich (Berlin).

37. Zwei Briefe von F. A. Müller (Göding und Gießen).

38. Vierzehn Briefe und sechs Mitteilnngen von G. E. Müller (Göttingen).

39. und 40. Briefkonzepte und längere Ausführungen Fechners für G. E. Müller.

41. Elf Briefe von Rud. Müller (Dresden) und Briefkonzepte Fechners.

42. Vier Briefe von Ohm (Berlin).

43. Zwei Briefe von Pesch, S. J. (Blyenbeck, Holland) und ein Briefkonzept Fechners.

44. Zwei Briefe von Pfaff (Kiel).

45. Fünf Briefe von Poggendorff (Berlin).

46. 24 Briefe von v. Reichenbach (dem Begründer der Odlehre), sowie Briefkonzepte und Äußerungen Fechners.

47. Ein Brief von Schafhäutl.

48. Ein Brief und zwei Karten von Seydel (Leipzig) und ein Briefkonzept Fechners.

49. Zwei Briefe von Seydler (Prag).

50. Vier Briefe von Steinbrügge (Gießen).

51. Ein Brief von Ulrici (Halle).

52. Sechs Briefe von Vierordt (Tübingen) und Briefkonzepte Fechners.

53. Fünfzehn Briefe von Volkmann (Halle) und ein Briefkonzept Fechners.

54. Sieben Briefe von Leopold Voß (Hamburg).

55. Ein Brief von R. Wagner (Göttingen) an E. H. Weber.

56. Fünf Briefe von Walter (Königsberg) und Briefkonzepte Fechners.

57. Fünf Briefe von Wilhelm Weber (Göttingen).

58. Ein Brief von Wieser, S. J. (Innsbruck).

59. Elf Briefe von Wundt (Leipzig) und ein Briefkonzept Fechners.

60. 96 Briefe an Fechner und Briefkonzepte Fechners.

61. 76 Briefe älteren Datums.

Biographisches.

D; 62—73.

62. Gratulationen zum 80ten Geburtstag (1881).

63. Gratulationen zum Ordinariats-Jubiläum (1884).

64. 32 Briefe von Fechners Mutter.

65. Sechs Briefe Fechners an seine Mutter.

66. Lebenslauf der Frau Pastorin Fechner in Groß-Särchen († 1775).

67. Aufzeichnungen der Mutter Fechners.

68. Fechners erste Lebensjahre von seinem Vater beobachtet (1—6).

69. Bericht über die Reise nach Paris 1827 (1—12); Notizen über die Reise (1—11).

70. Erinnerungen an Ilmenau (1—6).

71. Autobiographischer Krankheitsbericht (1—55) und Beilage zu demselben (1—4).

72. Lebensabriß (1—30); Ergänzung zu demselben (1—13).

73. Italienische Reise im Sept. und Okt. 1874 (1—89); Tagebuchnotizen und Tagebuchblätter (1—76).

Literarisches.

E; 74—79.

74. Vortrag, gehalten in den 1830er Jahren in einer Versammlung sächsischer Landwirte zu Leipzig (1—13). Einladung der Landwirte zu genaueren Beobachtungen über Witterungsanzeichen an Tieren und Pflanzen mit einer Einleitung über Witterungsbestimmung im allgemeinen.

75. Die Vornamen als Kennzeichen für den christlich-religiösen Sinn verschiedener Zeiten und Gegenden (1—13).

76. Erinnerung an Bettina von Arnim (1—4).

77. Gedichte (1—45); die Bohnenpflanze und die aufblühende Blume (1—9), zwei Parabeln..

78. Scherzrätsel; Kinderfabeln; sonstige Aufzeichnungen (1—112).

79. Über den Spiritismus (1—72).

Allgemeine Philosophie.

F; 80—85.

80. Kategorien (1—33). — Ein zusammengesetzter Begriff ist ein, durch einen rein geistigen Akt aus zwei oder mehr im Bewußtsein festgehaltenen Begriffen erzeugter neuer Begriff. „Die Philosophie als die oberste aller Wissenschaften sollte die letzten Elemente aller Begriffe und ihre überhaupt vorkommenden Verbindungsformen, sowie die nächsten Verbindungen derselben kennen lehren, gleich wie die Chemie die letzten Elemente aller Körper, deren Verbindungsformen und nächste Verbindungen kennen lehrt.“ Es gibt möglicherweise verhältnismäßig wenige einfache Begriffe, zu deren Aufsuchung die richtige Methode jedoch noch nicht gefunden zu sein scheint. Hier wird der Versuch gemacht, die Elemente mit Bezug auf „eine gewisse Klasse von Begriffen“ aufzufinden.

Ein unzweifelhaft einfacher Begriff ist der Begriff „der reinen Negation, des reinen Nicht, der Verneinung schlechthin“. Er ist mit jedem anderen Begriffe, also auch mit sich selbst zu-

sammensetzbar. „Indem wir das Nicht negieren, erhalten wir aber die Position oder Bejahung. Die Position oder Bejahung schlechthin im Denken ist also sozusagen die zweite Potenz der Negation oder die erste Zusammensetzungsstufe des Nicht mit sich selbst.“ Negiert man die Position, so entsteht der Begriff des Nichts, d. i. die von der bloßen Verneinung wohl zu unterscheidende dritte Potenz der Negation. Die Negation des Nichts ergibt Etwas. Durch fortgesetzte Negation des jeweils gewonnenen Begriffs findet man so der Reihe nach: das Fehlen, das Vorhandensein, das Nicht-Vorhandene oder das Übrige, das Dieses-selbst, das Andere, das Dasselbe, das Verschiedene, das Gleiche, das Ungleiche oder Ungleichförmige, das Gleichförmige, das Diskontinuierliche, das Kontinuierliche, die Trennung, den Zusammenhang.

81. Fundamentales zur Philosophie (1—147). — Bemerkungen über Sprache und Wortbedeutung; über die, in der Totalität der wirklichen und vorgestellten sinnlichen Erscheinungen und dem Denken darüber sich darbietende Selbsterscheinung des Geistes und über das, durch einen mehr oder minder beharrlichen oder gesetzlichen Komplex von Erscheinungen charakterisierte Ding.

82. Allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Auffassungsweisen des Verhältnisses von Leib und Seele (1—34).

83. Allgemeine Frage ob Dualismus oder Monismus (1—37). — Der Körper als ein nur äußerlich erscheinendes, mit äußeren Sinnen wahrnehmbares, bewußtloses, wägbares, im Raume ausgedehntes Wesen ist von der, nur sich selbst erscheinenden, nicht äußerlich wahrnehmbaren, bewußten, nicht wägbaren, nur durch ihren Körper mit dem Raume in Beziehung tretenden Seele verschieden. Diese Verschiedenheit hindert aber nicht Körper und Seele als „zwar verschiedene, aber sich wechselweise fordernde und ergänzende Seiten, Momente oder Erscheinungsweisen desselben substanziellen Grundwesens“ aufzufassen. Eine solche monistische Auffassung erscheint aus theoretischen Gesichtspunkten günstiger als die dualistische; sie wirkt nur bei materialistischer Deutung unbefriedigend. „Sofern aber der Materie weder eine Priorität vor dem Geiste noch eine Superiorität darüber zugeschrieben wird, wozu sich in den Tatsachen keine Veranlassung darbietet und bei angemessener Fassung der monistischen Ansicht keine Notwendigkeit vorliegt, fallen allgemeinere Bedenken in dieser Hinsicht weg.“

84. Notizen aus verschiedenen philosophischen Werken (1—23) und über Herbarts Philosophie aus zeitgenössischen Schriften (1—31).

85. Bemerkungen über Herbarts Philosophie (1—256).

Psychologie.

F; 86—89.

86. Kritische Bemerkungen über Herbarts Prinzip und Abhandlungsweise der mathematischen Psychologie (1—37). Dieselbe Abhandlung in Abschrift, mit einem Zusatze Fechners (1—39). — Bei aller Anerkennung des Bestrebens, der Psychologie „exakte Grundlagen für eine exakte Behandlung zu geben", sieht sich Fechner doch veranlaßt „wegen der Triftigkeit von Herbarts Grundlagen" fünf Punkte hervorzuheben: 1. Die Untersuchung der unzweifelhaft in der Psychologie in betracht kommenden Größenbeziehungen setzt die Feststellung eines psychischen Maßes voraus, wofür aber bei Herbart „kein Prinzip, ja keine Andeutung dazu" vorliegt. 2. Die von Herbart zugrunde gelegte Analogie zwischen dem Verhalten der Vorstellungen einerseits und elastischer, sich zusammendrückender Körper andererseits wird ohne erkennbaren Grund nur bei einzelnen Punkten festgehalten, bei anderen Punkten hingegen (z. B. beim Gesetze der Hemmung der Vorstellungen) nicht verwendet. 3. Neben der von Herbart bevorzugten Analogie können andere Analogien (etwa mit dem Wechselspiel von Bewegungen im Planetensystem oder mit den Wechselwirkungen zwischen den Teilen einer schwingenden Saite oder mit den komplizierten Bewegungen, zu denen sich die Organe des Leibes gegenseitig anregen) mit demselben Rechte, aber mit ganz anderem Erfolge herangezogen werden. 4. Die grundlegenden Annahmen über die Hemmung der Vorstellungen, die sich übrigens nicht auf die Analogie mit den elastischen Kugeln stützen, sind nicht hinreichend begründet: die Erfahrung bestätigt es nicht, daß gleichartige und disparate Vorstellungen sich nicht hemmen und daß Vorstellungen, die einer und derselben Reihe angehören und demgemäß im Gegensatz zueinander stehen, nur im direkten Verhältnis ihres Gegensatzes und im umgekehrten Verhältnis ihrer Stärke sich hemmen; nicht minder willkürlich ist es, zu behaupten, daß die Hemmungssumme zweier Vorstellungen von der Stärke *a*

und *b*, die in vollem Gegensatze stehen und sich hemmen, entweder gleich *a* oder gleich *b* sei, und den Satz über die Hemmungssumme aus der Forderung, die Hemmungssumme so klein als möglich zu denken, abzuleiten. 5. Schließlich muß zugestanden werden, daß die Folgerungen aus den Annahmen Herbarts (schon wegen des Fehlens von Maßbestimmungen) „eines genauen Vergleichs mit der Erfahrung überhaupt nicht fähig sind." — „Alles zusammengefaßt dürfte, wenn überhaupt an eine mathematische Psychologie gedacht werden soll, der von Herbart eingeschlagene Weg nicht als zum Ziele führend anzusehen sein, und es würde gelten, sich nach einem anderen Prinzip dazu umzusehen."

87. Über ein neues Prinzip mathematischer Psychologie (1—53). — Das neue Prinzip soll nicht auf allgemeine Erörterungen gegründet werden, „inwieweit etwa schon der Begriff oder die Idee der Mathematik und Psychologie die Möglichkeit einer mathematischen Psychologie ein- oder ausschließe". Auch soll „nicht eine wirklich ausgeführte mathematische Psychologie, sondern nur ein Prinzip, welches die dereinstige Entwicklung einer solchen nach einem exakten Gange verspricht", gegeben werden. Es wird von Fechner in folgender hypothetischen Form aufgestellt: „Setzen wir voraus, daß alle unsere ideellen, geistigen, psychischen Prozesse (was ich aus allgemeinstem Gesichtspunkte nicht scheide) mit leiblichen, physischen, materiellen wechselbedingt oder wechselbezogen sind, oder, wie man sich auch wohl ausdrückt, ihren Ausdruck, Träger, Sitz darin finden, so wird es hinreichen, die mathematische Behandlung auf das Physische erstrecken zu können, um das Geistige, Psychische in der Weise mit zu treffen, wie es überhaupt von einer mathematischen Behandlung getroffen zu werden vermag." Dieses Prinzip, das eine „auch sonst vielfach bestrittene Ansicht über die Beziehungen von Seele und Leib" einschließt, soll hier nicht philosophisch begründet werden („was nicht viel weniger als die Begründung eines Systems der Philosophie voraussetzen oder fordern würde, da die Frage nach der Beziehung zwischen Leib und Seele, Materiellem und Ideellem, wenn nicht das allgemeinste Problem der Philosophie ist, jedenfalls mit den allgemeinsten Problemen derselben zusammenhängt"); es soll nur kurz gegen einige „aus allgemeinen Gesichtspunkten dagegen zu erhebende Einwürfe" verteidigt werden. — Gegen den Hauptvorwurf, „daß unser Prinzip ein rein materialistisches oder doch nicht besser

als ein solches sei", genügt der Hinweis, daß nicht eine einseitige kausale Bedingtheit des Geistigen durch das Leibliche, sondern eine wechselweise Bedingtheit des Geistigen und Leiblichen vorausgesetzt wird. „Der Gedanke kann nicht Ursache der Bewegungen sein, mit denen er entsteht und vergeht, noch die Bewegungen Ursache des zugehörigen Gedankens, insoweit man unter Ursache eine vorausgehende Bedingung versteht. Und so würde auch aus aller Materie und aller Bewegung nie irgend etwas Psychisches resultieren können, sofern nicht mit der Materie und Bewegung schon voraus etwas Psychisches gegeben wäre." „Der geistige und der materielle Prozeß gehen beide miteinander, aber nicht einer vor dem anderen, bis zum Anfange der Welt zurück." — Man kann ferner einwenden, daß durch das aufgestellte Prinzip nicht die Bewußtseinsphänomene, um die es sich in der Psychologie doch handelt und die der Beobachtung unmittelbar zugänglich sind, ins Auge gefaßt werden, sondern eine Beigabe zu jenen Phänomenen, nämlich die der Beobachtung unzugänglichen nnd überdies hypothetischen Bewegungen, „die mit unseren Gedanken mitgehen". Indessen geht auch die physikalische Untersuchung der Töne und der Farben auf Schwingungen und Schwingungsverhältnisse, die nicht unmittelbar wahrnehmbar sind. Es treten nur für die psychologische Untersuchung die unmittelbaren Träger der seelischen Empfindungen an Stelle der jene Empfindungen äußerlich verursachenden Bewegungen, welche die Physik betrachtet, so daß die „psychologische Naturlehre" eine Ergänzung der gewöhnlichen bildet. — Überdies benützt auch Herbart ein „physisches Äquivalent" insofern, als er sich auf die Analogie der Vorstellungen mit sich zusammendrückenden elastischen Körpern stützt. — Schließlich kann hervorgehoben werden, daß das aufgestellte Prinzip nur die „zerstreut und zerstückelt ohnehin sich allenthalben geltend machende Weise, ja aufdringende Neigung, geistige Verhältnisse höherer Art durch Bilder zu bezeichnen und zu erläutern, welche sich auf äußerlich oder sinnlich Wahrnehmbares beziehen oder von solchem entlehnt sind", zur konsequenten Durchführung bringt.

88. Psychologie (1—53). — 1. Objekt und Aufgabe der Psychologie. Psychologie ist die Lehre von der Seele. Das Dasein der Seele im weiteren und eigentlichen Sinne besteht in Bewußtseinserscheinungen, verknüpft durch eine Einheit des Bewußtseins, wobei die Frage nach der selbständigen

Existenz der Bewußtseinserscheinungen unerledigt bleibt und Beziehungen zur Körperwelt, die in das Untersuchungsgebiet der Psychophysik fallen, nicht geleugnet werden. Zunächst kann nur der Einblick in die eigene Seele erläutern, was Bewußtsein und Bewußtseinseinheit ist. Es ist aber die Existenz einer Seele überall anzuerkennen, wo die Merkmale des Bewußtseins und der Bewußtseinseinheit auf Grund von Analogieschlüssen anzunehmen sind. Wenn hiernach jede denkbare Seelenart zum Objekte der Psychologie werden kann, so kommen doch für die wissenschaftliche Betrachtung nur die menschlichen und etwa noch die tierischen Seelen in Betracht.

2. Allgemeine Unterschiede und Verhältnisse der Psychologie. Es kann eine allgemeine (auf alle Seelenarten gehende oder die allgemeinen Bestimmungen der Seele treffende) und eine spezielle (nur auf eine bestimmte Seelenart gehende und besondere Bestimmungen treffende) Psychologie unterschieden werden. Nach der Art und Weise der Behandlung ist eine empirische, rationale und mathematische Psychologie zu unterscheiden. Die empirische Psychologie stützt sich auf die unmittelbare Erfahrung von der eigenen Seele, auf die Kombination von Erfahrungen und auf den Erfahrungsschluß der Induktion und Analogie. Über das, was sich „durch Beobachtung, Experiment und darauf gegründete Erfahrungsschlüsse finden läßt, vermag sie nicht hinauszugehen". Die rationale Psychologie „sucht den Grund dessen, was die Erfahrung bietet, in weiter rückliegenden Gründen"; sie entbehrt in ihrer Abhängigkeit von philosophischen und theologischen Systemen einer festen Grundlage. Eine mathematische Psychologie ist von Herbart, jedoch nicht auf einwurfsfreier Grundlage, angebahnt und bis zu gewissen Grenzen ausgeführt worden. Durch die Bezugnahme auf höchste Fragen (Grundbeziehung der Seele zum Körper; Ausdehnung des Seelenreiches; Beziehung der menschlichen Seele zum göttlichen Geiste; Freiheit und Unsterblichkeit) berührt sich die allgemeine Psychologie mit Metaphysik, Naturphilosophie und Religion. Sie gewinnt eine praktische Bedeutung, indem nicht nur die Regeln des Denkens, sondern auch der Moral und der Staatsgesetze, die Kunst der Erziehung und die Ästhetik auf ihr beruhen.

3. Begriffliche Erörterungen Die Begriffe der Seele und des Geistes, im weiteren Sinne genommen, fallen zusammen; im engeren Sinne bezeichnet für die Auffassungsweise des gewöhn-

lichen Lebens die Seele die „rezeptive, empfindende, fühlende", der Geist die „tätige, schöpferische, denkende, wollende Seite der Seele im weiteren Sinne". In Philosophie und Theologie wird „unter Geist häufiger die höhere, selbstbewußte, unter Seele mehr die niedrigere, sinnliche Seite der Seele" verstanden. „Im uneigentlichen Sinne" setzt man auch Seele gleich Lebenskraft oder gleich dem einheitlichen Prinzip eines Dings und Geist gleich der „Gesamtheit der aus einem Ganzen mit dem höheren Denkvermögen abstrahierten Allgemeinheiten" (z. B. Gesetze und Kräfte der Natur = Geist der Natur). „Im folgenden werden Geist und Seele im allgemeinen als gleichbedeutend im weiteren eigentlichen Sinne gebraucht werden und die Unterschiede, für die man Geist und Seele im engeren Sinne braucbt, durch andere Ausdrücke gedeckt werden." Desgleichen wird hier der weitere Begriff des Bewußtseins „als ein gemeinsames Abstraktum aus Empfinden, Fühlen, Denken, Wollen" festgehalten und „für den Begriff des Bewußtseins im engeren Sinne der Ausdruck Selbstbewußtsein, höheres Bewußtsein gebraucht werden". „Bewußtlosigkeit" bezeichnet den Mangel an Bewußtseinserscheinungen (im Scheintod und in toten Körpern). Der Begriff des „Unbewußtseins" umfaßt außerdem den Zustand mangelnden Bewußtseins, „welcher die Bedingungen des Übergangs in Bewußtsein einschließt", sowie das „ununterschiedene Aufgehen in allgemeinere Bewußtseinsphänomene" oder auch „den niederen Bewußtseinszustand gegenüber dem, welcher Bewußtsein im engeren Sinne heißt".

4. Kategorien. „Die Seele kann nach den allgemeinen Kategorien des Existierenden betrachtet werden als eine quantitative, als eine qualitative und als eine durch innere und äußere Relationen bestimmte, so jedoch, daß diese Kategorien sich nicht koordinieren, sondern wechselseitig aufeinander anwendbar sind, indem die Kategorie der Quantität doch nur auf das qualitativ und nach seinen Relationen Bestimmte wie umgekehrt anwendbar ist."

5. Verhältnis von Zahl, Raum und Zeit zur Seele. „Das äußere Verhältnis der Zahl zur Seele besteht darin, daß die Seelen zählbar wie andere Gegenstände sind; das innere darin, daß in jeder Seele selbst zählbare Bestimmungen vorkommen." „Das äußere Verhältnis des Raumes zur Seele besteht darin, daß die Tätigkeiten der Seele unmittelbar an gewisse

Tätigkeiten eines räumlich lokalisierten Körpers gebunden sind, wodurch sie selbst im Raume lokalisiert ist. Das innere Verhältnis des Raumes zur Seele besteht darin, daß die räumliche Anschauungsform zu ihren Anschauungsformen gehört. Es ist aber die räumliche Anschauungsform jeder Seele als ein inneres subjektives Moment derselben nicht mit dem äußeren objektiven Raume zu verwechseln, in welchem ihr Körper seinen Ort hat, welcher objektive Raum zwar auch dem Menschen nur durch seine snbjektive Anschauung davon zur Erkenntnis kommt, aber nicht durch die subjektive Anschauung irgend eines einzelnen als gegeben, bestimmt, charakterisiert anznsehen ist, sondern nur durch den gesetzlichen Zusammenhang der räumlichen Anschanungen aller Geister. Unter Voraussetzung eines, allen einzelnen Geistern übergeordneten, sie einschließenden Geistes kann der objektive Raum als dessen Anschauungsform angesehen werden und die suhjektive Raumanschannng der einzelnen Seele als Bestandteile seiner Anschauung." In entsprechender Weise besteht das Verhältnis der Zeit zur Seele äußerlich in der zeitlichen Entwicklung der Seele, innerlich in der zeitlichen Anschauungsform, die der ohjektiven Zeit ebenso gegenübersteht wie die räumliche Anschauungsform dem objektiven Raum.

6. Innen- und Außenwelt der Seele. „Jede Seele hat ihr Bereich von Bewußtseinserscheinungen für sich, welches ihre Innenwelt ausmacht, besteht aber nicht mit diesem Bereiche allein, sondern ist in einem ganzen Reiche anderer Seelen mit anderen Bereichen oder Kreisen von Bewußtseinserscheinungen einbegriffen, welches ihre geistige Außenwelt bildet, und steht mit ihnen in Beziehung zu einer ihnen gemeinsamen körperlichen Außenwelt."

7. Ausdehnung des Seelenreichs. „Wir nehmen das Dasein einer anderen Seele an, wenn wir einen anderen Körper wahrnehmen, der dem unseren, an den wir eine Seele geknüpft wissen, in seiner Gestaltnng, Einrichtung und seinen Äußerungen nach Hauptbeziehungen sehr ähnlich ist." Es fehlt indessen an sicheren Grundsätzen, um zu entscheiden, „nach welchen Beziehungen überhanpt eine Ähnlichkeit mit unserem Körper und dessen Äußerungen verlangt werden muß, um das Dasein einer Seele überhaupt zu statuieren, oder welches die wesentlichen, charakteristischen Zeichen des Seelendaseins im Körperlichen sind". Demgemäß heruht es vielmehr auf einem Herkommen als auf entscheidenden Gründen, wenn man annimmt, „daß über Menschen

und Tiere und etwaige analoge Geschöpfe auf anderen Weltkörpern hinaus keine Beseelung vorkomme". „Unstreitig wird eine klare und exakte Feststellung der Bedingungen, welche das Körperliche erfüllen muß, um als Unterlage oder Träger einer Seele zu dienen, erst von künftig zu erwartenden Fortschritten der Psychophysik abhängen."

8. Verhältnisse der Seele zu anderen Seelen. Sie werden durch die gemeinsame körperliche Außenwelt vermittelt.

9. Hauptverhältnisse der Seele zur Körperwelt.

10. Gesetze.

11. Frage nach Freiheit und Notwendigkeit.

12. Frage nach Ursprung und Zukunft der Seele.

13. Allgemeiner Einblick in die Seele. [Die Abschnitte 9 bis 13 ohne hinreichende Ausführungen.]

14. Einheit der Seele. Insofern die Bewußtseinserscheinungen der Seele einheitlich verknüpft sind, schreibt man der Seele selbst Einheit zu. Sie ist nicht mit Einfachheit der Seele zu verwechseln. Die Einheit kann aufgefaßt werden als eine Einheit des gleichzeitigen Miteinander, als eine Einheit des zeitlichen Nacheinander, als eine Einheit des begrifflichen Über- und Untereinander.

89. Notizen über psychologische Literatur (1—36).

Ästhetik.

G. 90—93; H 94—104.

90—93. Elemente der Ästhetik unter Mitheziehung auf die Ethik (1—816).

90. Titel, Vorwort, Inhaltsübersicht (1—8). „Das vorliegende Werk stellt sich die Aufgabe, auf die einfachsten und allgemeinsten hegrifflichen und gesetzlichen Bestimmungen des Gefallens und Mißfallens als Fundamente der Ästhetik zurückzugehen." Es zerfällt in zwei Teile. Der zweite Teil (von welchem bloß das erste Kapitel vorliegt) „wird hauptsächlich von der Zusammensetzung ästhetischer Eindrücke aus einem assoziativen und direkten Faktor, den allgemeinsten Gesichtspunkten, welchen sich die Kunst unterordnet und den ästhetischen Gesetzen handeln". Die siebzehn Kapitel des ersten Teils sind in drei Gruppen „Einleitendes" (Kap. I bis III), „Grundbestimmungen über Lust und Unlust" (Kap. IV bis IX), „Ästhetische und prak-

tische Kategorien. Schön und Gut“ (Kap. X bis XVII) zusammengefaßt, an welche sich vier Beilagen anschließen. Das einzige Kapitel des zweiten Teils wird hier als Kap. XVIII dem ersten Teile unmittelbar angeschlossen.

Einleitendes (9—149).

I. Kap. Begriff und Aufgabe der Ästhetik. „Psychologische Gesichtspunkte waren es, welche zuerst zur Aufstellung der Ästhetik als besonderer Wissenschaft führten, sowie die Weise ihrer Einordnung in den gesamten Kreis der Wissenschaften bestimmten, und auch jetzt noch scheint mir ihr Begriff und ihre Stellung zu anderen Lehren am leichtesten von dieser Seite zu begründen.“ Dabei kann man „nach Verlassen der früher üblichen Einteilung in äußerlich koordinierte Geistesvermögen“ zwei Einteilungsweisen „nach der Höhe oder nach Stufen“ und „nach der Weite oder nach Seiten des Geistes“ unterscheiden. Nach der Höhe oder nach Stufen unterscheidet man „ein niederes, sinnliches und ein höheres, im engeren Sinne geistiges Gebiet“, nach der anderen Einteilungsweise trennt man „eine Erkenntnisseite, eine Seite des Strebens oder Begehrens und eine Gefühlsseite, wofür man auch kurz theoretische, praktische und ästhetische Seite setzen könnte, indem man zur Erkenntnisseite oder theoretischen Seite die sinnliche Wahrnehmung, die Erinnerung, jede Art der Vorstellung überhaupt, den Begriff, das Urteil, den Schluß, den Gedanken, die Idee; zur Seite des Begehrens oder praktischen Seite den sinnlichen Trieb und den höheren Willen und zur Gefühlsseite oder ästhetischen Seite die sinnliche sowie höhere geistige Lust und Unlust rechnet“. In der Gefühlsseite findet die Ästhetik ihren psychologischen Anknüpfungspunkt.

„Alle Gebiete und Seiten des Geistes hängen in der Art einheitlich und sich wechselbestimmend zusammen, daß keine ohne die anderen bestehen und ohne Mitbezugnahme auf die anderen betrachtet werden kann. Die Psychologie hat die Aufgabe, sie in diesem Zusammenhange in Unterordnung unter die allgemeine Einheit des Bewußtseins in Betracht zu nehmen. Sofern sie aber dieser Aufgabe nach allen inneren Beziehungen des geistigen Lebens zu genügen hat, muß sie darauf verzichten, solche auch nach den Beziehungen des Geistes zueinander und zu der materiellen Außenwelt eingehend zu verfolgen, und es tritt daher das Bedürfnis nach anderen Lehren ein, welche von gewisser Seite

in der Psychologie wurzelnd nnd Grundbestimmungen derselben in sich aufnehmend, sie nach anderer Seite ergänzen und über sie hinausgreifen. Indem nun jedes besondere Gebiet, jede besondere Seite des Geistes zum Ausgangspunkt nnd Mittelpunkt der Beziehungen zwischen Innerem und Äußerem genommen werden kann, von wo aus sie zu verfolgen, in bezug worauf sie zusammenzuhalten sind, gehen verschiedene, selbst zueinander bezugsreiche Lehren hervor, unter welchen die Ästhetik, wie sie auch übrigens des näheren gefaßt werde, jedenfalls Platz greift und wonach sie zwar nicht als ein Teil der Psychologie anzusehen ist, aber Gesichtspunkte und Bestimmungen der Psychologie in sich aufzunehmen oder vorauszusetzen hat."

Im übrigen kann die Ästhetik je nach dem psychologischen Angriffspunkt verschiedene Bedeutung und Stellung zu anderen Lehren annehmen. „Baumgarten, der erste Begründer einer wissenschaftlichen Ästhetik nnd Urheber des Namens Ästhetik (1750), verstand dieselbe ursprünglich als eine Lehre von der sinnlichen Erkenntnis oder Wahrnehmung überhaupt gegenüber der Lehre oder den Lehren von unseren höheren Erkenntnisgebieten." Er hat aber ebenso wie seine Nachfolger diese Lehre „wesentlich auf Gegenstände und Verhältnisse des Gefallens und Mißfallens, der Schönheit und Kunst, aus diesem oder jenem Gesichtspunkte" eingeschränkt. Es scheint nnn angemessen, „die Ästhetik in weitester Fassung als eine Lehre vom Gefallen und Mißfallen am Gegenständlichen oder von den Gegenständen, insofern sie Gefallen oder Mißfallen zu erwecken vermögen, zu erklären; vorbehaltlich einer Beschränkung dieser weitesten Fassung, die sich noch nötig machen wird, nm mit der hergebrachten Beschränkung der Ästhetik in Einstimmung zu bleiben." Gefallen und Mißfallen ist aber an die einfachen, nicht weiter analysierbaren Bestimmungen der Lust und Unlust geknüpft. „Wir sagen überhaupt, daß uns etwas gefällt oder mißfällt, je nachdem es unserer Vorstellung oder Betrachtung dargeboten derselben einen lustvollen oder unlustvollen Charakter erteilt."

„Es kann sein, daß uns etwas gefällt oder mißfällt, ohne daß wirklich im Bewußtsein deutlich ausgesprochene Lust oder Unlust dabei ist; dann nämlich, wenn die Lust oder Unlust, nach einem kurzen Ansdruck, unter der Schwelle bleibt, d. h. [wenn] eine Ursache da ist, welche sie hervorzutreiben streht, die aber nicht stark genug ist, sie mit positivem Werte wach

zu rufen, indem nach einem allgemeinen psychologischen Gesetze von wichtigstem Eingriffe in die Ästhetik, welches sich auf Lust und Unlust erstreckt, jede Ursache, welche durch ihre Qualität befähigt ist, eine Empfindung ins Bewußtsein zu rufen, doch erst einen gewissen Grad der Wirkungsstärke dazu übersteigen muß; bis dahin nennen wir die Empfindung eine unbewußte oder Empfindung unter der Schwelle. Auch das sog. Unbewußte aber wirkt etwas im Bewußtsein (so lange nicht das ganze Bewußtsein überhaupt unter der Schwelle ist, wie im Schlafe), indem es, ohne für sich selbst die Schwelle zu übersteigen und hiermit in seiner Eigenheit für sich spürbar zu sein, als Mitbestimmung des Bewußten zu dessen Erhebung über die Schwelle etwas beiträgt und hiermit zum Charakter desselben etwas beiträgt, wonach wir vom lustvollen oder unlustvollen Charakter einer Vorstellung sprechen, sei es, daß die Lust oder Unlust dabei über oder unter der Schwelle ist."

Die Ästhetik tritt in oberste Abhängigkeit von der Gefühlsseite, nämlich der Fähigkeit des Geistes durch Lust nnd Unlust bestimmt zu werden, vielmehr als von der Erkenntnisseite. Bei den Darstellungen der Ästhetik, welche von Baumgarten, Kant, Schelling, Hegel ausgegangen sind, wird das Gefallen und Mißfallen, die Lust und Unlnst nur als beiläufiges Zeichen oder Nebenprodukt, nicht als Grundmoment des Ästhetischen angesehen. Bei Herbart tritt das Schöne und Häßliche, das Löbliche und Schändliche als Aufgabe der allgemeinen Ästhetik auf; und das Kennzeichen des Ästhetischen wird darin gesncht, daß es objektiv unwillkürlich gefällt oder mißfällt. „Inzwischen, da er nicht auf die Abhängigkeit des Gefallens und Mißfallens von Lust und Unlust zurückgeht, so wird er auch durch seine Auffassung der Ästhetik keineswegs auf eine für die Ästhetik fruchtbare allgemeine Untersuchung der Verhältnisse und Gesetze des Gefallens und Mißfallens, sondern abgesehen von beiläufigen Folgerungen in seiner Psychologie nur znr dogmatischen Aufstellung seiner ethischen Musterbegriffe geführt, welche für die Ethik eine größere Bedeutung haben als für die Ästhetik in dem hergebrachten und auch hier nach der weiterfolgenden Beschränkung festgehaltenem Sinne."

„Dabei ist immer festzuhalten, daß die Ästhetik eben nur ihren psychologischen Anknüpfungspunkt in der Gefühlsseite des Geistes zu finden, nicht aber in der psychologischen Be-

Digitized by Google

trachtung ihrer Verhältnisse aufzugehen hat, um nicht mit einem Teile der Psychologie selbst zusammenzufallen. Vielmehr faßt sie die Welt der Objekte ins Auge, wofern sie geeignet sind, durch ihr Verhältnis zum Innern, ihre Einwirkung auf das Innere, Lust und Unlust und hierdurch Gefallen oder Mißfallen zu erwecken."

Es beschränkt sich aber die Aufgabe der Ästhetik nach ihrer hergebrachten Fassung noch weiter durch eine Teilung der Aufgabe mit der Ethik aus folgendem Gesichtspunkte.

„Nicht bloß das Angenehme und Schöne, auch das Gute, Nützliche, Zweckmäßige kann gefallen und das Gegenteil davon mißfallen; für das Angenehme und Schöne aber ist es wesentlich, um seinen Begriff zu erfüllen, daß es durch einen unmittelbaren Lusteindruck gefällt, oder die Eigenschaften hat, die es dazu fähig machen; nicht so für das Gute, Nützliche, Zweckmäßige, was uns freilich bei rechter Überlegung seiner Natur, Folgen und Zusammenhänge auch gefallen wird, aber nicht deshalb, sondern abgesehen davon wegen seiner, das Glück oder aus höheren Gesichtspunkten Heil der Welt überhaupt fördernden Folgen und Zusammenhänge selbst gut, nützlich, zweckmäßig heißt, gleichviel ob es die Eigenschaft hat, unmittelbar zu gefallen oder nicht. Die Ästhetik nun befaßt sich bloß mit den Gegenständen und Verhältnissen eines unmittelbaren Wohlgefallens und Mißfallens, also dem Schönen und Angenehmen und seinem Gegenteil, was nicht ausschließt, das Gute, Nützliche, Zweckmäßige in die Betrachtung der Ästhetik insoweit mit aufzunehmen, als es sich mit solchen objektiven Zeichen seines Wertes darstellt, daß ein unmittelbarer Lusteindruck und hiermit ein unmittelbares Wohlgefallen dadurch entsteht, indem hiermit das Gute, Nützliche zugleich schön oder angenehm wird."

So scheidet sich Ästhetik und Ethik im Gegensatze zu Herbart. — Sofern nun Lust und Unlust im niederen oder im höheren geistigen Gebiete zum Vorschein kommen kann, lassen sich auch niedere und höhere ästhetische Eindrücke unterscheiden; doch ohne scharfe Scheidung. Überdies gibt es Verhältnisse und Gesetzlichkeiten, die sich gemeinsam über das niedere und höhere Gefallen erstrecken. Auch kann die niedere, selbst die sinnliche Lust im Zusammenhang mit Bedingungen höherer Lust sehr wesentlich das vom Schönen erweckte Lustgefühl verstärken. „Hiernach erscheint es zweckmäßig, den Begriff und die Aufgabe

einer so allgemeinen Ästhetik aufzustellen, daß die Betrachtung der Gegenstände und Verhältnisse des niederen und höheren Gefallens gleich sehr zu ihrem Rechte darin kommt; ihr einen allgemeinen Teil zu geben, der das enthält, was für das ganze Gebiet gemeinsam maßgebend ist; hiernach aber dieselbe in einen niederen und höheren Teil zu spezialisieren, für deren Unterscheidung als annehmlichster Gesichtspunkt unterzulegen sein möchte, daß man in der niederen Ästhetik soweit in der Betrachtung der Beziehungen und Verhältnisse geht, als sie nicht zu hoch aufsteigen und zu verwickelt werden, kurz elementar genug sind, um noch einer zugleich klaren und erschöpfenden Analyse und Unterordnung unter bestimmte Regeln des Gefallens und Mißfallens fähig zu sein; in der höheren aber auf die Betrachtung der in der Natur und Kunst dargebotenen Kombinationen eingeht, welche zwar die Unterordnung unter allgemeine ästhetische Prinzipien zulassen und fordern, ohne aber einer gleich erschöpfenden Analyse fähig zu sein, wobei immer zuzugestehen ist, daß hierin, wie in allen Relationen, eine strenge Abgrenzung nicht zu finden."

Zur niederen Ästhetik würden gehören: Regeln des Taktes, des Rhythmus, des Versmaßes, des Reimes, die Lehre von den musikalischen Konsonanzen und Dissonanzen, Regeln der sog. Farbenharmonie, ästhetische Beurteilung der Symmetrie, der Wellenlinie, des goldnen Schnitts, Bevorzugung von gewissen Dimensions- und Abteilungsverhältnissen; angenehme und unangenehme Geschmacks-, Geruchs-, Tasteindrücke. Eine solche niedere Ästhetik gibt es in abgesonderter Darstellung nicht; wohl aber kommen Einzelheiten derselben in ästhetischen Lehrbüchern vor. Die exakt behandelte elementare Ästhetik kann als Zweig der äußeren Psychophysik betrachtet werden, da es sich um exakte Feststellung der Gesetze und Verhältnisse der Wirkungen der materiellen Außenwelt auf die Seele handelt, sofern Lust und Unlust in Frage kommt. — Die höhere Ästhetik hat das Gebiet des Schönen in Natur und Kunst zum Gegenstande.

Hier handelt es sich um die allgemeine Ästhetik.

II. Kap. Historische und literarische Notizen. Im Altertum findet sich erst die Betrachtung des einzelnen, was in die Ästhetik gehört. „Der schaffende Künstler war zugleich der betrachtende. So weiß man, daß Sophokles über den Chor, Polyklet über die Proportionen, Apelles über die Malerei geschrieben

hat. Allmählich jedoch ging die Betrachtung der Schönheit und Kunst von den Künstlern zu den Philosophen, als wie Sokrates, Platon, Aristoteles, Plotin über. Das Wesen der Kunst setzt Platon in die Nachahmung und weist ihr eine verhältnismäßig niedrige Stelle an. Aristoteles fordert nicht nur Wiedergabe der Natur, sondern reinigende und idealisierende Wiedergabe; demgemäß stellt er die Kunst über die Natur. Den ersten Versuch, die Ästhetik philosophisch zu begründen, macht Baumgarten. Von seiner Ästhetik sind die beiden ersten Teile über Poesie und Beredsamkeit (1750; 1758) erschienen. Seitens der neueren Philosophie sind die Einflüsse von Kant, Schelling, Hegel und deren Nachfolger (Schiller-Kant; Solger-Schelling; Weiße, Vischer, Rosenkranz-Hegel) über den Kreis der philosophischen Schulen herausgedrungen, wogegen weder von Herbarts noch Krauses noch Schopenhauers Auffassungen, soweit sie ihnen eigentümlich sind, etwas über die Schulen dieser Philosophen hinaus zu lebendiger Geltung gekommen ist." Von der philosophischen Behandlung abgesehen haben Winckelmann, Lessing und die beiden Schlegel durch ihre Kunstbetrachtungen auf die herrschende Weise der Kunstbetrachtung gewirkt, und Herder hat sich lebhaft an den Verhandlungen über Schönheit und Kunst beteiligt. Gegenwärtig überwiegt die in Schelling und Hegel wurzelnde Richtung. Es fängt aber neuerdings auch eine mehr empirische oder realistische (von jeher in England vorherrschende) Richtung an durch Oerstedt, Köstlin, Kirchmann, Zimmermann, Lotze, von Hartmann Geltung zu beanspruchen.

III. Kap. Doppelte Behandlungsweise der Ästhetik. Die Ästhetik von unten und von oben. Man kann die Ästhetik von oben herab „von irgendwie geschöpften, allgemeinen Ideen, Ansichten, Begriffen über die göttlichen und menschlichen, geistigen und materiellen Dingen ausgehend" bearbeiten oder auch von unten herauf, indem man von erfahrungsmäßigen Tatsachen und Verhältnissen aus die ästhetischen Begriffe entwickelt. Beide Wege sind gangbar, und jeder hat seine besonderen Vorteile. „Der erste, bisher vorzugsweise betretene Weg gibt von vornherein das Ziel, dem man auf dem anderen erst zustreben muß, den allgemeinsten Blick, die höchsten Gesichtspunkte; setzt aber, um zu befriedigen, ein vollendetes philosophisches und selbst theologisches System voraus, was wir noch nicht haben, läuft Gefahr, von einseitigen Gesichtspunkten aus der Ästhetik eine

einseitige Richtung oder von abstrusen Gesichtspunkten aus eine abstruse Fassung zu geben und vermag nicht leicht zu einer klaren Orientierung über die Gründe des Gefallens und Mißfallens im einzelnen herabzusteigen; auch sind die Nachteile in allen bisherigen, sehr zahlreichen Darstellungen der Ästhetik, welche im Ausgange von Kant, Schelling, Hegel diese Richtung bisher eingeschlagen haben, mehr oder weniger bemerkbar. (Kant in seinem begrifflichen Ausgangspunkte weicht freilich von Schelling und Hegel in ihrem idealen Ausgange sehr ab; doch bleibt es bei beiden ein Ausgang von oben in dem hier betrachteten Sinn.) Der andere bisher weniger bei uns eingeschlagene Weg gewährt oder verspricht hingegen unmittelbar eine klare Orientierung nicht nur im Felde der Begriffe, welche das Gebiet des Gefallens und Mißfallens beherrschen, sondern auch über die Gründe des Gefallens und Mißfallens im einzelnen und näheren; aber man gelangt auf ihm schwer zu allgemeinen Gesichtspunkten und Ideen; bleibt leicht in Einseitigkeiten und Einzelheiten, Gesichtspunkten von untergeordnetem Werte und untergeordneter Tragweite stecken."

Im folgenden sollen die Elemente der Ästhetik von unten auf behandelt werden.

91. Grundbestimmungen über Lust und Unlust (150—334).

IV. Kap. Begriff und allgemeine Verhältnisse der Lust und Unlust. Die Frage, was Lust und Unlust sei, kann nur durch den Hinweis auf Erlebnisse der Lust und Unlust beantwortet werden: ein angenehmer Geschmack und Geruch, das Gefühl von körperlicher Kraft und Gesundheit, die geschlechtliche Empfindung, der Eindruck eines schönen Kunstwerks, das Bewußtsein geliebt, geachtet, geehrt zu werden, der Seelenzustand bei gutem Gewissen, Seelenzustände der Befriedigung, des Wohlgefühls, des Behagens, der Heiterkeit, des Vergnügens, der Freude, des Entzückens, der Seligkeit, der Hoffnung usw. haben bei aller Verschiedenheit doch etwas Gemeinsames, was man als Lust bezeichnet. In ähnlicher Weise ist Unlust den gegensätzlichen Erlebnissen gemeinsam. Lust und Unlust sollen als ästhetische Gefühle bezeichnet werden, da man nicht nur vom Gefühle der Lust und Unlust, sondern auch vom Taktgefühle, dem Gefühl der Wärme und Kälte, vom Urteilen nach dem Gefühle redet. Das Fehlen von Lust und Unlust bedingt einen ästhetisch indifferenten

oder gleichgültigen Zustand. Die Zustände der Lust und Unlust lassen sich nach Grad, Art, Höhe und Wert unterscheiden; sie treten auch in gegensätzliche Beziehung, sodaß man Unlust als negative Lust bezeichnen darf.

V. Kap. Verschiedenheit der Lust und Unlust nach Art und Höhe derselben. Verschiedene Arten der Lust und Unlust sind unterscheidbar unter Hinweis auf die Erlebnisse und Zustände, die uns lustvoll oder unlustvoll erscheinen. Man kann auch auf die mit der Lust und Unlust verknüpfteu Triebe achten, wodurch man zur Untersuchung rezeptiver (bloß mit dem Triebe nach Erhaltung des lustvollen Zustandes verknüpfter) und aktiver (mit einem Triebe zur Selbsttätigkeit in Beziehung stehender) Lust veranlaßt wird. „Die Lust am Wohlgeruch einer Blume, beim Anhören einer schönen Musik ist rezeptiver Art; die Lust am Tanze, an einer nützlichen Tätigkeit, am Gange zu irgend einem lustvollen Ziele aktiver Art." Auch kann die Lust auf der Hebung vorausgegangener Unlust beruhen oder aber unabhängig davon entstehen. — Die Höhe der Lust oder Unlust richtet sich nach der Höhe der geistigen Tätigkeiten, woran sie geknüpft ist. Das ästhetische Gefühl trägt einen um so niedrigeren Charakter, „jemehr es auf einfacher Affektion der Sinne, einfachen Vorstellungen, Wahrnehmungen überhaupt beruht; einen um so höheren, je mehr es auf Auffassung von Beziehungen, Verhältnissen, Verknüpfungen beruht, oder auf der Betätigung, dem Leben des Geistes in solchen beruht und auf je höhere Stufen dieselben steigen." „Die Höhe eines ästhetischen Eindrucks fällt mit der Höhe der darin eingehenden Lust oder Unlust zusammen." „Die höchsten ästhetischen Eindrücke sind solche, in welchen die Beziehungen des höchstens Wesens zur Menschheit und zur Welt überhaupt zur Geltung kommen, da keine anderen Beziehungen von gleich breiter Basis zu gleicher Höhe aufsteigen." Die höhere Lust darf nicht mit größerer Lust oder stärkerer Lust verwechselt werden.

VI. Kap. Quantitative Verhältnisse der Lust und Unlust. Lust und Unlust unterliegen quantitativer Bestimmtheit, sofern Grade und eine mehr oder minder große zeitliche Dauer und räumliche (auf eine Mehrzahl von Individuen sich erstreckende) Ausbreitung der Lust- und Unlustgefühle unterschieden werden können. Es ist hiernach ein intensives und extensives Maß der Lust und Unlust möglich, worauf sich die experimentelle Ästhetik

gründet. (Vgl. die Abhandlung „Zur experimentellen Ästhetik"; Abh. der Math. Phys. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. 9. 1871.)

VII. Kap. Wertbestimmung der Lust und Unlust. „Unter Wert einer Sache versteht man allgemein gesprochen den Maßstab ihrer Güte, wonach die Wertbestimmung der Lust und Unlust mit der Begriffsbestimmung der Güte zusammenhängt." Der hier angenommene Begriff der Güte stützt sich aber darauf, „daß das Gute mit Rücksicht auf seine Folgen und Zusammenhänge förderlich für das Glück des Ganzen ist". So ist denn z. B. auch die Abschreckung beim Bemessen der Strafe wegen ihrer heilsamen Wirkung auf andere als Motiv der Strafe im Gegensatz zu neueren Strafrechttheorien festzuhalten.

VIII. Kap. Frage nach einer allgemeinen Grundbedingung der Lust und Unlust. „Bei der großen Verschiedenheit, ja scheinbaren Imkommensurabilität, welche die Ursachen der Lust und Unlust von verschiedener Art und Höhe zeigen, kann man allerdings fragen, ob überhaupt ein Gemeinsames daraus zu abstrahieren, darin zu finden, was als einheitliche, überall mit sich identische Grundursache der Lust und Unlnst anzusehen. Ein angenehmer Geschmack, ein reiner Ton, eine ansprechende Melodie, ein schlagender Witz, eine Bereicherung unserer Erkenntnis, eine tugendhafte Handlung, eine zweckmäßige Einrichtung können uns alle gefallen, und überall ist Lust der Kern des Gefallens; wie verschieden aber sind diese Ursachen des Gefallens. Ja bald kann Wechsel, bald Ruhe, bald Verbleiben im Gewohnten, kurz das Entgegengesetzteste uns Lust machen und dadurch gefallen. Aber immer kehrt der Gedanke zurück, alle diese verschiedenen Ursachen könnten nicht etwas Gemeinsames zum Resultate haben, wenn sie nicht selbst etwas Gemeinsames hätten." Die Grundursache kann nun entweder in den anderen Seiten des Geistes, mit welchem die Gefühlsseite zusammenhängt, oder in der körperlichen Unterlage des Geistes, oder schließlich unter Voraussetzung einer dualistischen oder monadologischen Grundansicht in dem Verhältnis von Leib und Seele gesucht werden. „Die Frage nach jener Grundursache hat sich aber bisher in keiner der drei Formen zulänglich oder sicher beantworten lassen." Es steht zwar auf Grund der Beziehung der Gefühlsseite zur Seite des Begehrens und Strebens einerseits Lust mit dem Triebe der Erhaltung und Förderung, Unlust mit

dem Triebe der Beseitigung des betreffenden Seelenzustandes in Verbindung. „Hierin aber liegt noch keine vollständige Beantwortung der Frage, weil danach noch die Frage übrig bleibt, welche Bestimmung der dritten Seite des Geistes, der Wahrnehmungs-, Empfindungs-, Vorstellungs-, überhaupt Erkenntnisseite wesentlich ist, um diese Verbindung auszulösen. Was Lust gibt, regt überall an, es haben oder tun zu wollen, sofern nicht Konflikte mit anderer oder größerer Lust oder Unlust es verbieten; aber nun fragt sich doch noch, wie muß die Wahrnehmung oder Vorstellung davon beschaffen sein, damit man zugleich Lust daran oder dazu haben könne." Auch muß die Entstehung der sinnlichen und der höheren Lust zugleich erklärt werden. Die Bestimmung der Lust und Unlust durch Harmonie und Disharmonie, Einstimmung und Widerstreit kann nicht als ausreichend gelten. Ebenso wenig kann Baumgartens Begriff der Vollkommenheit, Kants Begriff der subjektiven Zweckmäßigkeit oder der von vielen gebrauchte Begriff der Freiheit geistiger Tätigkeit den Begriff der Lust ersetzen.

IX. Kap. Beziehung der bewußten Antriebe zu Lust und Unlust. Alle Antriebe bewußten Lebens sind durch eine Beziehung zu Lust und Unlust der Richtung nach bestimmt, indem sie auf Beseitigung von Unlust und auf Erhalten oder Herbeiführen von Lust gerichtet sind. Der Mensch will durch sein Handeln sich so glücklich wie möglich machen. (So sagt Augustin: „nulla est homini causa philosophandi nisi ut beatus sit." Und Pascal sagt: „Alle Menschen wünschen glücklich zu sein; das gilt ohne Ausnahme." Ebenso Lotze: „Die Triebfedern zu allem Handeln sind Festhalten und Wiedergewinn der Lust und Verminderung des Wehe.") Scheidet man Motive und Zweck des Wollens, so kann man sagen, daß alle Motive des Wollens und Handelns Lust- oder Unlustmotive sind, während nicht alles Wollen und Handeln zukünftige Lust und Vermeidung von Unlust zum Zwecke hat.

92. Ästhetische und praktische Kategorien; Schön und Gut (335—571).

X. Kap. Von den ästhetischen Kategorien im allgemeinen. „Insofern Gegenstände einen ästhetischen Eindruck zu machen vermögen, bezeichnet man sie je nach der Art, der Höhe, der Stärke und des Wesens des Eindrucks, den sie machen, oder der Eigenschaft, wodurch sie denselben machen, mit ver-

schiedenen Ausdrücken, die wir als ästhetische Kategorien zusammenfassen und als positive und negative oder Kategorien im Sinne der Lust und im Sinne der Unlust unterscheiden, je nachdem sie zur Bezeichnung von Gegenständen oder Verhältnissen dienen, die einen gefälligen oder ungefälligen, lustvollen oder unlustvollen Eindruck machen." Positive ästhetische Kategorien sind: 1) angenehm, wohlgefällig, harmonisch, hübsch, schön; 2) anmutig, sauber, reinlich, ordentlich, nett, schmuck, fein, zierlich, niedlich, sanft, mild, fließend, reich, herrlich, prächtig, wundervoll, majestätisch, glorreich, würdig, edel, erhaben; 3) befriedigend, annehmlich, ansprechend, anziehend, einnehmend, interessant, unterhaltend, ergötzlich, erfreulich, gemütlich, lieblich, appetitlich, erhebend, reizend, bezaubernd. Die negativen sind die Gegensätze hierzu. Bei der ersten Klasse ist der positive oder negative Charakter ohne Rücksicht auf eine besondere Modifikation des Gegenstandes oder Eindrucks, bei der zweiten Klasse eine Modifikation des Gegenstandes, bei der dritten eine Modifikation des Eindrucks oder des dadurch ausgelösten Strebens bestimmend. Manche Kategorien beziehen sich auf Bestimmungen, die zwischen lustvollem und unlustvollem Charakter schwanken: lächerlich, komisch, ironisch, humoristisch, rührend, sentimental, naiv, grotesk, imposant, tragisch.

XI. Kap. Von den verschiedenen Wegen, die eingeschlagen worden sind, die Schönheit zu erklären. Der Begriff des Schönen beansprucht die Vorherrschaft unter den positiven ästhetischen Kategorien. Er greift über die Ästhetik hinaus, indem er sich den Begriffen des Guten und Wahren anreiht. Die Schwierigkeit, den Begriff des Schönen zu bestimmen, hat manche (z. B. Winckelmann) veranlaßt, auf eine Begriffsbestimmung zu verzichten. Die philosophischen Ästhetiker hingegen werden nicht müde, immer neue Erklärungen oder die alten in immer neuen Wendungen und Formeln anzubieten. „Die Erklärungen des Schönen sind 1) solche, welche den Begriff des Schönen fundamental von der subjektiven Erzeugungsweise des Schönen, gemeinhin der Erzeugungsweise durch göttliche und in ihrem Sinne eintretende menschliche Phantasie abhängig machen, womit dann auch wieder eine Rückwirkung des Schönen auf die Phantasie in Beziehung steht, kurz die das Schöne wesentlich als eine Sache der Phantasie erklären; 2) solche, welche ihn von einer gewissen objektiven Beschaffenheit, der Er-

füllung irgend welcher an das Schöne objektiv zu stellenden Forderung abhängig machen, kurz, welche im Begriff des Schönen das objektive Wesen des Schönen zu bestimmen suchen, als wie: daß das Schöne die sinnliche Erscheinung oder scheinbare Erfüllung, die äußere Darstellung oder Verwirklichung der Idee, insbesondere absoluter oder göttlicher Idee, die vollkommene Ineinsbildung des Idealen und Realen ohne Übergewicht des einen oder anderen Momentes, die Vollkommenheit der sinnlichen Erscheinung oder sinnliche Erscheinung der Vollkommenheit sei, daß sie auf Einheit in der Vielheit, auf subjektiver Zweckmäßigkeit ohne objektiven Zweck beruhe usw.; 3) solche, welche den Begriff des Schönen von der Leistung abhängig machen, die das Schöne als Objekt auf das Subjekt zu äußern hat und welche nach allgemeinstem Zugeständnis auf eine Leistung in Lust, insbesondere höherer Lust hinausläuft." Nun ist unmittelbar faßlich und allgemein anerkannt, daß das Schöne zu gefallen, also eine Leistung in Lust zu gewähren hat. Also wird eine triftige und klare Ausgangserklärung des Schönen nur in Beziehung auf die Leistung in Lust zu gehen sein.

XII. Kap. Der Begriff des Schönen in dem von uns vertretenen Sinne. „Im weitesten Sinne des gemeinen Sprachgebrauchs nennt man überhaupt alles schön, was unmittelbar durch sein Dasein oder die Vorstellung seines Daseins ein Lustgefühl erweckt und vermöge dessen gefällt; sei das Lustgefühl ein niederes oder höheres; sei der Gegenstand, der es erweckt, ein sinnlicher oder abstrakter, ins gegenständliche körperliche, oder ins innere geistige Gebiet fallender." Mit Rücksicht auf den von der Ästhetik einzuhaltenden Sprachgebrauch kommen beschränkende Bedingungen für das Schöne hinzu: „die eine, wodurch es sich vom Abstrakten und überhaupt nur ins innere Gebiet des Geistes Fallenden, was gefällt; die andere, wodurch es sich vom bloß Sinnlichen und überhaupt Niederen, was gefällt; die dritte, wodurch es sich als wahres oder ächtes Schöne von dem unechten Schönen, was ohne das Recht zu gefallen gefällt, unterscheidet".

XIII. Kap. Vorbemerkung zur Betrachtung der praktischen Kategorien. Die praktischen Kategorien, an deren Spitze der Begriff Gut steht, verhalten sich zur Ethik wie die ästhetischen Kategorien zur Ästhetik. Darum bedingt sich die Behandlung der Ethik und die Auffassung des Begriffs Gut und der praktischen

Kategorien wechselweise. „Das ethische System nun, in dessen Sinne der Begriff Gut und die praktischen Kategorien überhaupt hier aufgefaßt und erörtert werden, ist ein eudämonistisches. Es gibt aber zwei Arten des Eudämonismus, einen subjektiven, bei welchem das Absehen oder Trachten auf das eigene Wohl des Individuums gerichtet ist, und einen objektiven, bei welchem das Absehen auf das Wohl des Ganzen, dem sich das Individuum ein- und unterordnet, gerichtet ist. Nur um letzteren Eudämonismus wird es sich hier handeln." Wenn das eudämonistische Prinzip als Grundprinzip der Ethik überhaupt so vielfach angefochten wird, so hängt dies teils daran, daß man den objektiven Endämonismus vom subjektiven nicht recht zu unterscheiden weiß, teils den Begriff der Lust, welcher den Kernbegriff des Wohls, des Glücks, der Glückseligkeit bildet, nicht allgemein und hoch genug zu nehmen weiß, daher für kein würdiges Ziel allgemeinen Trachtens ansieht."

XIV. Kap. Von den praktischen Kategorien. „Positive praktische Kategorien sind: nützlich, vorteilhaft, zweckmäßig, wertvoll, heilsam, gedeihlich, segensreich, gut." Die gegenteiligen Bestimmungen bilden negative praktische Kategorien. Sie beziehen sich auf Bedingungen oder Schädigungsmittel des Wohles einzelner Menschen und Menschenklassen oder der Menschheit überhaupt, und stellen in positivem Sinne Beziehungen dar sowohl für das „was im ganzen mit Rücksicht auf die Folgen Wohlbefinden oder Lust mehrt, Unlust mindert, als was unmittelbar Lust erweckt oder mehrt."

XV. Kap. Begriffsbestimmung des Guten insbesondere. Gut wird im allgemeinen Sinne das genannt, was mit Rücksicht auf seine Folgen zum Wohl und zur Glückseligkeit beiträgt und so den Lustzustand sichert und mehrt oder den Unlustzustand verhütet und tilgt. Im engeren Sinne aber wird nur das sittlich, religiös und göttlich Gute als gut bezeichnet.

XVI. Kap. Sachliche Beziehungen zwischen den ästhetischen und praktischen Kategorien. Die durch Schön und Gut repräsentierten ästhetischen und praktischen Kategorien stehen insofern in Beziehung zueinander, als das Nützliche und Gute sich, um seinen Begriff zu erfüllen, entweder in Angenehmes und Schönes umsetzen oder den Eintritt des Gegenteils verhüten muß. „Das Nützliche und Gute ist wie der fruchtbare Baum, das Schöne und Angenehme wie die vergänglichen

Blüten und Früchte daran. Der Baum ist allgemein gesprochen wertvoller als alles einzelne, was er trägt, obschon er nur durch das, was er trägt, seinen Reiz und Wert gewinnt."

XVII. Kap. Vom Geschmack. Man spricht von verschiedenem Geschmack, je nachdem dem einen dies, dem anderen jenes gefällt oder mißfällt. Man spricht aber von richtigem oder gutem Geschmack, sofern das gefällt oder mißfällt, was gefallen oder mißfallen soll. Dabei ist wesentlich, daß der Geschmack in einem unmittelbaren Gefallen oder Mißfallen besteht, das durch Assoziationen mit dem ästhetisch wirkenden Gegenstande bedingt ist.

93. XVIII. Kap. (einziger Bestandteil des zweiten Teiles). Zusammensetzung nnd Analyse ästhetischer Eindrücke im allgemeinen (572—588). Von einer Zusammensetznng und Analyse ästhetischer Eindrücke kann man zunächst insofern reden, als man bei einem zeitlich oder räumlich ausgedehnten Gegenstande als wie einem Musikstücke, einem Gemälde in Betracht zieht, welchen Beitrag jeder Teil für sich zum Eindruck des Ganzen gibt, und welcher Beitrag aus dem Zusammenwirken der Teile hervorgeht. Man kann sodann außer den Beziehungen zwischen den Teilen eines Gegenstandes selbst auch die Beziehungen der zeitlichen und räumlichen Nachbarschaft beachten und hiernach den von der Nachbarschaft unabhängigen und den von der Nachbarschaft mitbestimmten Eindruck unterscheiden. Die Gegenstände haben ferner Beziehungen „zu einer nicht unmittelbar bei der Betrachtung gegenwärtigen Welt und Zeit, welche den Eindruck durch eine eigentümliche Vermittlung mitbestimmen".

93. Beilagen zum ersten Teile (589—816).

A. Notizen über die Auffassung der Ästhetik seitens Kant, Herbart, Schelling, Hegel, Krause, Schopenhauer und Lotze.

B. Allgemeine Betrachtungen über Zweck und Wert. Zweck und Wert sind nicht ohne Bezugnahme zur Lust genügend zn erklären.

C. Grundprinzipien der Ethik. Das oberste Prinzip der Ethik ist dieses, „daß nur die Größe der Lust, welche zugleich von ihrer Intensität, Dauer und Ansbreitung durch die Welt abhängt, als maßgebend für das Anzustrebende oder Gewollte anzusehen sei, die Art und Höhe der Lust aber nur insofern als

maßgebend zuzuziehen sei, als sie zugleich maßgebend für die Größe ist".

D. Spezielle kritische Bemerkungen über die verschiedenen Wege der Schönheitserklärung.

94—101. Kleinere Abhandlungen zur Ästhetik.

94. Einladung zum Eintritt in die Ästhetik (1—14). Gründe, die eine Beschäftigung mit der Ästhetik veranlassen können, sind: 1. der denkende Mensch wünscht die Gründe des Gefallens und Mißfallens zu kennen; 2. die Kategorien, denen sich das Gefallen und Mißfallen unterordnet, bedürfen einer bestimmten Festsetzung und Klärung; 3. Gründe für die Güte des Geschmacks sind unerläßlich, um eine Entscheidung bei differierenden Geschmacksurteilen zu ermöglichen; 4. die Ästhetik bildet einen wesentlichen Teil der Philosophie, so daß aus philosophischen Gesichtspunkten eine Beschäftigung mit der Ästhetik geboten ist; 5. die verstandesmäßige Ergründung der ästhetischen Wirkung eines Kunstwerkes bietet neue Anregungen für den ästhetischen Genuß.

95. Vergleichende Betrachtungen über die künstlerische Auffassung und Darstellung Gottes im Schöpfungswerke von Raphael in den Logen des Vatikans und von Michelangelo in der Sixtinischen Kapelle (1—25).

96. Allgemeine Betrachtungen über den ästhetischen Wert der Symmetrie (1—122).

97. Betrachtung spezieller Anwendungen der Symmetrie und Pyramidalität in der bildenden Kunst (1—121). An verschiedene Kunstwerke unmittelbar sich anschließende Betrachtungen.

98. Analyse der menschlichen Schönheit (1—57). Neben direkten und instinktiven Bedingungen muß wesentlich das Assoziationsprinzip zur Erklärung des Gefallens an der Menschengestalt herangezogen werden.

99. Ästhetisches bezüglich der Maße des menschlichen Körpers (1—35).

100. Zur Ästhetik der Träger (1—29). Es handelt sich um Gesichtspunkte des Geschmacks in Anwendung auf Personen, Gegenstände, oder Teile von Gegenständen, die etwas zu tragen haben. „Sehr häufig, insbesondere im Gebiete der Archi-

Digitized by Google

tektur und Tektonik kommt es vor, daß ein Teil, der wesentlich bestimmt ist als Träger oder Stütze eines anderen, eines Hauptteils zu dienen, zugleich dem Ganzen zur Zierde oder Charakteristik dienen soll, wobei sich manche Geschmacksrücksichten geltend machen können, die wir an Beispielen ihrer Verletzung erläutern wollen."

101. Prinzipien der Verzierung (1—76). 1. Vorbemerkungen. 2. Maßprinzipien der Verzierung. Die Verzierung muß im Einklang mit der Idee des Gegenstandes, an dem sie angebracht ist, stehen; sie muß Maß halten. 3. Artprinzipien der Verzierung. Kannelüren, Randstreifen und andere einfache Verzierungen. Verzierungen aus organischen Formen.

102. Notizen über Stil und Manier (1—49); über wohlgefällige Verhältnisse (1—41); über das Prinzip der einfachen rationalen Verhältnisse (1—59); über Schwingungsverhältnisse musikalischer Töne und den goldenen Schnitt (1—6); über das Prinzip des goldenen Schnitts nach Zeising (1—34).

103. Notizen über Naturschönheit und Eindrücke von Landschaften (1—30), über den ästhetischen Charakter der Vokale (1—6). Bemerkungen über Bedingungen der Lust und Unlust (1—26), über die Wellenlinie (1—58). Zur Platzfrage des Siegesdenkmals zu Leipzig (1—15).

104. Einzelne Kapitel zur Echtheitsfrage der Holbeinschen Madonna (1—200).

Naturphilosophie.

I; 105—111. K; 112—116. L; 117—120. M; 121—125. N; 126—130.

105. Einleitung in die Naturphilosophie (1—257).

I. Allgemeine Vorbegriffe. „Eine Einleitung in die Naturphilosophie hat die Stellung, welche dieselbe im Gebiete der Wissenschaften überhaupt einnimmt, die Prinzipien ihrer Entwicklung, die allgemeinsten Aufgaben und Gesichtspunkte, welche sich in derselben darbieten, darzulegen und in letzterer Hinsicht zwar eine vorläufige Kenntnis ihres Inhaltes zu erwecken, ohne jedoch eine Erledigung der Aufgaben und weitere Ausführung der Gesichtspunkte derselben bezwecken zu können." In erster Linie ist der Begriff der Naturphilosophie festzustellen, der

„natürlicher Weise aus dem Begriffe der Philosophie, der sich die Naturphilosophie formalerseits unterordnet, und dem Begriffe der Natur, auf die sie sich materialerseits bezieht", folgt. Dabei ist die Vieldeutigkeit des Begriffes der Natur zu beachten. Man kann nämlich unter Natur 1. die wesentlichen Eigenschaften eines Dings, 2. im Gegensatze zum Geiste „die materielle, sinnliche, objektive äußere Erfahrungswelt, die uns alle umgibt", verstehen. In beiden Fällen bezeichnet Natur „den Grund des Entstehens", was mit dem Ursprung des Wortes (aus nasci) übereinstimmt. „Der Inbegriff der wesentlichen Eigenschaften eines Dinges ist das, woraus man alle Wirkungen und Erscheinungen desselben hervorgehend denkt, und Natur im zweiten Sinne ist das, woraus nicht nur Menschen, Tiere, Pflanzen, sondern alle sinnlichen Erscheinungen überhaupt hervorgehen." Im Gegensatz hierzu ist der Geist das Selbsttätige, worauf der Zusammenhang von genius, ingenium mit gignere deutet. Damit steht in Einklang, daß man auch im Gegensatze zur „Kunst, Konvenienz, Kultur, kurz allem, was mit bewußter Absicht hervorgebracht worden ist", von Natur redet. — Für die Naturphilosophie kommt der an zweiter Stelle bezeichnete Begriff der Natur in Betracht. Indem so Natur und Geist einander gegenüber treten, bleibt es zunächst zweifelhaft, ob das Gegenüber ein äußeres oder inneres sei. Hierbei ist nicht außer Acht zu lassen, daß die Natur nicht auf das, was wir unmittelbar durch die Sinne wahrnehmen, beschränkt ist, sondern über das subjektive Sehen und Tasten hinausgeht. Nimmt man nun an, daß „der Gesamtheit der Naturerscheinungen ein dunkles, an sich unerkennbares Grundwesen, ein Wesen an sich, zugrunde liege, was nur einen Eindruck in unseren Geist mache", so liegt ein äußeres Gegenüber vor. Nimmt man dagegen an, daß die in unserem Geiste auftretenden Naturerscheinungen mit unserem Geiste in einen größeren, den allgemeinen göttlichen Geist aufgenommen seien, aus dem die Naturerscheinungen insgesamt fließen, so handelt es sich um ein inneres Gegenüber. „Mag nun ein dunkles Ding hinter den Naturerscheinungen sein, oder mögen die Naturerscheinungen in ihrer Totalität die Natur selbst sein; gewiß bleibt, daß uns die Natur bloß durch ihre Erscheinung gegeben ist." Daß aber diese Erscheinungswelt eine Naturphilosophie veranlaßt, ist durch die Bedürfnisse des denkenden Menschen bedingt. Und diese Bedürfnisse haben in sehr verschiedenartiger Weise ihre Befriedigung gefunden. „Bei den ver-

schiedenen Gestaltungen der Naturphilosophie kommt materialerseits insbesondere die Verschiedenheit der teils koordinierten, teils ineinander übergreifenden materialistischen, spiritualistischen, realistischen, dualistischen, Identitäts- und monadologischen Ansichten, formalerseits der Unterschied in Rücksicht, ob die allgemeinsten, höchsten, letzten Gesichtspunkte vielmehr a priori oder durch Induktion und Analogie auf Grund der Erfahrung festzustellen sind.

II. Aufgabe der Naturphilosophie. „Als Philosophie hat die Naturphilosophie nicht bloß eine Beschreibung der einzelnen Naturgegenstände und Naturerscheinungen zur Aufgabe, ein Sammeln und Vorführen dessen, was sich den Sinnen auf dem Gebiete der materiellen Existenz darbietet, das wir unter Natur verstehen, sondern vielmehr eine Betrachtung des gesamten Naturgebietes nach allgemeinsten Beziehungen, aus allgemeinsten, höchsten und letzten Gesichtspunkten, welche Gesichtspunkte teils begrifflicher, teils faktischer Natur sind, teils die über die Natur übergreifenden Beziehungen derselben zum Geiste, teils innere Beziehungen der Natur betreffen.“ Hauptgegenstände der Naturphilosophie sind hiernach „der Begriff der Natur nnd sein Verhältnis zum Begriff des Geistes, die allgemeinsten faktischen Beziehungen des Geistes und hiermit Gottes zur Natur, die allgemeinsten Begriffsbestimmungen, Verhältnisse, Gesetze und Kräfte der Natur selbst“.

III. Die Stellung der Naturphilosophie im philosophischen System. Das Geistige und Körperliche werden bei jedweder Ansicht über das letzte Wesen der Dinge unterschieden. Sonach gibt es eine Geistes- und eine Naturphilosophie, die in den verschiedenartigsten Verhältnissen zueinander stehen können.

IV. Die Stellung der Naturphilosophie zur Theologie und den Naturwissenschaften. Insofern die Naturphilosophie alle allgemeinsten Verhältnisse und Beziehungen der Natur in Betracht zu nehmen hat, wird sie auch notwendig auf die wichtige Frage geführt, ob mit der Natur im allgemeinen und ganzen, sei es in demselben oder auch einem anderen Sinne ein Geist oder eine Seele in Beziehung stehe, als dies tatsächlich von vielen einzelnen Körpern innerhalb der Natur, unserem eignen oder dem tierischen Körper insbesondere gilt; hiermit auf die Frage nach dem Dasein und der Daseinsweise eines allgemeinen oder göttlichen Geistes in bezug zur Natur. Hierdurch tritt die Naturphilosophie in Beziehung zur Theologie. Indem sie aber

auch mit den inneren Verhältnissen der Natur als einer Welt des Körperlichen sich zu beschäftigen hat, gewinnt sie von einer anderen Seite Beziehung zu den Naturwissenschaften."

V. Formalprinzipien der Naturphilosophie. Die Naturphilosophie ist im Gegensatz zu den sicher und stetig sich entwickelnden Naturwissenschaften zu keinen sicheren Ergebnissen gelangt. „Insbesondere sind den neuen Gestaltungen, welche die Naturphilosophie durch Schelling, Hegel und die von ihnen ausgegangenen, wenn auch über sie hinausgegangenen Philosophen gewonnen haben, nach formaler Hinsicht folgende Punkte vorzuwerfen."

1. Der psychisch-theologische Teil der Naturphilosophie, welcher von den Beziehungen der Natur zu Gott handelt, und der physische oder naturwissenschaftliche Teil derselben, welcher die inneren Beziehungen der Natur als einer Welt körperlicher Dinge behandelt, werden in kein klares Verhältnis gestellt. 2. Die Unterordnung der Dinge und Verhältnisse unter unbestimmte Allgemeinbegriffe (wie Idealität, Stabilität, Individualität, Polarität, Punktualität, Potenz usw.) macht die Darstellung abstrus und unverständlich. 3. Über den begrifflichen Beziehungen und Ableitungen der Dinge werden die naturgesetzlichen vernachlässigt. 4. Nicht minder werden über den qualitativen Beziehungen der Dinge die quantitativen vernachlässigt. 5. „Das an sich unklare und der willkürlichen Auslegung und Verwendung Raum gebende Prinzip der Schellingschen Philosophie, daß jedes Ding und Wesen seinem letzten Grunde nach dasselbe wie das andere, nämlich eine Selbstevolution des Absoluten nur auf anderer Stufe oder mit einem anderen Verhältnis der Idealität und Realität sei, sowie das entsprechenden Mängeln unterliegende Prinzip der Hegelschen Philosophie, daß jedes Konkrete denselben Begriff nur auf einer anderen Stufe dialektischer Entwicklung darstelle, hat zu einem wegen der Leichtigkeit der Handhabung und Verfolgung verführerischen, aber gänzlich leeren und aller bindenden Kraft ermangelnden, daher bei jedem anders sich gestaltenden Formalismus Anlaß gegeben."

Der Grund dieser Mängel liegt, allgemein gesagt, darin, daß von Seiten der Philosophen aprioristische Prinzipien zugrunde gelegt werden, während die Naturwissenschaften sich an die Erfahrung halten. Dabei wird es als aprioristisch bezeichnet, wenn man „aus dem Begriff einer Sache die wesentlichen Bestimmungen und Verhältnisse der Sache" ableitet. Es fehlt aber an einem

hinreichenden Begriffe der Natur und an einer sicheren Methode, Folgerungen aus diesem Begriffe abzuleiten. „Als das Triftigste erscheint uns hiernach, in der Gestaltung einer Naturphilosophie den Gedanken und Blick auf die Gewinnung allgemeinster, höchster und letzter Gesichtspunkte fortgehend zu richten, um hierdurch dem Begriffe der Philosophie zu genügen, was seitens der Naturforscher im allgemeinen nicht geschieht; diese Gesichtspunkte aber durch möglichst allgemeine Bearbeitung des erfahrungsmäßigen Gebietes mit ausgedehnter Benutzung des logischen und Erfahrungsschlusses zu gewinnen, was seitens der Philosophen insgemein nicht geschieht; dabei sich vor vorschnellen Verallgemeinerungen und bloß rohen Analogien zu hüten und dem Grade der Unsicherheit, der nach den zu Gebote stehenden Schlußunterlagen und Schlußmitteln noch übrig bleibt, Rechnung zu tragen."

VI. Einteilung der Naturphilosophie und Verhältnis ihrer Hauptteile. Die Naturphilosophie zerfällt in drei Hauptteile: den logisch-metaphysischen, den theologisch-psychologischen, den naturwissenschaftlichen oder physischen Teil. „Der logisch-metaphysische Teil hat sich mit Begriff und Wesen der Natur und deren Verhältnis zum Begriff und Wesen des Geistes zu beschäftigen. Der theologisch-psychologische Teil hat sich mit den faktischen Beziehungen des Geistes zur Natur, der Frage nach dem Dasein und Walten eines Geistes in der Natur, der Frage nach der Ausdehnung des Seelenreiches durch die Natur und den allgemeinsten Verhältnissen und Gesetzen der Beziehung zwischen Leib und Seele zu beschäftigen. Der naturwissenschaftliche oder physische hat die allgemeinsten, faktischen Verhältnisse und Gesetze der Natur in Betracht zu ziehen."

Es ergeben sich demnach folgende [einer eingehenden Ausführung entbehrende] Abschnitte:

VII. Logisch-metaphysischer Teil.
VIII. Theologisch-psychologischer Teil.
IX. Physischer Teil.

106. Physische Naturphilosophie (1—271).

I. Einleitung. Es soll hier derjenige Teil der Naturphilosophie behandelt werden, der sich „mit den allgemeinsten Verhältnissen oder Gesichtspunkten, die für die Natur als Erfahrungsobjekt abgesehen von ihren Beziehungen zum Geiste gelten, zu beschäftigen hat". Genauer läßt er sich „als eine

oberste verknüpfende Wissenschaft aller einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen bezeichnen, welche sich als solche zur Aufgabe macht, die denselben gemeinsamen Formalprinzipien und Grundbegriffe zu erörtern, die allgemeinsten Unterschiede und davon abhängigen Einteilungsgründe der Natur nnd Naturwissenschaft einerseits und die zwischen den Teilgebieten derselben bestehenden Gesichtspunkte der Verknüpfung andererseits darzulegen, die allgemeinsten Gesetze und letzten Elemente der Natur aufzuzeigen und der Betrachtung zu unterziehen — dies alles, soweit es mittels eines Eingehens unseres betrachtenden, kombinierenden, schließenden Geistes in die Erscheinungen und Verhältnisse der Natur unter Dahinstellung des metaphysischen Grundes von all dem und ohne Verfolg ihrer Beziehung zum Geiste geschehen kann." Es beschränkt sich indessen die hier gegebene Bearbeitung dieses Gebietes darauf, „den Stoff der Naturphilosophie übersichtlich und im Zusammenhange darzulegen und nach solchen Beziehungen zu erörtern, bei welchen Klarheit am meisten vermißt wird oder welche der Diskussion am meisten unterliegen." Eine Naturbetrachtung ohne Rücksicht auf den Geist scheint allerdings von vornherein undurchführbar, wenn man Eingriffe des Geistes auf die Natur voraussetzt. „Allein eine nähere Betrachtung lehrt, daß alle geistigen, psychischen Tätigkeiten, Wirkungen, Kräfte, welche sich im organischen Gebiete äußern und folgweise in die unorganische Außenwelt hinüberwirken, selbst schon wesentlich an zugehörige körperliche Tätigkeiten, Wirkungen, Kräfte geknüpft sind, mit welchen die Erfolge im körperlichen Gebiete in Nexus gedacht werden können." Es erhebt sich aber noch die Frage, ob nicht der Geist doch durch die besondere Art seiner Gesetzlichkeit oder auch durch die ihm zukommende Freiheit ein Durchbrechen des Kausalnexus bedinge. Da über diese Frage, die zu den strittigsten allgemeinen Fragen der Naturphilosophie gehört, hier nicht entschieden werden kann, so muß der Grundsatz genügen, daß „der Kausalnexus in der Natur soweit in sich 1) ohne Rücksicht auf den Geist, 2) ohne Rücksicht auf etwaige Unterbrechungen der Gesetzlichkeit durch Freiheit verfolgt werde, als er verfolgt werden kann, und somit auch die Erklärung aus materiellen Gründen nach Gesetzen des materiellen Geschehens soweit geschehe, als es geschehen kann".

II. Von der Natur im allgemeinen. Durch die äußeren Sinne gelangen wir zu einer Summe von Erscheinungen in zeit-

lich-räumlicher Verknüpfung, in der sich uns das von der Natur Erfahrbare darbietet. „Nun wird zwar unter Natur nicht der Inbegriff der Erscheinungen verstanden, sondern gemeinhin ein objektiver, über die subjektive Wahrnehmung des einzelnen hinausgehender Grund dieser Erscheinungswelt als Natur statuiert; da aber derselbe doch nur durch die davon abhängigen sinnlichen Erscheinungen in unsere Erfahrung tritt, so ist auch die Natur als Erfahrungsobjekt mit äußerer sinnlicher Erfahrungswelt als gleichbedeutend anzusehen und hier aus diesem Gesichtspunkte zu behandeln.“ Es gehört aber nicht bloß dasjenige zur Natur, was jeder von seinem Standpunkte aus mit seinen Sinnen wahrnimmt, sondern auch das, was mit Hilfe besonderer Unterstützungsmittel der Sinne (Mikroskop und Fernrohr) wahrgenommen werden kann und was nach „Schlüssen, die sich auf die gesetzlichen Beziehungen der Erscheinungen gründen“, bei unbegrenzter Verfeinerung der Sinne wahrgenommen werden würde. „Kurz, nicht das einzelne, was wirklich in die äußere Erscheinung tritt, sondern, was in den gesetzlichen Nexus der Erscheinungen eintritt, da hinein gehört, ist zu den Bestimmungen der Natur zu rechnen und der gesetzliche Nexus der äußeren sinnlichen Erscheinungswelt als wesentlich zu ihrem Begriffe zu rechnen, sowohl um mit dem geläufigen Begriffe der Natur in Übereinstimmung zu bleiben, als in demselben eine geeignete Unterlage für die naturwissenschaftliche und philosophische Behandlung zu finden.“ Als Grundbestimmungen der Natur bieten sich die Formen des Raumes und der Zeit dar nebst dem die Materie charakterisierenden Inhalt der sinnlichen Wahrnehmung, soweit sie von allen Beobachtern in völlig oder nahezu übereinstimmender Weise festgestellt werden. Abnorme Auffassungen sind auch Darbietungen der Natur, die jedoch als singuläre erkennbar sind.

III. Raum, Zeit, Materie. „Für jeden einzelnen treten Raum und Zeit nur als subjektive Formen seiner Anschauung in die Erfahrung; aber indem sie für alle Geister als solche auftreten, werden sie eben hiermit zu allgemein gültigen wesentlichen Bestimmungen der Natur als gemeinsamer, äußerer Erscheinungswelt, wobei es für den Standpunkt, den die Naturphilosophie hier zu vertreten hat, dahingestellt bleiben kann, inwiefern dem Wesen der Natur, was man etwa hinter der Erscheinung noch suchen mag, auch noch Raum und Zeit als Formen beigelegt werden können, oder was diesen Formen in

einem Reiche etwaiger Dinge an sich entspricht." „Auch die Materie tritt für jeden einzelnen nur als Inhalt seiner subjektiven, sinnlichen Wahrnehmung in die Erfahrung; insofern sich aber die Wahrnehmungen der verschiedenen Geister in einem gesetzlich zusammenhängenden Inhalt der sinnlichen Wahrnehmung begegnen, gewinnt hiermit die Materie in demselben Sinne objektiven Charakter wie Zeit und Raum." Den Grund des Daseins und der wesentlichen Verhältnisse von Zeit, Raum und Materie hat noch keine Metaphysik „klar zu machen vermocht, wenn schon es viele unklare Versuche dazu gibt". Wohl aber hat die Mathematik auf die Grundbestimmungen von Zeit, Raum und Materie „ein Gebäude zusammengesetzter Bestimmungen zu gründen vermocht". Reine Extension, absolute Kontinuität, vollkommene Gleichförmigkeit, unendliche Teilbarkeit sind gemeinsame Eigenschaften von Zeit und Raum. Die Zeit ist aber ein Nacheinander mit nur einer Richtung, in welchem es Verschiedenheiten der Größe und Lage gibt; der Raum ein Nebeneinander mit drei aufeinander senkrechten Hauptrichtungen mit Unterschieden an Gestalt, Größe und Lage. „Der Begriff der Materie gründet sich des näheren darauf, daß die äußeren, sinnlichen Wahrnehmungen nicht nur desselben Subjekts zu verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen Sinnen, sondern auch verschiedener Subjekte in betreff ihres qualitativen Inhalts so gesetzlich zusammenhängen, daß ein Bedürfnis entsteht einen festen Begriff zur Bezeichnung oder als Träger dieses Zusammenhangs vieler verschiedener sinnlicher Erscheinungen aufzustellen oder, wie wir es kurz ausdrücken können, denselben [den Zusammenhang] begrifflich zu hypostasieren, was nun eben durch den Begriff der Materie geschieht."

IV. Naturgesetz; ursächliche und Wirkungsbeziehung. „Wir sagen, daß etwas gesetzlich erfolge, wenn es bei Dasein gegebener und Ausschluß anderer Umstände, die noch auf den Erfolg Einfluß haben könnten, immer in derselben Weise erfolgt, und mit gegebener Abänderung der Umstände sich in gegebener Weise abändert." Die Umstände sind die Bedingungen oder Ursachen des Erfolgs, und der Erfolg ist die Wirkung der Ursache. „Der Begriff der Ursächlichkeit hängt also wesentlich von dem Gesetzesbegriff ab." So kann auch unser Wille nur insofern als Ursache gelten, als „mit dem Dasein des Willens, dem Dasein der übrigen Umstände, welche der Wille zu seiner Verwirklichung braucht, und dem Ausschluß solcher Umstände, welche hinderlich eintreten

könnten, der Erfolg gesetzlich eintritt". Dabei müssen aber dem Willen Tätigkeiten in unserem Körper unterliegen, von welchen die Erfolge abhängig gemacht werden können. Eine Naturerscheinung wird erklärt, wenn sie aus einem Gesetze abgeleitet werden kann. Die Gesetze selbst können somit auch nur in der Weise erklärt werden, daß sie sich als besondere Fälle allgemeinster Gesetze darstellen lassen. Das allgemeinste Gesetz kann nur als Tatsache hingenommen werden.

V. Kraft. Eine Materie ändert den Zustand der Ruhe oder Bewegung nicht von sich aus (Gesetz der Beharrung oder Trägheit). Wenn aber verschiedene Materien einander gegenübertreten, so ändert sich der Zustand der Ruhe oder Bewegung, den jede einzelne Materie für sich allein haben würde, infolge des Zusammenseins mit den anderen gesetzlich ab, und dies bezeichnet man als Wirkung einer Kraft. An der Kraft ist zu betrachten: „die Anbringungsweise, die Größe, die Richtung und die Beschaffenheit oder das Gesetz derselben". Es sind momentan wirkende Kräfte (z. B. Stoßkraft und Wurfkraft) und kontinuierlich wirkende Kräfte (z. B. Schwerkraft), desgleichen direkt einwirkende und indirekt, durch Mittelglieder sich fortpflanzende Kräfte zu unterscheiden. Unter diesen Begriff der Kraft gehört nicht der Begriff der lebendigen Kraft, „obschon er sachlich damit zusammenhängt", und noch weniger der Begriff der sogenannten Lebenskraft der Philosophen. Betreffs der Grundkräfte, aus denen alle anderen Kräfte sich zusammensetzen lassen, gelten die Bestimmungen: 1) die Kräfte wirken in der Richtung der Verbindungslinie der Massenteilchen; 2) ihre Größe wächst mit der Masse und nimmt ab mit der Distanz der Massenteilchen; 3) actio = reactio; 4) kein System kann durch die Wirkung seiner inneren Kräfte die Lage seines Schwerpunktes verändern. Es erheben sich nun die Fragen: „1) sind die Grundkräfte bloß anziehender oder auch abstoßender Natur; 2) hängen sie bloß von Distanz und Masse, nicht auch von Qualität und Bewegungszustand der Teilchen ab; 3) sind sie bloß binärer, nicht auch multipler Natur."

VI. Quantität der Materie; Masse. Zwei Materien haben gleiche Massen, wenn sie in gleichen zeitlichen und räumlichen Beziehungen zu anderen Materien durch deren Kräfte gleiche Geschwindigkeitsänderungen erleiden. Die doppelte und dreifache Masse erleidet, wie die Erfahrung lehrt, eine doppelte und dreifache Geschwindigkeitsänderung.

VII. Qualität der Materie. „Allgemein gesprochen wird die Qualität der Materie durch die Qualität der davon abhängigen Sinnesempfindungen charakterisiert, ohne daß wir irgendwie imstande sind, von einer Qualität der Materie, abgesehen davon oder hinter den von der Materie abhängigen Erscheinungen, was man eine metaphysische Qualität der Materie nennt, eine Vorstellung oder einen klaren Begriff zu haben oder irgend etwas von den Erscheinungen daraus zu erklären, wonach die Bezugnahme auf metaphysische Qualitäten der Materie unfruchtbar für die Wissenschaft wie für das Leben ist und das Wort selbst nur eine Ursache bedeutet, die man nicht finden kann."

VIII. Verhältnis der Ponderabilien und Imponderabilien. Ein wägbarer Körper ist ein solcher, „welcher das Vermögen besitzt, von der Erde angezogen zu werden". Die Imponderabilien aber entziehen sich so sehr den Mitteln, mit denen man die wägbare Materie zu fassen und zu messen gewohnt ist, daß man vielfach bezweifelt hat, daß der Begriff der Materie und mithin Masse überhaupt auf sie anwendbar sei. „Man kann die Frage aufwerfen, ob nicht vielleicht beides, Ponderabilien und Imponderabilien auf eine gemeinsame Grundnatur zurückzuführen sei, die nur in den Imponderabilien so verdünnt sei, daß ihr Gewicht unmerklich werde."

IX. Atomistische Frage. Der Annahme von Atomen tritt die namentlich von philosophischer Seite vertretene Ansicht von der stetigen Raumerfüllung der Materie gegenüber.

107. Beziehungen zwischen Leib und Seele (1—232).

Vorwort. Die Vorlesungen über die Beziehungen zwischen Leib und Seele unterscheiden sich von denjenigen über die „Elemente der Psychophysik" und über die „Grundbeziehung des materiellen und geistigen Prinzips" dadurch, daß sie das Zwischengebiet des Physischen und Psychischen betreffen, das „ohne Bezugnahme auf Maß und Rechnung einerseits und auf die letzten philosophischen Abstraktionen und Vertiefungen andererseits behandelt werden kann".

I. Einleitung. „Die Lehre von der Beziehung zwischen Leib und Seele oder allgemein zwischen körperlichem und geistigem Gebiete der Existenz tritt verknüpfend und ergänzend zu den Lehren hinzu, welche von dem körperlichen und welche von dem geistigen Gebiete für sich handeln (Naturlehre, Psychologie), in-

Digitized by Google

dem sie die Beziehungen zwischen beiden Gebieten, welche in diesen Lehren nicht oder nur beiläufig zur Sprache kommen können, zum besonderen Gegenstande einer zusammenhängenden Betrachtung macht, wobei sie der Vorkenntnisse aus diesen Lehren und der Bezugnahme darauf bedarf, ohne jedoch mit einer von beiden zusammenzufallen oder durch die Summe beider ersetzt werden zu können." Diese bedeutungsvolle, aber auch schwierige Lehre ist „viel minder gut begründet und weniger entwickelt als die Lehre von Körper und Geist für sich; vielmehr außer schwachen exakten Anfängen, welche sich zur Psychophysik konstituiert haben, in populärer Verflachung, beiläufiger Berücksichtigung, philosophischem Streite und theologischem Dogmatismus befangen geblieben". Eine ausführliche, aus historischen, theoretischen und praktischen Gesichtspunkten geführte, auf die Frage nach der Ausdehnung, den Gesetzen und der Beschaffenheit des Zusammenhangs zwischen Körperlichem und Geistigem allseitig ausgehende Behandlung würde zu weit führen. Darum sollen hier „nach den nötigen begrifflichen und methodologischen Vorerörterungen" einige besonders wichtige Fragen, die als „Vorfragen sowohl für eine allgemeinere philosophische als exakte Behandlung der ganzen Lehre gelten können", behandelt werden. Es sind dies die Fragen: „wie der Begriff eines Sitzes der Seele zu fassen und der Sitz selbst zu bestimmen sei, womit sich die Frage nach der Ausdehnung der Beseelung in uns selbst beantwortet; weiter die Frage, ob dadurch, daß unsere und der höheren Tiere Beseelung faktisch an das Dasein und die Tätigkeit eines Nervensystems gebunden ist, die Annahme einer Beseelung überall präjudiziert sei, wo von einem Nervensysteme nichts zu finden; ferner die Frage, ob die höheren geistigen Tätigkeiten nicht minder als die sinnlichen Empfindungen an körperliche Vorgänge gebunden gedacht werden können; endlich die Frage nach den Gesichtspunkten, welchen sich der sog. Einfluß von Körper auf Geist und von Geist auf Körper unterordnet."

II. Begriffliches und Methodologisches. Das ganze Gebiet der Existenz zerfällt in die Gebiete des Körpers und des Geistes, des Leibes und der Seele, des Physischen und des Psychischen. Dabei werden Geist und Seele als gleichbedeutend betrachtet, während im Sinne eines sonst vielfach üblichen Sprachgebrauchs „Geist und Seele vielmehr als zwei verschiedene Seiten, Stufen oder Gebiete dessen unterschieden werden, was im weiteren

Sinne gemeinsam als Geist oder Seele dem Körper gegenübertritt, oder die Seele als Mittelwesen zwischen Geist und Körper eingeschoben wird". Dies veranlaßt die metbodologische Bemerkung, daß man sicb zwar im Interesse einer leicht verständlicben Darstellungsweise so viel als möglich an den üblichen Sprachgebrauch zu balten habe — „denn niemand gibt gerne gewohnte Bedentungen für ungewohnte anf, oder gewöhnt sich an bisher ungewohnte" —, daß aber doch wissenscbaftliche Bedürfnisse nötigen können, den gewöhnlicben Sprachgebrauch zn verlassen. „Es gibt nicht soviel Wörter als Begriffe; also ist die Sprache genötigt, vielfacb verschiedene Begriffe mit demselben Worte zu bezeichnen und es dem Znsammenbange oder besonders zugefügten Erklärungen zu überlassen, zwischen den Bedentungen zu entscbeiden." Andererseits fehlt es „für sehr allgemeine, hohe, weite Begriffe, welcbe sich auf dem Wege der Wissenschaft durch Abstraktion, Erweiterung, Steigerung konkreter, enger, niedriger Begriffe gebildet haben" an entsprechenden Ansdrücken. Die hierdurch bedingte „Fixation von Wörtern, die im Spracbgebranch sehr unbestimmt gebraucht werden", und „Verallgemeinerung, Erweiterung, Steigerung ibrer Bedeutung gegen die gemeine" kann indessen in sehr verschiedener Weise geschehen, woraus leicht eine Verwirrung des wissenschaftlicben, insbesondere des philosophischen Sprachgebraucbs entstebt. „Die Verwechselung der Wörter aber gibt fast unwillkürlicb zur Verwechselung der Begriffe Anlaß." So gilt denn auch „im weiteren Sinne des gemeinen Sprachgebrauchs" der Gegensatz von Körper und Geist, Leib und Seele als gleichbedeutend, während im engeren Sinne Geist und Seele geschieden werden. — Hier sollen nun Körper und Geist, Leib und Seele, Pbysisches und Psycbisches „gleicbgeltend die zwei Gebiete, Seiten oder Faktoren" des Gebietes der Existenz bedeuten. Zum Geiste, der Seele, dem Psycbischen wird alles gerechnet, was durch innere Wahrnehmung faßbar oder Sacbe des Bewußtseins ist: das Empfinden, Fühlen, Denken, Wollen; zum Körperlicben, Leiblichen, Materiellen, Pbysiscben alles, was als Objekt äußerer sinnlicber Wahrnehmung faßbar ist, oder einem solchen Objekte zukommt. Geist und Seele aber sollen nötigenfalls das höhere und das niedere Gebiet im Psycbiscben bezeichnen. Der Körper ferner kann insbesondere Leib genannt werden, wenn eine Beziehung zur Seele — wie bei unserem Körper — mitgedacht wird.

III. Allgemeinste Tatsachen der Beziehung von Leib und Seele; Sitz der Seele im weiteren Sinne. Den Anlaß von mehr als bloßer Gleichzeitigkeit des Bestehens von Leib und Seele zu sprechen bildet folgende Tatsache: „Unsere Seele und jede Seele, von der wir wissen, kann lebendig, d. h. mit der Möglichkeit und Wirklicbkeit von Selbsterscheinungen oder Bewußtseinsphänomenen im Diesseits nur so lange bestehen, als ein gewisser Körper lebendig, d. h. mit einem geordneten Zusammenbange und einer geordneten Auseinanderfolge seiner Tätigkeiten bestebt, namentlich mit einer Periodizität seiner Tätigkeit, welche nicht in der der Außenwelt aufgeht; und umgekehrt kann dieser Körper im eben angegebenen Sinne lebendig nur bestehen, so lange eine gegebene Seele lebendig im Diesseits besteht. Die Aussage auf das Diesseits zu beschränken ist nötig, insofern wir auf Erfahrung fußen wollen, da wir nur vom Diesseits Erfahrung haben; und die aus praktischen Gesichtspunkten im Auge zu behaltende Möglichkeit eines jenseitigen Lebens der Seele wird durch die hier geltend gemachte Tatsache, an welche sich der Begriff des diesseitigen Sitzes der Seele knüpft, weder verhindert noch dazu vorausgesetzt.“ Dazu tritt noch die besondere Tatsache, daß bestimmte Tätigkeitsformen und Tätigkeiten der Seele und bestimmte Einricbtungen und Tätigkeiten des Körpers erfahrungsgemäß wechselweise aneinander gebunden sind. „Hiernach übersetzt sich das räumliche Verbältnis der Seele zum Körper, was durch die Ausdrücke „an den Körper gebunden sein“ „im Körper sitzen“ angezeigt zu werden scbeint, in ein Verbältnis der Bedingtheit zwiscben Körper und Seele, welche ebensowobl in der Richtung vom Körper zur Seele als nmgekehrt verfolgt werden kann, und teils als ein Verhältnis der Folgebedingtheit, teils der Wechselbedingtheit erscbeint.“ Dies Verhältnis soll als „funktionelles Verhältnis“ bezeichnet werden. „Insofern alle Teile des Körpers solidarisch zu der Leistung zusammenwirken, die Seele lebendig im Diesseits zu erhalten und derselben zu Diensten zu stehen; gegenseits selbst nur lebendig zusammenhalten, so lange die Seele lebendig im Diesseits besteht, kann unbeschadet einer Fassung des Seelensitzes im engeren Sinne, wovon weiterhin die Rede, der ganze Körper als Sitz der Seele im weiteren Sinne bezeichnet werden“ — ohne metaphysische Nebenabsicbten und mit Ausdehnung auf ganz äußerliche Teile wie Oberhaut und Nägel und mit der Bemerkung, daß nicht nur ein Zusammen-

wirken aller Teile, sondern auch ein Eintreten einzelner Teile für andere stattfinden kann, so daß auch eine über gewisse Grenzen nicht hinausgehende Zerstörung einzelner Körperteile das Leben der Seele nicht unmöglich macht und doch jede Zerstörung eine Schwächung bedeutet.

„Für den ersten Anblick könnte es scheinen, daß aus dem eben angegebenen Gesichtspunkte nicht nur das, was wir als Leib zu jeder Seele rechnen, sondern die ganze Welt als Sitz derselben im weiteren Sinne gerechnet werden müßte, indem der ganze Leib ohne seinen Zusammenhang, Stoff- und Wirkungswechsel mit der übrigen Welt ebensowenig imstande ist das Leben der Seele im Diesseits zu erhalten und Zwecken im diesseitigen Leben zu dienen, als das Gehirn und Nervensystem ohne seinen Zusammenhang, Stoff- und Wirkungswechsel mit dem übrigen Leib; auch das Prinzip der Ergänzung und Vertretung der Körperteile zur Erhaltung und zum Dienste des diesseitigen Seelenlebens sich nur in größerem Maßstabe in der Welt als im Leibe gültig erweist, so daß selbst fehlende Teile des Leibes bis zu gewissen Grenzen durch Hilfsmittel der Außenwelt ersetzt werden können." Indessen schwindet im Tode bloß derjenige Teil, den wir Leib nennen, nicht die übrige Welt.

Sofern das Seelenleben nicht an den Bestand eines einzelnen Körperteils, sondern an den Zusammenhang und an das Zusammenwirken der Teile gebunden ist, kann man sich zu folgender Verallgemeinerung geführt sehen. „Da unser Leib in einem geordneten Zusammenhange und einer geordneten Auf- und Auseinanderfolge seiner Tätigkeiten nur bestehen kann, so lange ein lebendiger Geist dazu gehört, sei es, daß man ihn als Resultat oder verknüpfendes Prinzip oder sonst wie fassen will, so läßt sich verallgemeinernd denken, daß dasselbe auch von der ganzen, unserem Leibe in geordnetem Zusammenhange, geordneter Auf- und Auseinanderfolge von Tätigkeiten nicht nur analogen, sondern auch denselben teilhaft einbegreifenden Welt gilt, daß also ebenso ein Geist zur Erhaltung der Welt wie eine Seele zur Erhaltung unseres Leibes gehört, welcher Geist aber ewig ist, sofern die Welt ewig ist." Man darf aber bei der Betrachtung allgemeiner Ähnlichkeiten zwischen dem Weltganzen und dem menschlichen Körper die Verschiedenheit zwischen beiden nicht übersehen. Die Verschiedenheit besteht zwar wesentlich darin, daß „dem Großen alles, woran sich das Leben des Kleinen knüpft, in umfassenderem,

vollständigerem, höherem und dauernderem Grade zukommt, indem es statt bloß eines Gehirns, Herzens, Magens alle Gehirne, Herzen, Magen, die es gibt und geben wird, und darüber eine viel höhere Gliederung durch Licht und Kraft verknüpfend einbegreift, indem es die kleinen Perioden unseres leiblichen Lebens in seinen viel größeren Perioden, den Stoff- und Wirkungswechsel unseres Leibes in einem viel größeren Stoff- und Wirkungswechsel und dazu unseren ganzen Geist in einem, dem inneren Verkehr von dessen Momenten analogen, nur größeren Verkehr der Geister eingebaut enthält, was alles nicht sowohl dafür spricht, daß dem großen Ganzen kein Geist, als daß ihm ein alle unsere Geister umfassender größerer Geist zugehört." Doch ist dies kein exakter Schluß. Er zeigt jedoch, daß die anthropomorphistischen Analogien bei der Gestaltung der Ansichten von Gott mit Recht eine Hauptrolle spielen. „Das Recht aber des Schlusses vom Endlichen auf das Unendliche, der gemacht wird, wenn wir das, was wir im Menschen leiblicher- und geistigerseits finden, nur mit höchster Erweiterung und Steigerung in der Welt und Gott wiederfinden, liegt darin begründet, daß dem Begriff wie der Sache nach das Unendliche nicht, wie es untriftig so oft gefaßt wird, etwas jenseits alles Endlichen ist, sondern alles Endliche einschließt." Mit der Ansicht von Gott hängt die Ansicht von der Unsterblichkeit zusammen, „welche den menschlichen Geist nach dem Tode zu einer höheren Daseinsweise in Gott aufgehoben werden läßt als im Diesseits."

„Beide Schlüsse, der Schluß auf Gott und auf das jenseitige Leben treffen in der Verallgemeinerung zusammen, daß das Prinzip des Zusammenbangs von Leib und Seele, wie es im Menschen diesseits erfahrungsgemäß besteht, auch über das diesseitige menschliche Leben hinauf und hinaus ins Unbeschränkte gültig sei, und gestatten hiermit eine einheitliche Auffassung des ganzen Existenzgebäudes; wogegen jede Ansicht von den höchsten und letzten Dingen, die, wenn selbst auf anderem Wege entstanden, nicht als Verallgemeinerung in diesem Sinn gefaßt werden kann, auch die Spezialität des diesseitigen menschlichen Lebens nicht hergeben kann, also irgendwo einen Bruch erleidet oder einer Unklarheit verfällt."

IV. Sitz der Seele im engeren Sinne. Von dem Verhältnis der Bedingtheit zwischen Seele und Körper im allgemeinen und ganzen ist das Verhältnis spezieller Bedingtheit zu unter-

scheiden. Da nämlich die Seele im Zustande des Wachens und des Schlafens sein kann, so müssen auch besondere Bedingungen im Körper für das Auftreten solcher wechselnder Zustände vorhanden sein. Sie zeigen sich darin, „daß durch besondere Einwirkungen auf den Körper Erwachen wie Einschlafen der Seele gesetzlich hervorgerufen oder begünstigt werden kann". Hierdurch wird ein besonderer Sitz der Seele im engeren Sinne bedingt, der bei Menschen und höheren Tieren im Gehirn zu suchen ist. Es sind aber nicht alle Teile des Gehirns gleichmäßig für das Seelenleben in Anspruch zu nehmen, und der Vorzug des Gehirns als engerer Seelensitz schwindet umsomehr, je mehr bei niederen Tierklassen das Gehirn seinen Vorrang vor dem übrigen Nervensystem verliert. „Selbst beim Menschen und den höheren Tierklassen aber ist nicht sicher entschieden, ob nicht das Gehirn vielmehr bloß für den Hauptsitz als alleinigen Sitz der Seele im engeren Sinne anzusehen sei, insofern sich denken ließe, daß die Tätigkeiten, an welche das wache Seelenleben geknüpft ist, sich vom wachen Gehirn aus in Rückenmark und Nerven, solange sie mit dem Gehirn in Verbindung stehen, hineinerstrecken, was in der Tat durch keine physiologische Tatsache ausgeschlossen ist." Es ist auch möglich, daß das Rückenmark für sich allein Träger seelischer Vorgänge sein kann, da die zahlreichen physiologischen Experimente und pathologischen Beobachtungen nie von Zweideutigkeiten frei sind.

Fragt man aber, ob ein punktförmiger oder ausgedehnter Seelensitz anzunehmen sei, so steht der Annahme eines punktförmigen Sitzes entgegen, daß kein nervöser Zentralpunkt anatomisch im Gehirn nachweisbar ist, und daß die vielen scheinbar widerspruchsvollen pathologischen Erfahrungen dazu führen, solidarische Vertretung und Ergänzung der einzelnen Hirnteile an Stelle eines punktuellen Seelensitzes anzunehmen. Auch ist folgender Gesichtspunkt geltend zu machen: „Sollte wirklich die Einheit des Geistes die Anknüpfung an einen Punkt fordern, so müßte dies von jedem Geiste, dem Einheit zuzuschreiben, gelten, also auch vom göttlichen Geiste. In der Tat haben manche Vertreter des einfachen Seelensitzes diese Konsequenz gezogen und nur dem einfachen Wesen oder der Monade, welche der Sitz oder Träger des göttlichen Geistes sein sollte, eine bevorzugte Stelle und besondere Kraft, das Weltall zu organisieren, zugeschrieben. Inzwischen leuchtet ein, daß hiermit nicht nur die

Ansicht einer Allgegenwart Gottes, sondern überhaupt würdige und erbauliche Ansichten von Gott und seinem Verhältnisse zur Welt unverträglich sind, wogegen die Ansicht vom ausgedehnten Seelensitze der endlichen Geister sich selbst nur konsequent zu bleiben braucht, um durch Verallgemeinerung zur Ansicht eines allgegenwärtigen bewußten Gottes zu werden und in ihm das Band aller Dinge zu sehen." Die Aussicht auf Unsterblichkeit wird durch den punktförmigen Seelensitz nicht garantiert, da ein Punkt zwar nicht zerfallen, wohl aber verschwinden kann, wenn das, wozu er gehört, zerfällt, und da bei der Annahme einer unzerstörbaren Monade nicht eingesehen werden kann, „wie es der Seele möglich werde, nach dem Tode das ohne Leib zu leisten, was sie im Leben faktisch nur mit einem Leibe leisten kann, oder wie sie einen neuen Leib finden könne." Dagegen knüpft die Ansicht vom ausgedehnten Seelensitze die Unsterblichkeit „an die Forterhaltung eines unzerstörbaren Kausalzusammenhangs", insofern man annehmen kann, daß „das geistige Dasein ebensowenig ohne ewige Folgen sein werde als das leibliche und selbst die Forterhaltung des geistigen Daseins an die Forterhaltung der Folgen des körperlichen Daseins geknüpft denken kann". So wird wenigstens die aus religiös praktischen Gesichtspunkten geltend zu machende Forderung eines jenseitigen Lebens mit einer exakten Lehre von den Beziehungen zwischen Leib und Seele verträglich erscheinen.

Die Annahme des ausgedehnten Seelensitzes kann nun dualistisch und materialistisch, idealistisch und im Sinne der Identität gedeutet werden — worüber hier nicht entschieden werden kann.

V. Die Nervenfrage. Das Nervensystem ist beim Menschen und den höheren Tieren zweifellos der engere Seelensitz. Man kann nun fragen, ob ein solches unerläßliche Bedingung für das Seelenleben sei. Vom Menschen und von den höheren Tieren aus zu schließen, daß dem so sei, ist unberechtigt, da man sonst auch von den Saiteninstrumenten aus das Vorhandensein von Saiten als unerläßlich für die Entstehung von Tönen halten müßte, und da auch andere Lebensfunktionen (Stoffwechsel, Ernährung, Atmung) bei den Tieren unter Einfluß der Nerven, bei den Pflanzen hingegen ohne Nerven vor sich gehen. Überdies geben ja auch niedere Tiere Zeichen eines Empfindungslebens, ohne daß Nerven vorhanden wären. Schließlich ist hervorzuheben, daß wir überhaupt nicht wissen, durch welche Eigenschaft das

Nervensystem die Fähigkeit erhält, als Träger eines bewußten Seelenlebens zu dienen, und darum auch nicht behaupten können, daß diese Eigenschaft den Nerven mit anderen Formen organischer Entwicklung nicht gemein sein könne. Man kann etwa vermuten, daß Schwingungen eines unwägbaren Agens im Nervensystem mit unseren Empfindungen und sonstigen Bewußtseinserscheinungen funktionell zusammenhängen und daß demgemäß durch die ganze Welt hindurch entsprechende Schwingungen Träger bewußten Lebens seien.

VI. Frage nach der Bedingtheit der höheren, geistigen Tätigkeiten. Selbst die höchsten geistigen Tätigkeiten setzen ein lebendiges Gehirn voraus. Die Empfindungen insbesondere ändern sich mit den Vorgängen im Gehirn. Es ist nun fraglich, „ob auch für die höheren geistigen Vorgänge eine entsprechende Spezialbedingtheit körperlicherseits stattfinde" oder ob der Lebensprozeß des Gehirns im allgemeinen als Stütze desselben ausreicht, „ohne daß aber Abänderungen der höheren geistigen Tätigkeit mit Abänderungen der Gehirntätigkeit wesentlich zusammenhängen". Die Beantwortung dieser in psychologischer, theologischer und philosophischer Hinsicht wichtigen Frage wird von Dualisten, Idealisten und Monadologen im Sinne der Freiheit, von Materialisten und Identitätsphilosophen im Sinne der Gebundenheit an Spezialbedingungen beantwortet. Hier sollen die Gründe für und wider abgewogen werden. Man kann einesteils sagen: die Freiheit des Geistes verlangt Freiheit von Spezialbedingungen; solche Bedingungen vertragen sich nicht mit einer würdigen Ansicht von Gott und Unsterblichkeit, da sie die Unterscheidung von niederem und höherem Geistigen aufheben würden; die Mannigfaltigkeit der geistigen Vorgänge ist zu groß, als daß sie körperlich ausreichend bedingt sein könnte; das höhere geistige Tätigkeiten bedingende Gehirn des Menschen müßte sich von dem, solche Bedingungen nicht darbietenden Gehirn der Tiere wesentlich unterscheiden, während ein Unterschied bloß in der Größe und äußeren Konformation zu finden ist und bei Störungen und Verletzungen des Gehirns die höheren geistigen Tätigkeiten oft ungestört fortgehen. — Demgegenüber ist zu bemerken: Determinismus und Indeterminismus ist schließlich Glaubenssache, und da die gebundene Ansicht für beide Seiten, die freie Ansicht bloß von der einen Seite die Exzeption vom gesetzlichen Kausalzusammenhange, die der freien Willenstätigkeit zukommt, verlangt,

so ist keine Entscheidung gegeben; die Unterscheidung von niederem und höherem Geistigen bedarf nicht der Bezugnahme auf die körperliche Unterlage, da sie sich auf rein psychologische Gesichtspunkte stützt; man kann die körperliche Unterlage doch nicht entbehren und bei dem stetigen Ineinanderlaufen von rein sinnlichen, sicher an körperliche Vorgänge gebundenen Anschauungen und den gewöhnlichen Erinnerungs- und Phantasiebildern kann kein Punkt bezeichnet werden, wo die Unterlage aufhört. Auch läßt sich wohl plausibel machen, wie eine Repräsentation der höheren geistigen Tätigkeiten möglich sein kann: in ähnlicher Weise wie die Wörter aus 25 Buchstaben zusammenstellbar sind und wie die Schrift mit den Bedeutungen der Wörter zusammenhängt, kann auch der körperliche Prozeß mit den höheren geistigen Tätigkeiten zusammenhängen. Überhaupt bestehen „Verhältnisse zwischen Verhältnissen, Zusammenhänge zwischen Zusammenhängen, Beziehungen zwischen Beziehungen“ im körperlichen Gebiete so gut wie im geistigen, und die einen können den anderen entsprechen. Die Gehirne schließlich können äußerlich ununterscheidbar und doch innerlich, in ihrer Organisation wesentlich verschieden sein.

VII. Über den sogenannten Einfluß des Körpers auf die Seele und der Seele auf den Körper. Was gewöhnlich als Einfluß des Körpers auf die Seele und der Seele auf den Körper bezeichnet wird, ist „nichts anders als das Verhältnis der Bedingtheit zwischen beiden, wonach Zustände und Veränderungen im einen solche im anderen wesentlich mit- oder nachziehen“. „Körperliche Reize können Empfindungen in der Seele erwecken; umgekehrt kann der Wille Bewegungen des Körpers hervorrufen.“ „Diese Tatsachen der Reziprozität können je nach materialistischer, idealistischer, dualistischer, monadologischer oder Identitätsansicht von Leib und Seele verschieden gedeutet werden.“ Man darf dabei nur nicht den Fehler machen, „die Deutung jener Verhältnisse des Einflusses zwischen Körper und Seele im Sinne der einen oder anderen Grundansicht als Beweis für eine solche aufzufassen oder geltend zu machen“.

108—110. Psychophysik (1—431).

I. Eingang. Über Begriff und Aufgabe der Psychophysik, übereinstimmend mit den „Elementen der Psychophysik“, S. 8 folgende; nebst zwei weiteren Ausführungen.

II. Zwei Vorfragen. 1) nach der Abhängigkeitsweise der höheren geistigen Tätigkeiten vom Körperlichen („Elemente" S. 13, 14); 2) nach dem einfachen und ausgedehnten Seelensitze („Elemente" II. Teil; S. 392 folg.).

III. Begriffliches über Empfindung und Reiz. Zu Reizen verschiedener Art und Stärke gehören Empfindungen verschiedener Art und Stärke. Dabei kann der Unterschied nicht ins Bewußtsein treten. „Hiernach haben wir einen Unterschied zu machen zwischen Unterschieden, wie sie zwischen Empfindungen wirklich bestehen und wie sie als empfunden ins Bewußtsein treten." (Im übrigen wie „Elemente" S. 15 folg.)

IV. Maßprinzip und Maßmethoden der Empfindlichkeit. Daß ein Reiz oder Reizunterschied bei derselben Anbringungsweise von verschiedenen Personen, Organen, zu verschiedenen Zeiten verschieden stark und andererseits verschiedene Reize gleich stark erscheinen können, bedingt Grade der Empfindlichkeit — was an verschiedenen Fällen erläutert wird. Das Maß der Empfindlichkeit wie in den „Elementen" S. 45 folg. Die Maßmethoden der Empfindlichkeit wie in den „Elementen" S. 61 folg.

V. Das Maßprinzip der Empfindung in Übereinstimmung mit den „Elementen" S. 54 folg.

VI. Das Webersche Gesetz formuliert und an Beispielen erläutert; die Abweichungen und der Bereich der Gültigkeit werden erwähnt. („Elemente" S. 134 folg.)

VII. Die Tatsache der Schwelle. („Elemente" S. 238 folg.)

VIII. Mathematisches Hilfsprinzip. („Elemente" II S. 6.)

IX. Die Fundamentalformel und Maßformel. („Elemente" II S. 9.).

X. Ableitung der Maßformel. („Elemente" II S. 33.)

XI. Von den negativen Empfindungswerten ins besondere. („Elemente" II S. 39.)

XII. Bezugsweiser Gang von Reiz und Empfindung. („Elemente" II S. 47.)

XIII. Bemerkungen über die weiteren Anwendungen der bisherigen Formeln. Hinweis auf „Elemente" II [wo Summation von Empfindungen (S. 58), Verteilungsverhältnisse der Empfindung (S. 68), Unterscheidung von Empfindungsunterschieden und Kontrastempfindungen (S. 82) in Betracht kommen können].

XIV. Modifikation der einfachen Fundamental-Maßformel im Gebiete der Lichtempfindungen zur Deckung

der Abweichungen vom Weberschen Gesetze. Bezugnahme auf „Elemente“ II S. 195, indem statt

$$d\gamma = \frac{c\,d\beta}{\beta} \text{ die Formel } d\gamma = \frac{c\,d\beta}{A+\beta} \text{ und } \frac{c\,d\beta}{(A+\beta)(B+\beta)}$$

als gültig vorausgesetzt wird.

XV. Übergang von der äußeren zur inneren Psychophysik. („Elemente“ II S. 377.) Die psychophysische Tätigkeit schiebt sich als Mittelglied zwischen Reiz und Empfindung ein; sie ist vom Reize kausal abhängig, mit der Empfindung simultan bedingt oder wechselbedingt. Das Webersche Gesetz und die Tatsache der Schwelle gilt nun für die innere Psychophysik, wenn das gesetzliche Verhältnis zwischen Reiz und Empfindung in Wahrheit zwischen psychophysischer Tätigkeit und Empfindung besteht. Das Hypothetische dieser Auffassung läßt die Möglichkeit offen, andere Auffassungen (Wundt, Bernstein, Mach, Delboeuf) zu entwickeln. Fechner hält an der vorigen fest.

XVI. Gegensatz des bewußten oder unbewußten Lebens im allgemeinen; Schlaf und Wachen; Aufmerksamkeit. („Elemente“ II S. 439, 449.)

XVII. Verhältnis zwischen dem Allgemeinbewußtsein und besonderen Bewußtseinsphänomenen. („Elemente“ II S. 452.)

XVIII. Psychophysische Kontinuität und Diskontinuität. („Elemente“ II S. 526.)

XIX. Über die Natur der psychophysischen Bewegung. („Elemente“ II S. 543.)

XX. Beziehung der Psychophysik zur Naturphilosophie und Religion. Das Wellenschema führt zu der Ansicht einer alles tragenden Totalwelle und so zur Ansicht eines, in der Welt allgegenwärtigen, allwissenden Geistes, in dem alle Geister leben, weben und sind, mit der Möglichkeit, noch andere Stufen von Beseelung zwischen uns und Gott einzuschieben. Hiermit eröffnet sich die Aussicht auf Fortexistenz nach dem Tode. „Wenn eine Anschauung unseres Auges, geknüpft an Oberwellen unserer Totalwelle nach ihrem Erlöschen noch einen Erinnerungsnachklang hinterläßt, welcher eintritt in ein allgemeines und höheres Reich von Erinnerungen und Gedanken unseres allgemeinen oder Totalbewußtseins, so ist auch kein Hindernis zu glauben, daß etwas Entsprechendes unseren Totalwellen begegne, insofern sie ihrerseits Oberwellen einer allgemeineren Totalwelle sind, und daß somit

unsere Geister eingehen in ein höheres Erinnerungsreich des allgemeinen, des göttlichen Geistes."

Beilagen: 1) Ausführungen über Kontinuität und Diskontinuität des Bewußtseins und das Wellenschema. — 2) Phänomene des Schlafs. — 3) Verteilungsverhältnisse der Empfindung. — 4) Summen- und Mittelwerte der Empfindung. — 5) Die Unterschiedsformel. — 6) Die Unterschiedsmaßformel.

III. Über psychophysische Maßmethoden (1—200).

I. Eingang. Die Gewinnung eines psychischen Maßes „auf Grund der Beziehungen zwischen Leib und Seele" wird als Aufgabe der Psychophysik bezeichnet. Diese Aufgabe ist bis jetzt erst in Bezug auf Empfindlichkeit und Empfindung gelöst.

II. Vom Maße der Empfindlichkeit und Empfindung im allgemeinen. Es werden intensive und extensive Empfindungen unterschieden. Der Reiz wird als Anregungsmittel intensiver Empfindungen definiert. Zur Vergleichbarkeit der als Empfindungen sich darbietenden Reizwirkungen wird „nicht nur gleiche äußere Anbringungsweise der Reize, sondern auch ein gleicher Zustand der Aufmerksamkeit erfordert, keineswegs aber ein gleicher Grad der Empfindlichkeit des Sinnesorgans, da dieser vielmehr selbst zum Gegenstand des Maßes gemacht werden soll". Die Empfindlichkeit für absolute Reizwirkungen soll „absolute Empfindlichkeit", die Empfindlichkeit für simultan gegebene Reizunterschiede und sukzessiv gegebene Reizabänderungen soll „Unterschiedsempfindlichkeit" genannt werden. Grade der Empfindlichkeit werden schon im gewöhnlichen Leben unterschieden. Direkt meßbar ist aber die Empfindlichkeit so wenig wie die abstrakte Kraft. Darum hat als Maß der empfundene Reiz oder der empfundene Reizunterschied zu dienen. „Hiernach wird die Größe der Empfindlichkeit allgemein der Größe des Reizes oder Reizunterschiedes, welche gleich stark in die Empfindung fällt, umgekehrt proportional, mit einem kurzen Ausdruck reziprok gesetzt werden; der Größe des Reizes, wenn es sich um absolute Empfindlichkeit handelt, des Reizunterschiedes, wenn es sich um Unterschiedsempfindlichkeit handelt." Die Größe der extensiven Empfindlichkeit ist entsprechend den gleich groß erscheinenden Ausdehnungen oder Ausdehnungsunterschieden reziprok zu setzen.

Die Empfindlichkeit ist das Vermögen der Empfindung. Das Maß der Empfindlichkeit ist aber noch kein Maß der Emp-

findung; es setzt bloß die Betrachtung von Gleichheitsfällen der Empfindung voraus, „wobei das Maß statt auf die Empfindung auf die Reize, die eine gleich starke Empfindung oder einen gleich starken Empfindungsunterschied hewirken, angewandt wird. Umgekehrt aber kann ein Maß der Empfindung auf das im vorigen Sinne festgestellte Maß der Empfindlichkeit für Reizunterschiede gegründet werden, indem man dadurch zu einer derartigen Beziehung zwischen Reiz und Empfindung gelangt, daß der Reiz als Maßstab an die Empfindung angelegt werden kann.“ Hierbei darf keine Proportionalität von Reiz und Empfindung angenommen werden, da „in den höheren Teilen der Reizskala größere Zuwüchse des Reizes erforderlich sind als in den niederen, um die Empfindung um gleich viel zu steigern.“ Die Größe des Znwachses lehren die Maßmethoden der Unterschiedsempfindlichkeit kennen. „Hiernach kommt das Prinzip des Empfindungsmaßes in Kürze darauf zurück, daß von Größenverhältnissen des Reizes auf Größenverhältnisse der dadurch ausgelösten Empfindung nach einer zwischen heiden hestehenden, durch die Maßmethoden der Unterschiedsempfindlichkeit zu ermittelnden und unter einen mathematischen Ausdruck gefaßten Beziehung geschlossen wird.“

III. Allgemeine Darstellung der Maßmethoden der Empfindlichkeit. Die Maßmethoden der Unterschiedsempfindlichkeit werden „zuerst und vorzugsweise“ hehandelt, weil sie mehr als die der absoluten Empfindlichkeit ausgehildet worden sind und als Unterlage für das Empfindungsmaß wichtiger sind. Es gibt drei Methoden: die Methode „der ehen merklichen Unterschiede, der mittleren Fehler und der richtigen und falschen Fälle.“ „Bei der Methode der eben merklichen Unterschiede gilt als Charakter gleich empfundener Unterschiede, daß sie eben merklich erscheinen.“ Darum bestimmt man die Größe der nur ehen merklichen Reizunterschiede und setzt derselben die Empfindlichkeit reziprok. Bei der Methode der mittleren Fehler gilt die Empfindlichkeit für Unterschiede abhängig von der Größe der Fehler; man setzt darum die Empfindlichkeit der durchschnittlichen Größe der Fehler reziprok. Bei der Methode der richtigen und falschen Fälle gilt die Unterschiedsempfindlichkeit „der Größe der Unterschiede reziprok, welche dasselbe Verhältnis richtiger Fälle zu den falschen Fällen oder zur Totalzahl der Fälle liefern.“ „Alle drei Methoden erfordern eine große Menge von Rücksichten und Vorsichten“: vervielfältigte Versuche, die methodisch und vergleichhar

und mit regelmäßigem Wechsel der zu prüfenden Umstände angestellt werden, wobei Übung und Ermüdung und (durch die Versuche herbeigeführte) Zustände der Reizung zu berücksichtigen sind. Auch sind die Unterschiede der Zeit- und Raumlage der verglichenen Größen zu beachten. — Einer der wichtigsten Erfolge bei Anwendung der Maßmethoden ist die Bestimmung des Gesetzes, nach welchem die Unterschiedsempfindlichkeit mit der Größe der Reize abnimmt, da hierauf das Maß der Empfindung zu stützen ist. — Den Maßmethoden der Unterschiedsempfindlichkeit entsprechend lassen sich drei Maßmethoden der absoluten Empfindlichkeit aufstellen.

IV. Die Methode der eben merklichen Unterschiede. Sie wird in Übereinstimmung mit den „Elementen der Psychophysik" S. 74, 75 charakterisiert. „Im allgemeinen ist es zweckmäßig, bis zum eben merklichen Unterschiede eben so oft durch Steigerung eines geringeren als Verminderung eines größeren Unterschiedes zu gelangen." Als Beispiel dient die Untersuchung der Empfindlichkeit für Temperaturunterschiede, wobei Versuchsergebnisse von E. H. Weber und von Fechner selbst zugrunde gelegt werden.

V. Die Methode der mittleren Fehler. Die Anwendung dieser, von jeher zu Präzisionsbestimmungen der Beobachtungen benützten Methode zu psychophysischen Maßbestimmungen (vergl. „Elemente der Psychophysik" S. 74, 120) wird in bezug auf extensive Unterschiedsempfindlichkeit erläutert. Bei sukzessiver Auffassung der Distanzen kann 1) die Normaldistanz zuerst, 2) die Fehldistanz zuerst beobachtet, 3) zwischen Normaldistanz und Fehldistanz regelmäßig abgewechselt werden. Bei simultaner Auffassung kommt die Lage der Normaldistanz zur Fehldistanz (rechts und links; oben und unten) in Betracht. „Die rohen Fehler δ, welche man unmittelbar als Differenzen der Fehldistanzen f von der Normaldistanz D erhält, sind noch nicht unmittelbar zum Maße der Unterschiedsempfindlichkeit verwendbar, sondern als eine Zusammensetzung eines dazu verwendbaren Anteils, des sog. reinen Fehlers, mit einem nicht dazu verwendbaren Anteil, dem konstanten Fehler, zu betrachten; erfordern demgemäß zur Ausscheidung des reinen Fehlers erst eine Analyse, welche die Rechnung in Anspruch nimmt." Man kann in der Tat eine Abweichung der mittleren Fehldistanz F von der Normaldistanz D, nämlich $F - D = c$ konstatieren. „Die rohen

Fehler δ nun setzen sich aus dieser Abweichung der mittleren Fehldistanz von der Normaldistanz und den Abweichungen der einzelnen Fehldistanzen von der mittleren Fehldistanz zusammen. Erstere Abweichung gibt den sog. konstanten Fehler c, indes letztere die reinen variabeln Fehler $f - F = \Delta$ oder reinen Fehler schlechthin geben." „Die reinen variablen Fehler folgen dem Gesetze der Fehlerverteilung, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung für Fehler, die von einer mittleren Beobachtungsgröße an gerechnet sind, festgestellt hat; die rohen Fehler, als von einer solchen nicht gerechnet, folgen ihnen nicht, oder nur insofern, als der konstante Fehler sich vernachlässigen läßt. Es würde daher auch keinen Sinn haben, mittlere Fehler aus den rohen Fehlern zu ziehen, sondern die reinen sind dazu zu verwenden." Der konstante Fehler hängt wesentlich von den während einer Versuchsreihe konstant erhaltenen Verhältnissen der Zeit- und Raumlage ab, vermöge deren die eine der verglichenen Größen konstant zu groß oder zu klein gegen die andere erscheint. Er kann ein scheinbarer und wahrer konstanter Fehler sein. „In jedem Falle hat man einen wahren konstanten Fehler anzunehmen, wenn bei Fraktionierung einer Beobachtungsreihe in nicht gar zu kleine Abteilungen und besonderer Berechnung derselben der konstante Fehler durch alle oder eine überwiegend große Mehrzahl der Fraktionen dasselbe Vorzeichen behält; einen scheinbaren, wenn das Vorzeichen des konstanten Fehlers unbestimmt wechselt."

VI. Allgemeineres über die mathematischen Fehlerverhältnisse. Es gibt ein mathematisch darstellbares, nur für unendlich viele Beobachtungen als streng gültig zu betrachtendes Gesetz der Fehlerverteilung, das sogenannte Gaußsche Fehlergesetz. Aus demselben ergeben sich mathematische Beziehungen zwischen den Mittelwerten und den Fehlersummen, worüber die Kollektivmaßlehre Fechners S. 275 folg. zu vergleichen ist.

VII. Die Methode der richtigen und falschen Fälle. Sie wird am Beispiel der Gewichtshebungen erläutert, wobei zweifelhafte Fälle halb den richtigen, halb den falschen Fällen zugezählt werden. Der Quotient, welcher das Verhältnis richtiger und falscher Fälle angibt, hängt einesteils von der Unterschiedsempfindlichkeit, andernteils von sonstigen Einflüssen (der Größe des Zusatzgewichtes, der Zeit- und Raumlage) ab, wobei die Abhängigkeit durch das Fehlergesetz bedingt wird. (Vergl. „Elemente der Psychophysik" S. 107 folgd.)

VIII. Die Maßmethoden der absoluten Empfindlichkeit. Sie bestehen 1) in der Ermittelung eines ebenmerklichen Reizes; 2) in der Feststellung, wie oft ein kleiner Reiz merklich und nicht merklich erscheint; 3) in der Bestimmung der Größe eines Reizes, der einem anderen unter gegebenen Umständen gleich erscheint. Die letztere heißt die Methode der Äquivalente. (Vergl. „Elemente der Psychophysik" S. 130 f.)

112. Sitz der Seele (1—134).

I. Vorerörterungen (den „Elementen der Psychophysik" II S. 382, 383 entsprechend).

II. Vom Sitz der Seele im weiteren Sinne (den „Elementen" II S. 383 folgd. entsprechend); mit eingehender Erörterung der materialistischen und idealistischen Auffassungsweise.

III. Vom Sitz der Seele im engeren Sinne (in Übereinstimmung mit den „Elementen" II S. 389—428).

113. Über die Grundbeziehung des materiellen und geistigen Prinzips (1—283).

I. Eingang. Das Gebiet der Existenz teilt sich in ein der inneren Wahrnehmung zugängliches geistiges und in ein der äußeren Wahrnehmung fähiges materielles Gebiet. Durch Einwirkungen des körperlichen Gebietes werden Phänomene im geistigen Gebiete erzeugt, „welche uns Kunde vom Dasein des körperlichen Gebietes geben und insofern als Wahrnehmungen dieses Gebietes gelten." Es ist ferner „der Geist nach den uns zu Gebote stehenden Erfahrungen seiner Existenz und Tätigkeit nach an die Existenz und Tätigkeit eines Körpers gebunden". Es sollen nun „die allgemeinsten Gesichtspunkte der Beziehung zwischen materiellem und geistigem Prinzip" festgestellt und in einer „Grundansicht" verknüpft werden. Zu diesem Zwecke kann man entweder aus dem Begriffe des Körperlichen und Geistigen „ihr Verhältnis aprioristisch ableiten" oder „die allgemeinsten Erfahrungstatsachen der Beziehung selbst unter einem sie verknüpfenden Ausdruck zu einer Grundansicht zusammenfassen". Der letztere Weg soll hier eingeschlagen werden.

II. Übersicht der bisherigen Ansichten über das Verhältnis des Körperlichen und Geistigen. Die Ansicht des gewöhnlichen Lebens faßt Leib und Seele, Körper und Geist, Natur und Gott als zwei verschiedene, entgegengesetzte, enge

verbundene, aber doch trennbare, teils in Wechsel-, teils in Folgebeziehungen stehende Dinge. Davon ist zu unterscheiden die philosophische Ansicht, die indessen nicht ohne Einfluß auf jene geblieben ist, und die naturwüchsige Ansicht der Naturvölker, die das Körperliche und Geistige noch nicht bestimmt trennt. „In den philosophischen Ansichten selbst zeigt sich im allgemeinen die Tendenz, die denkbaren Möglichkeiten zu erschöpfen. In den ältesten wird ebenso wie in der ursprünglichen Naturansicht der Völker ein bestimmter Unterschied des Körperlichen und Geistigen noch nicht gemacht; in manchen späteren wird dieser Unterschied in größter Schärfe und Schroffheit als ein grundwesentlicher gefaßt (Dualismus), teils wird eine Vermittelung zwischen beiden durch ein Mittelglied gesucht, teils der Wesensunterschied zwischen beiden geleugnet (monistische Ansicht); hierbei aber bald das körperliche, bald das geistige Wesen als das grundwesentlichere betrachtet und zur einseitigen Geltung gebracht (Materialismus, Idealismus), bald die Wesensidentität selbst zur Unterlage der Betrachtung genommen (Identitätsansicht). Teils wird die Seele einfach an ein einfaches Körperelement geknüpft oder damit identifiziert (monadologische Ansicht), teils mit einem körperlichen Zusammenhange in Beziehung gebracht (synechologische Ansicht)."

III. Allgemeinere Ausführungen betreffs der Hauptsysteme und speziellere Charakteristik einiger derselben. Die ältesten griechischen Philosophen „nahmen einen realen Urstoff an, der ihnen unmittelbar ein Lebendiges, Beseeltes und selbst Göttliches war". — „Der Materialismus ist, seinen Prinzipien und seiner Gestaltung nach, von seinem Ausgangspunkte in der Lehre der alten Atomistiker (Leucipp, Demokrit, Epikur, Lucrez) bis auf die neueste Zeit sich wesentlich gleich geblieben." — „Viel mannigfaltigere Gestalten als der Materialismus zeigt der Idealismus." Seine Vertreter sind im Altertum Platon, in neuerer Zeit Berkeley, Leibniz, Fichte, Hegel. — „Als ältestes Identitätssystem kann man in gewissem Sinne die All-Einslehre der sogen. Eleatischen Philosophie (Xenophanes, Parmenides, Melissus, Zeno) ansehen, welche das eine ewige Sein des Alls mit dem göttlichen Sein identifizierten." Unter den Neueren sind Spinoza und Schelling die entschiedensten Vertreter der Identitätslehre. — Monadologische Systeme sind insbesondere diejenigen von Leibniz, Herbart, Lotze. „Sie nähern sich darin den dua-

listischen, daß Seele und Körper in jenen wie in diesen als etwas nur in äußerlicher Verbindung Stehendes, der Trennung im Tode Fähiges betrachtet werden, und unterscheiden sich nur dadurch davon, daß in den monadologischen anders als in den dualistischen eine wesentliche Gleichartigkeit der Substanzen, woraus der Körper besteht, mit Seelensubstanzen statuiert wird, wogegen der Dualismus eine grundwesentliche Verschiedenheit zwischen Körper und Seele behauptet." — Aus gewissen Gesichtspunkten können den monadologischen Ansichten die synechologischen entgegengesetzt werden, „sofern in den monadologischen die geistigen Erscheinungen als Sache eines einfachen Wesens unter der Zahl derer, die in ihrer Zusammensetzung den Körper bilden, angesehen, in der synechologischen aber mit Vorgängen in einem körperlichen Zusammenhange in direkter Beziehung gedacht oder als dessen innere Erscheinung angesehen werden. Doch ist der Ausdruck synechologisch in dieser Beziehung bisher nicht üblich gewesen."

Der entschiedenste Vertreter des Dualismus ist Descartes. Er hält „Körper und Seele für zwei absolut verschiedene, an sich gar nichts miteinander gemein habende Grundwesen, die nur in einer äußerlichen, durch Gott vermittelten Beziehung zueinander stehen; Gott selbst aber ist ihm ein über Materie und Seele erhabenes, doch mit den Eigenschaften höchster Geistigkeit begabtes Prinzip. Der Körper ist nach ihm anzusehen wie ein künstlicher Automat, den Gott verfertigt hat und womit er die Seele in äußerliche Beziehung gesetzt hat. Es kann aber auch Körper ohne Seele geben: so die Tiere. Ohne gleich den Monadologen die Seele selbst mit einem einfachen Element der körperlichen Substanz für wesentlich gleichartig zu halten, nahm er doch wie sie einen einfachen Sitz der Seele insofern an, als nach ihm die Seele nur in einem Punkte des Gehirns, welcher in der Zirbeldrüse gelegen sein soll, mit dem körperlichen Organismus in Wechselwirkung steht."

Konsequenter als Cartesius hat Geulincx Körper und Geist als schlechthin disparate Dinge statuiert, ohne wechelweisen Einfluß; „wenn wir die Eigenschaften des Körpers empfinden, ist es deshalb, weil Gott bei Gelegenheit der Bewegungen der Materie zugehörige Empfindungen in der Seele entstehen läßt, wo wir dann sagen, wir empfinden die Veränderungen im Körper; und wenn die Seele ihrerseits den Körper in Bewegung setzen will, so ist es ebenso Gott, der ihn statt ihrer bewegt."

Digitized by Google

„Leibniz fand es unangemessen, bei Betrachtung des Kausalzusammenhangs der physischen nnd psychischen Erscheinungen Gottes beständige Mitwirkung zuzuziehen und verlegte die ganze Wirksamkeit Gottes in dieser Beziehung in den Anfang. Hierdurch entstand das berühmte System der prästabilierten Harmonie, zugleich als monadologisch nnd idealistisch zu bezeichnen. Nach Leibniz liegen der ganzen Existenz der sogenannten Monaden einfache geistige, aber auf den verschiedensten Stufen des Bewußtseins bis ins Unbewußte herabsteigende Wesen unter, von denen die bewußten Seelen heißen. Jede Seele, d. i. bewußte Monade, schließt eine innere Welt selbständig erzengter Bestimmungen als Vorstellungen, Begehrungen ein, ohne einen eigentlichen Einfluß von anderen Seelen und überhaupt Monaden erfahren zu können; alle aber stehen in solcher einheitlicher Beziehung, daß sich nach Maßgabe der Veränderung, welche in der übrigen Welt der Monaden entsteht, die Zustände in jeder einzelnen durch ihre eigene Tätigkeit ändern."

Durch Spinoza hat „die Identitätsansicht zuerst eine bestimmte Begründung und konsequente Entwicklung" erfahren. Er nennt das gemeinsame Grundwesen, welches er dem Körperlichen und Geistigen und hiermit aller Existenz unterlegt, die „Substanz oder auch Gott".

„Kants System kommt bei übrigens fundamentaler Wichtigkeit doch hier nicht in gleichen Betracht als die Systeme seiner Nachfolger Fichte, Schelling und Hegel, insofern er dem Dasein der Materie Dinge an sich unterlegt, die aber für uns unerkennbar sind, hiermit auf eine tiefere Erörterung des Grundverhältnisses von Materie und Geist verzichtet."

„Nach Fichte beruht die Annahme einer dem Geiste äußeren Welt des sog. Nichtich dem geistigen Ich gegenüber nur auf Schranken der Tätigkeit des Ich selbst, die ihm aber durch nichts wirklich Äußeres gesetzt, sondern wie alles überhaupt nur Sache seines eigenen Wesens sind. Indem die ins Unbestimmte hinausstrebende Tätigkeit des Ich an diese Schranke sozusagen anstößt, gewinnt es Bestimmungen, die, obwohl im Grunde aus ihm selbst kommend, doch als etwas Äußeres gedeutet, als materielle Außenwelt vorgestellt und objektiviert werden."

Das Schellingsche Identitätssystem setzt „ein objektives Sein und ein subjektives Denken, die sich aber nicht äußerlich und undurchdringlich gegenüberstehen, wie es Kant will, sondern das

Denken und Sein, Subjekt und Objekt durchdringen sich wechselseitig". „Das Absolute Schellings, was sich von einer Seite als subjektiv, von anderer Seite als objektiv fassen läßt und in der Welt der Erscheinung sich von einer Seite als Natur, von anderer Seite als Geist darstellt, im Wesen aber identisch bleibt, stimmt hierin mit der göttlichen Substanz Spinozas überein, die sich einmal unter dem Attribut des Denkens, dann wieder unter dem Attribut der Ausdehnung fassen läßt, dabei aber im Wesen identisch bleibt." Dabei macht sich aber das Absolute selbst „durch einen lebendigen Prozeß zum Subjektiven und Objektiven und mittels des relativen Übergewichts des einen und anderen zum Körperlichen und Geistigen, setzt sich sozusagen darin um und entwickelt sein Leben."

„Die sogen. dialektische Methode Hegels sucht das Wesen der Dinge durch die sogen. Selbstbewegung ihres Begriffes darzustellen. Durch Vertiefung in einen reinen Begriff entsteht nämlich nach Hegel von selbst eine Nötigung über denselben als einen für sich unhaltbaren zum höheren Gegensatze desselben denkend fortzuschreiten und in diesem als in einer höheren Bestimmtheit sich selbst aufheben zu lassen." In der absoluten Idee sucht Hegel „das Prinzip realer Existenz, stellt sie gleichsam als Gott vor der Weltschöpfung dar, welcher aber durch seine Selbstaufhebung in Natur und Geist diese reale Existenz sich selbst gibt, was jedoch auch nicht als Sache zeitlichen Geschehens, sondern nur begrifflicher Entwicklung zu fassen. Diese Entwicklung wird von Hegel in zwei anderen Teilen seines Systems, der Naturphilosophie und Philosophie des Geistes, ausgeführt. Indem die absolute Idee durch Selbstnegation zuvörderst sich in der Natur aufhebt, wird sie nach Hegels hier gebrauchtem Ausdruck sich selbst äußerlich. Die Natur ist nach ihm die Idee in der Form des Andersseins, die außer sich gekommene, sich selbst entfremdete, von sich abgefallene Idee, der unaufgelöste Widerspruch." „Inzwischen strebt die Natur aus diesem Zustande der Äußerlichkeit, Gebundenheit, Zufälligkeit, Unangemessenheit des einzelnen zur Idee im Wege dialektischer Fortschreitung durch den mechanischen, physischen, organischen Naturprozeß stufenweise wieder heraus, um sich endlich wieder einheitlich durch Aufhebung der Natur in den Geist zusammen- und abzuschließen." „Im weiteren dialektischen Fortschritte durch die Geistesphilosophie steigert sich nun die absolute Idee über die in der Naturphilosophie

erreichte Stufe hinaus. Zuvörderst als sogen. suhjektiver Geist zur Seele, dem Bewußtsein im engeren Sinne, dem Selhstbewußtsein, der Vernunft, heht sich dann weiter zum sogen. objektiven Geist in Recht, Sittlichkeit, Staat auf und gelangt endlich als sogen. absoluter Geist in Kunst, Religion und Philosophie zum Gipfel der Steigerung, sodaß schließlich im philosophischen Bewußtsein des Menschen das Wesen der Existenz ahsolut begriffen wird, und Gott seiner sich vollständig in seiner Wirklichkeit und Wahrheit bewußt wird, sofern der ahsolute Geist mit Gott auf seiner höchsten Bewußtseinsstufe identifiziert wird." — „Natur und Geist sind also nach Hegel nur verschiedene Stufen dialektischer Entwicklung der ahsoluten Idee. Indeß er die absolute Idee wie den Gott vor der Weltwirklichkeit, gleichsam wie das reine abstrakte begriffliche Dasein Gottes faßt, faßt er die Natur als den in die Weltwirklichkeit eingeborenen oder sich zur Weltwirklichkeit erfüllt hahenden Gott; den Geist aber als den durch Vermittelung der Natur nun auch zum Bewußtsein seiner Wirklichkeit gelangten Gott." „Hegel stimmt mit Schelling in gleicher Abweichung von Kant und Fichte darin überein, daß er eine reale Existenz statuiert, die sich mit ihrer eigenen Erkenntnis erfaßt und durchdringt." — „Um zur kurzen Erläuterung ein Bild unterzulegen, so sucht die dialektische Methode Hegels aus dem Kreise als der einfachsten runden Figur die Ellipse, Parabel und Hyperbel und alle Figuren höherer Ordnung als höhere Bestimmungen des Kreises abzuleiten, worin er aufgehohen, enthalten sei. Nun ist der Kreis wirklich als hesonderer Fall in der Ellipse so aufgehoben enthalten. Aher der Mathematiker weiß auch, daß es unmöglich ist, aus dem einfachen Kreise die höhere Ellipse ahzuleiten, sondern umgekehrt den Kreis als hesonderen Fall aus der Ellipse."

Herbart findet, daß die Grundlage der Existenz von vorn herein in einer Vielheit von einfachen Wesen besteht, die ihrer Existenz nach völlig unabhängig von einander, absolut einfach, an sich unveränderlich, unräumlich und unzeitlich, weder körperlich noch geistig zu denken sind, indem Veränderung, Raum und Zeit, Körper und Geist schon immer Beziehungen einschließen, mithin noch nicht das letzte sind, worauf man zurückzugehen hat, vielmehr durch äußere Beziehungen, in welche die einfachen sog. realen Wesen treten können, zustande kommen." Die einfachen Wesen besitzen verschiedene Qualitäten und nach

Maßgabe des Gegensatzes zwischen den Qualitäten ist Anlaß zur Störung ihres Zustandes. Diese Störung wird aber durch die Selbsterhaltungen verhindert. „Zu den einfachen Wesen gehören nach Herbart auch die Seelen.“ Ihre Selbsterhaltungen gegen die Störungen von anderen einfachen Wesen sind die Vorstellungen. „Auch jeder Körper ist ein System einfacher realer Wesen, die durch ihre Verhältnisse den Schein der Materialität produzieren. Indem jede Seele mit einem solchen System in nächsten Beziehungen steht, hat sie ihren Leib daran. Die Wechselwirkung zwischen Leib und Seele beruht auf den Verhältnissen gegenseitiger Anregung zur Störung und abwehrender Selbsterhaltungen.“

Schopenhauer geht von der „Erfahrungstatsache“ aus, daß unser Wille sich unmittelbar als eine bewegende, tätige Triebkraft unseres Leibes darstellt. Sofern aber körperliche Triebkräfte auch in der unbewußten Natur vorkommen, identifiziert er diese mit dem Wesen des in unserem Leibe waltenden Willens, indem er dasselbe von dem Bewußtsein trennbar ansieht und als das Grundwesen aller Existenz, als das Ding an sich, was der Existenz zugrunde liegt, auffaßt. Dieser Wille der Natur erzeugt sich nun erst das Gehirn als Organ der Vorstellung und des Bewußtseins. Hiermit werde der Wille seiner selbst bewußt und gewinne die Vorstellung von dem Leibe, der in der Tat nur für die Vorstellung als solcher erscheint, indem das Wesentliche des Leibes immer Wille sei.“ Von einem idealistischen Ausgangspunkte ausgehend ist Schopenhauers Philosophie doch „eine deterministische, pessimistische, atheistische und wird das Schicksal solcher Lehren haben.“

„Im schließlichen Rückblick auf die Hauptsysteme, welche die neue Zeit erzeugt hat, und womit sie über frühere hinausgegangen ist, findet man sich zu dem Bekenntnis genötigt, daß eine zufriedenstellende Ansicht über die Beziehung von Leib und Seele oder allgemeiner die Grundbeziehung des materiellen und geistigen Prinzips noch nicht vorhanden ist.“

IV. Grundtatsachen und hierauf gestützte Grundformeln der Beziehung von Leib und Seele mit den wichtigsten Folgerungen daraus. Zur Anerkennung muß gelangen: 1) das Verhältnis der Wechselbedingtheit zwischen Leib und Seele; 2) die Einheit des Geistes gegenüber der körperlichen Mannigfaltigkeit. Demgemäß lassen sich folgende zwei Formeln aufstellen: die Seele ist 1) „ein einheitlich verknüpfendes Prinzip der körperlichen Mannigfaltigkeit und Auseinanderfolge“; sie ist

2) „die Seite oder das Vermögen der Selbsterscheinung dessen, was als Körper äußerlich erscheint."

Die erste Formel stützt sich auf folgende Erfahrungstatsachen: „Die Zusammenstellung der mannigfachen Teile unseres Organismus und Auseinanderfolge seiner Tätigkeiten, welche den lebendigen Bestand derselben charakterisieren, kann sich nur nach Maßgabe forterhalten, als dieser Zusammenstellung und Auseinanderfolge eine die Einheit des Bewußtseins in sich tragende Seele zugehört. Umgekehrt kann die Seele nach allen Erfahrungen, die wir machen können, nicht ohne einen unterliegenden, zusammengesetzten körperlichen Organismus und Lebensprozeß bestehen, so daß ihr Bestand, ihre Entwicklung und ihre Tätigkeit selbst mit der Funktion, die lebendige Zusammenstellung und Aufeinanderfolge unseres körperlichen Organismus aufrecht zu halten, solidarisch zusammenhängt. So wie die einheitliche Seele im ganzen nur auf Grund eines zusammengesetzten Organismus und Lebensprozesses, kann auch jede besondere einheitliche Bestimmung der Seele, Empfindung, Gedanken, so viel wir nach Erfahrung wissen und schließen können, nur auf Grund besonders gearteter zusammengesetzter Organisations- und Lebensbedingungen und Bestimmungen innerhalb des Organismus und Lebensprozesses, der unserer ganzen Seele unterliegt, entstehen und bestehen, wie denn selbst die einfachste Empfindung in uns nicht von einem ebenso einfachen Bewegungsmomente, sondern von einem Bewegungsvorgange, wahrscheinlich Schwingungsvorgange getragen wird, dessen Mehrheit von Momenten durch sie ebenso in eine einfache innerliche Selbsterscheinung verknüpft sind, als die Totalität der Bewegungsvorgänge, die unserer Seele unterliegen, in eine einheitliche."

Die zweite Formel faßt folgende Erfahrungstatsachen zusammen: „Unsere Seele mit allen ihren Bestimmungen, Empfinden, Fühlen, Denken, Wollen, ist tatsächlich eine Sache der Selbsterscheinung, sofern es keines gegenüberstehenden Subjekts für sie bedarf, um in die Erscheinung zu treten. Unser Körper mit allen seinen Bestimmungen, Ausdehnung, Dichtigkeit, Bewegung und deren Verhältnisse ist tatsächlich nur eine Sache der äußeren Erscheinung; d. h. es bedarf eines gegenüberstehenden Subjekts oder doch (sofern wir auch Teile unseres eigenen Körpers wahrnehmen können) eines dem wahrgenommenen Körperteile äußerlich gegenüberstehenden empfindenden Organs, um körperlich zu erscheinen." Daß beiden Erscheinungsweisen ein und dasselbe

Wesen zugrunde liegt, wird durch folgende Tatsachen erhärtet: 1) „Es ist ein allgemeines Faktum, das ein und dieselbe Sache von verschiedenem Standpunkte und für verschiedene darauf Stehende verschieden erscheint, also ist die verschiedene Erscheinung des zueinander gehörigen Körperlichen und Geistigen auch hieraus erklärbar, da wir in der Tat stets einen verschiedenen resp. äußeren und inneren Standpunkt der Betrachtung dabei unterliegend fanden. Also können wir uns auch denken, daß es nur ein und dasselbe Wesen ist, was als Seele oder Körper erscheint." 2) „Es besteht ein faktischer Parallelismus der Veränderungen des Körperlichen und Geistigen. In der Tat aber muß ein solcher stattfinden, wenn Leib und Seele eine verschiedene Erscheinungsweise desselben Wesens sind, da nach Maßgabe als sich das Wesen ändert, beide Erscheinungsweisen sich im Zusammenhange ändern müssen." 3) „Eine Seele kann nichts vom Dasein einer anderen Seele unmittelbar, wohl aber durch Vermittlung des Leibes derselben erfahren. In der Tat kann das nicht anders sein, wenn jede Seele von der anderen eben nur den Körper als Erscheinung hat. Sollten dagegen Körper und Seele zwei verschiedene substanzielle Grundwesen sein, so müßte man voraussetzen, daß die Seele am leichtesten und unmittelbarsten auch der anderen Seele gewahr würde, die mit ihr gleichen Wesens ist." 4) „Eine Seele vermag vom Leibe gerade den Teil nicht leiblich wahrzunehmen, an dessen Dasein und Daseinsweise ihre bewußte Selbsterscheinung vorzugsweise gebunden ist; unsere Seele, namentlich nicht das Gehirn und seine Prozesse, wenn sie schon Teile, die im Znsammenhang mit jenen die allgemeine Möglichkeit der Selbsterscheinung mit begründen und insofern auch zum Leib gerechnet werden, als körperlich wahrzunehmen vermag. In der Tat kann dies nicht anders sein, wenn das, was nach außen als körperliches Gehirn erscheint, nach innen als bewußtes Seelenwesen erscheint, das dann eben nicht als körperliches Gehirn nach innen erscheinen kann."

„Wenn Körperliches und Geistiges überall durch Wesensidentität verknüpft zusammenhängen, so werden nach Maßgabe als die körperlichen Prozesse auseinanderfließen, auch die zugehörigen geistigen auseinanderfließen, und umgekehrt; es wird also dem Kausalablanf im körperlichen Gebiete ein Kausalablauf im geistigen Gebiete zugehören und umgekehrt oder mit anderen Worten, der eine Kausalablauf des an sich identischen Wesens

wird, je nachdem man sich auf äußeren oder inneren Standpunkte dagegenstellt, als Kausalahlauf des Körpers oder Geistes erscheinen, und diese zwei Erscheinungsweisen werden untereinander wie zwei Seiten derselben Sache zusammengehören, jede aber auch einen Verfolg für sich zulassen."

Die entwickelte Ansicht schließt ein vierfaches Prinzip der Betrachtung des Gehietes der Existenz ein: 1) das Prinzip der gemeinen Betrachtungsweise, wo hald die körperliche, bald die geistige Seite der Existenz ins Auge gefaßt wird, ein wechselseitiger Einfluß von Körper und Geist angenommen wird; 2) das Prinzip einer rein und konsequent durchgeführten Naturwissenschaft; 3) das Prinzip einer ebenso rein und konsequent durchgeführten Geisteswissenschaft; 4) das Prinzip einer beide vorigen Betrachtungsweisen verknüpfenden Wissenschaft. Diese vier Betrachtungsweisen werden an dem Beispiel erläutert, daß *A* dem *B* einen Auftrag giht, den *B* ausführt.

Die hier vertretene Ansicht vom Verhältnis zwischen Leih und Seele tritt in schroffen Gegensatz gegen die monadologische Auffassung, der sie als „synechologische" gegenühergestellt werden kann, „indes sie sozusagen in die Mitte der ührigen Auffassungsweisen tritt und geeignet ist, zwischen ihnen zu vermitteln." Mit der Spinozistischen Ansicht hat sie „den parallelen Ahlauf des körperlichen und geistigen Geschehens gemein, unterscheidet sich aher dadurch von derselben, daß sie die Verschiedenheit des körperlichen und geistigen Gehiets nicht in einer unerklärlich verschiedenen Auffassung derselben Suhstanz von demselben Standpunkt des erkennenden Suhjekts aus sucht, sondern auf eine verschiedene Erscheinungsweise je nach dem verschiedenen Standpunkte der Auffassung zurückführt." „Mit der Schellingschen Identitätsansicht hegegnet sie sich insofern, als diese den Unterschied des Geistigen und Körperlichen auf ein relatives Übergewicht von Suhjektivität und Objektivität in der Selhstevolution des Ahsoluten zurückführt; nichts aher hindert, den inneren und äußeren Standpunkt der Betrachtung, von dem aus nach unserer Ansicht etwas als geistig oder körperlich erscheint, als suhjektiv oder ohjektiv zu fassen." Sie hat zugleich „eine ganz materialistische Seite, indem nach ihr der Geist, die Seele immer nach Maßgabe lebendig bestehen kann, als das was auf äußerem Standpunkt als lebendiger Leib erscheint, besteht, und eine ganz idealistische Seite, sofern die leibliche Erscheinung nur in Abhängig-

keit von der geistigen Erscheinung bestebt und die ganze materielle Welt nur der äußere Ausdruck der göttlichen Selbsterscheinung ist.“ „Sie läßt ferner erkennen, wie die dualistiscbe Ansicht aus der Verwechselung der zwei ganz verschiedenen Auffassungsweisen, welche dasselbe Wesen von zwei ganz verscbiedenen, gegen einander äußerlichen Standpunkten darbietet, mit zwei ganz verschiedenen gegen einander äußerlicben Wesen hervorgebt; sie stellt endlich den erklärenden und klärenden Gesicbtspunkt ebenso für die Uransicht der Völker, welche Materielles und Ideelles, Körperliches und Geistiges nicht scheidet noch unterscheidet, wie für die vielfachen Ansichten, in denen beides unklar vermischt wird.“

V. Vertiefung der Grundansicht. „Die auf faktischer Grundlage gegebene Erklärung, daß Leib und Seele zwei verschiedéne Erscheinungsweisen desselben Wesens sind, läßt die Frage nacb der Beziehung übrig, welche überhaupt Erscheinung zum Wesen hat.“ Es ist eine doppelte Ansicbt möglich: „Nach der einen giht es doch abgesehen vom Zusammenhange der Erscheinungen ein Etwas so zu sagen dahinter, was den Zusammenhang der Erscbeinungen selbst vermittelt, wodurch dieselben als wie durch einen festen Kern zusammengehalten werden, wovon sie abhängen, wovon sie ausgehen, was man als Wesen der Existenz faßt, oder eine Mehrheit solcher Wesen, aus deren Wechselbeziehungen die Erscheinungen selbst ahleithar sind, eine Ansicht, mit welcher die gemeine am meisten übereinkommt, und welcbe philisophischerseits namentlich durch Kant und Herbart vertreten wird, aber aucb dem spinozistischen und dualistischen Systeme unterliegt. Nach der anderen Ansicht bildet der Zusammenhang der möglichen nnd wirklichen Erscheinungen selbst das Wesen der Existenz, obne daß ein davon unabhängiges, abgesondert davon denkhares Wesen oder eine Mehrheit solcher Wesen dahinter noch anzunehmen, indem der Kern, der Halt, das Band, was man für die Erscheinungen sncht, in der Einheit des göttlichen und geschöpflichen Bewußtseins einerseits, ihren unveränderlichen Gesetzen und Verbältnissen andererseits begründet liegt; eine Ansicht, der wir selbst geneigt sind, beizutreten.“

So resultiert die Weltansicht:

„Alle Erscheinungen, die es giht, sind Sache eines allgemeinen, in einer höchsten Einheit verknüpften und abgeschlossenen Bewußtseins. Außerhalh desselhen gibt es nichts, was gewußt werden kann, und was es überhaupt außer dem aktualen Welt-

bewußtsein gibt, ist nur die Möglichkeit ferneren aktualen Bewußtseins oder sind Abstrakta daraus, die schließlich in dasselbe Bewußtsein fallen. Dieses allgemeine Bewußtsein, das göttliche, aber gliedert sich in untergeordnete Bewußtseinseinheiten, die Seelen, davon jede nur einen gewissen Teil des allgemeinen Bewußtseinsinhalts in sich schließt, den anderen ausschließt, indes das allgemeine Bewußtsein nicht nur den Bewußtseinsinhalt aller Seelen, sondern auch [die] das Bewußtsein übergreifenden Beziehungen zwischen ihnen einschließt, also nicht in ihrem Einzelbewußtsein, noch der Summe derselben aufgeht."

„Nicht nur über den Grund, sondern auch über das Wesen der höchsten, letzten, d. i. göttlichen Bewußtseinseinheit läßt sich nicht weiter spekulieren, sondern es ist ein Grenzpunkt der Spekulation hier zu sehen. Wohl aber läßt sich die, der göttlichen gleichartige, weil in ihr begründete Bewußtseinseinheit in uns selbst aufzeigen — wie sie ist, hat man sie zu nehmen —, sie läßt sich nach den ihr untergeordneten und von ihr abhängigen Verhältnissen und Bestimmungen ins Auge fassen, und es läßt sich unter Wahrung eines Prinzips der Erweiterung und Steigerung, welches bei aller Übertragung von Verhältnissen unserer Endlichkeit auf die Sphäre des Göttlichen maßgebend sein muß, ein Gedanke der göttlichen Bewußtseinseinheit und ihrer Bestimmungen darnach fassen."

114. Über die Beziehung zwischen Leib und Seele; Pflanzenseele (1—299).

115. Naturphilosophie; ältere Bearbeitung (1—343).

116. Naturphilosophie; älteste Bearbeitung (1—433).

117. Vorbereitung zur zweiten Auflage von Einige Ideen zur Schöpfungs- und Entwicklungsgeschichte der Organismen (1—388).

118. Ausführungen zur Grundbeziehung des materiellen und geistigen Prinzips (1—545).

119. Ausführungen zur Naturphilosophie, ältere Bearbeitung (1—491).

120. Ausführungen zur Naturphilosophie; älteste Bearbeitung (1—360).

121—124. Zur Naturphilosophie (1—577); (1—74); (1—403); (1—479).

125. Über die Wirkung von Opium und Alkohol (1—119).

126. Notizen zur Psychophysik (1—126).

127. Exzerpte zur Psychophysik (1—96).

128—130. Notizen zur Naturphilosophie (1—307); (1—548); (1—324).

Versuche und Beobachtungen.

O; 131—134. P; 135—138. Q; 139—143. R; 144. S; 145.

131. Versuche zur experimentellen Ästhetik (1—95); Punkt über Strich von gegebener Länge; Ellipsen; Rechtecke; Kreuze.

132. Beobachungen über wohlgefällige Seitenverhältnisse, insbesondere am Rechteck (1—137).

133. Beobachtungen und Berechnungen über den goldenen Schnitt (1—276).

134. Berechnungen zu ästhetischen Experimenten (1—101).

135. Material zu den Versuchen zur experimentellen Ästhetik.

136. Beobachtungsmaterial über Assoziation von Farben und Vokalen (1—38).

137. Augenmaßversuche (1—88).

138. Augenmaßversuche; Berechnungen (1—243).

139. Versuche über Gehör und Gesicht (1—131).

140. Gewichtversuche (1—84).

141; 142. Tastsinnversuche (1—110); (1—45).

143—145. Berechnungen zu den Tastsinnversuchen (1—145); (1—661); 1—608).

Kollektivmaßlehre.

T; 146—149. U; 150—155.

146—149. Manuskripte zu dem im Auftrage der Gesellsch. d. Wissensch. im Jahre 1897 herausgegebenen Werke: „Kollektivmaßlehre“ (1—195); (1—181); (1—183); (1—214).

150—155. Fragmente zur Kollektivmaßlehre: Studien über Asymmetrie, meteorologisches Material (1—186); Maße der Roggenhalme (1—30); Maße der Galleriegemälde (1—210); Wahrscheinlichkeitsbestimmungen (1—143); Materialien und Ausführungen zur Kollektivmaßlehre (1—86); (1—124).

Druckfertig erklärt 6. VIII. 1905.]

Nachträgliche Bemerkung zu meiner II. Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz.[1])

Von

A. Mayer.

Meine letzte Note gibt zwar in ihrem Satze V ausdrücklich an, wie man aus den vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen des Variationsproblems I in allgemeinster Weise solche Lösungen dieser Differentialgleichungen ableiten kann, welche mit einem System Lösungen des Hilbertschen Problems II in den Beziehungen stehen:

$$(\alpha) \qquad y_i' = p_i, \quad \lambda\varrho = \mu\varrho.$$

Dagegen bin ich erst, als ich meine Resultate mit denen vergleichen wollte, welche Hilbert in der S. 67 zitierten Arbeit unter der Voraussetzung $r = 0$ für das Problem I entwickelt, darauf aufmerksam geworden, daß ich ganz vergessen hatte, auch ausdrücklich hervorzuheben, wie man diese zugehörigen Lösungen des Problems II erhält. Im Grunde ist das allerdings selbstverständlich; immerhin läßt aber diese Versäumnis doch eine gewisse Lücke in meinem Aufsatz zurück, und daher möchte ich ihm die folgende kurze Bemerkung nachschicken, die direkt an den Satz VI von S. 63 anknüpft:

Zur gleichzeitigen Auffindung solcher zusammengehöriger Lösungen der Differentialgleichungen (2) und des Problems II ergibt sich aus dem Satze V und den Identitäten (28) zunächst unmittelbar die folgende Regel:

Nachdem man der Vorschrift des Satzes V gemäß aus den vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (2) das neue System Lösungen:

$$(21) \qquad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \ldots, a_n), \quad \lambda\varrho = \bar{\lambda}\varrho(x, a_1, \ldots, a_n)$$

1) S. 49—67 dieses Bandes.

dieser Gleichungen abgeleitet hat, substituiert man diese neuen Lösungen in die partiellen Differentialquotienten der Funktion Ω nach den y_i' und eliminiert aus den so erhaltenen Werten:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \bar{v}_i(x, a_1, \ldots, a_n)$$

die n Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ mittels der n ersten Gleichungen (21). Hat sich hierdurch ergeben:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = (\bar{v}_i) \equiv w_i(x, y_1, \ldots, y_n),$$

so löst man diese n Gleichungen zusammen mit den r gegebenen Bedingungsgleichungen des Problems I:

$$(1) \qquad f\varrho = 0$$

nach den $n + r$ Unbekannten $y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ auf. Die Auflösungen (α) dieser $n + r$ Gleichungen bilden dann ein System Gleichungen, denen die Lösungen (21) identisch genügen und deren rechte Seiten zugleich Lösungen des Problems II sind.

Die Berechnung der Werte der partiellen Differentialquotienten von Ω ist jedoch nur ein unnötiger Umweg.

Die Lösungen (21) genügen nämlich einerseits den Gleichungen (1) und (β), andererseits aber selbstverständlich auch den Gleichungen:

$$(\gamma) \qquad y_i' = \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x}, \quad \lambda\varrho = \bar{\lambda}\varrho.$$

Mit den letzteren Gleichungen befriedigen sie daher zugleich diejenigen, die aus diesen Gleichungen entstehen, wenn man $a_1, \ldots, a_n$ mit Hilfe der n ersten Gleichungen (21) eliminiert, also müssen die auf diese Weise erhaltenen Werte der y_i' und $\lambda\varrho$ ausgedrückt in den Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$ notwendig zusammenfallen mit den Auflösungen (α) der Gleichungen (1) und (β).

Man erhält demnach diejenigen Lösungen des Problems II, mit denen die Lösungen (21) der Differentialgleichungen (2) durch die Formeln (α) verbunden sind, einfach dadurch, daß man in den aus (21) folgenden Gleichungen (γ) für $a_1, \ldots, a_n$ die Auflösungen der n ersten Gleichungen (21) einsetzt. —

Druckfertig erklärt 21. VII. 1905.]

Digitized by Google

Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung.

Von

Johannes Friedel.

Im folgenden sollen Versuche beschrieben werden, die angestellt wurden zur Prüfung der von Herrn Prof. Wiener aufgestellten Theorie des optischen Verhaltens von Mischkörpern mit geschichtetem Bau.[1]) Das wesentlichste Resultat dieser Theorie besteht darin, daß ein solcher Lamellarkörper sich wie ein einachsiger Kristall verhält, dessen optische Achse senkrecht zur Schichtung steht, vorausgesetzt, daß die Dicken der einzelnen Lamellen klein gegen die Wellenlänge sind, und die Dielektrizitätskonstanten der verwendeten Substanzen verschiedene Werte besitzen. Eine experimentelle Untersuchung derartig geschichteter Medien ist nicht nur an sich von Interesse, sondern es eröffnet sich hierbei die Aussicht, auf indirekte Weise die Frage zu entscheiden, ob die optischen Eigenschaften der Körper beim Übergang zu sehr geringen Schichtdicken dadurch eine Änderung erfahren, daß die molekularen Eigenschaften durch die des benachbarten Mediums in irgend einer Weise modifiziert würden.

Auf Anregung des Herrn Prof. Wiener hatte ich schon vor zwei Jahren im hiesigen physikalischen Institut mit Untersuchungen hierüber begonnen, die aber infolge technischer Schwierigkeiten erst vor wenigen Monaten zu entscheidenden Versuchen geführt

---

1) Wiener, Leipz. Ber. 54, S. 282, 1902. Wiener, Physik. Ztschr. 5, S. 332, 1904.

haben. Über Ausführung und Resultate dieser Versuche soll kurz berichtet werden, eine ausführliche Darstellung wird an anderer Stelle geschehen.

Herstellung der geschichteten Medien.

Ein Körper, der den Voraussetzungen der WIENERschen Theorie genügt, muß „aus zwei Stoffen von verschiedenen Brechungskoeffizienten bestehen, die in parallelen Schichten jeweils konstanter und im Vergleich zur Lichtwellenlänge kleinen Dicke miteinander abwechseln." Derartige Lamellen können durch Zerstäuben einer Kathode im Vakuum erhalten werden. Es wurden Silber- und Kupferbleche als Elektroden verwendet, die gewonnenen Niederschläge durch Einwirkung von Joddampf in das Jodid bezw. Jodür übergeführt, sodaß der erhaltene Körper aus einer großen Anzahl dünner Schichten von Silberjodid und Kupferjodür bestand.

Das Zerstäuben geschah in einem großen Rezipienten, der auf eine starke Glasplatte aufgeschliffen war. Die Spiegelglasplatte, auf welche die Lamellen niedergeschlagen wurden, lag fest in der Mitte, die Kathoden waren so angebracht, daß man sie durch Drehungen von außen abwechselnd über die Glasplatte bewegen konnte. Außerdem waren noch zwei Glimmerplatten, ebenfalls von außen drehbar, im Rezipienten angebracht, durch welche bestimmte Teile der Glasplatte gegen die Zerstäubungsprodukte abgeschirmt werden konnten. Durch diese Vorrichtung wurde erreicht, daß man in der Mitte der Glasplatte einen Lamellarkörper, an den Seiten jedoch zwei Gebiete erhielt, von denen das eine nur mit Silber, das andere nur mit Kupfer bedeckt war. Hierdurch war es möglich, zu bestimmen, in welchem Maße die einzelnen Substanzen im geschichteten Körper vertreten waren. Auch konnte man mit Hilfe dieser seitlichen Gebiete feststellen, daß die einzelnen Substanzen an sich keine Doppelbrechung zeigten.

Die WIENERschen Formeln erfordern die Kenntnis der optischen Eigenschaften der einzelnen Substanzen. Für Jodsilber ist die Dispersion durch die Messungen von WERNICKE[1]) bekannt. Die Brechungsexponenten des Kupferjodürs sind bisher nicht gemessen; ich bestimmte sie in bekannter Weise nach der Methode

1) WERNICKE, Pogg. Ann. 159, S. 217, 1876.

der Interferenzen. Die Absorption des Kupferjodürs ist, ebenso wie die des Jodsilbers, für die benutzten Farben sehr gering.

Gang der Untersuchungen.

Die Reihenfolge der Messungen ist bestimmt durch die Wienerschen Formeln[1]):

$$n_0^2 = \delta_1 n_1^2 + \delta_2 n_2^2$$

$$\frac{1}{n_a^2} = \frac{\delta_1}{n_1^2} + \frac{\delta_2}{n_2^2}$$

worin n_1, n_2 die Brechungsexponenten,

δ_1, δ_2 die relativen Dicken der einzelnen Substanzen bedeuten.

Es wurden zunächst Dickenmessungen ausgeführt, sodann wurde der Brechungsexponent in der Achsenrichtung n_0 bestimmt, und schließlich zur indirekten Bestimmung von n_a der Betrag der Doppelbrechung ermittelt.

Die Dickenmessungen nach der Wienerschen Methode[2]) geschahen am Lamellarkörper selbst, sowie an den seitlichen Gebieten, wo die Substanzen getrennt niedergeschlagen waren. Sind d_1 und d_2 die Dicken der letzteren, so findet man:

$$\delta_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \quad \delta_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2}.$$

Die Messung von n_0 wurde durch Bestimmung der Interferenzen im reflektierten, spektral zerlegten Lichte ausgeführt, und auf Grund der gewonnenen Werte wurde eine Dispersionskurve gezeichnet, so daß direkte Vergleichung zwischen Theorie und Experiment möglich war.

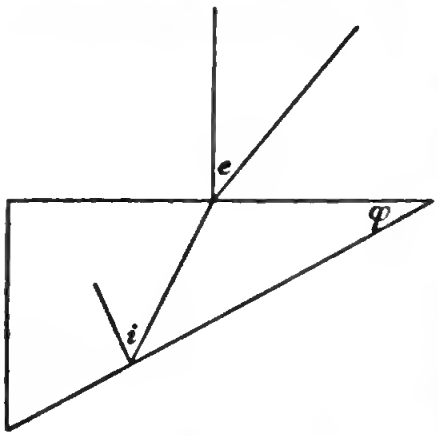
Die Messung der sehr geringen Doppelbrechung gelang, indem der Gangunterschied der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten durch ein 0,086 λ-Glimmerplättchen kompensiert wurde. Zwischen den Hauptbrechungsexponenten und der Phasendifferenz Δ einer Kristallplatte ($\perp$ zur Achse) besteht nun die Beziehung:

$$\Delta = \frac{d}{\lambda} n'^2 \sin^2 i \cdot \frac{n_0^2 - n_a^2}{2 n_0 n_a^2} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} n'^2 \sin^2 i \left(\frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{n_a^2}\right)\right],$$

1) Wiener, l. c.

2) Wiener, Wied. Ann. 31, S. 635, 1887.

wenn d die Dicke, i den Einfallswinkel und n' den Brechungsindex des einschließenden Mediums bezeichnet. Mit Hilfe der bereits ermittelten Werte n_0 kann man zu jedem Gangunterschied den entsprechenden Wert von n_a rückwärts berechnen und mit dem theoretischen vergleichen. Die Messungen geschahen unter Verwendung von Lichtfiltern in rotem (657 $\mu\mu$), grünem (556 $\mu\mu$) und blauem Licht (460 $\mu\mu$). Zur Beseitigung der mehrfach reflektierten Strahlen waren die zu untersuchenden Spiegel zwischen zwei identische Prismen mit Kanadabalsam gekittet. Bezeichnet e den Einfallswinkel des in Luft auf das Prisma fallenden Strahles (s. Fig.), φ den brechenden Winkel, n' den Brechungsexponenten des Prismas, so folgt für den Einfallswinkel i des im Glas auf die Schicht einfallenden Strahles:



$$\sin i = \frac{1}{n'}(\sin e \cos\varphi + \sqrt{n'^2 - \sin^2 e} \cdot \sin\varphi)$$

Resultate.

Der Spiegel, dessen Untersuchung im folgenden beschrieben werden soll, wurde gewonnen, indem Silber jedesmal eine halbe, Kupfer jedesmal eine ganze Minute zerstäubt wurde, der erhaltene Körper bestand aus 70 Lamellen, er besaß eine Dicke von 2,163 μ. Die relativen Dicken bestimmten sich zu

$$\delta_1 = 0{,}496 \text{ für Silberjodid},$$
$$\delta_2 = 0{,}504 \text{ für Kupferjodür}.$$

Es war somit die mittlere Dicke einer

$$\text{Silberjodid-Lamelle} = 30{,}29\ \mu\mu$$
$$\text{Kupferjodür-Lamelle} = 30{,}77\ \mu\mu.$$

Die Ergebnisse der Interferenzbeobachtungen sind in folgender Tabelle vereinigt, und zwar habe ich der Kürze halber die direkten Beobachtungen, nicht die durch graphische Interpolation gewonnenen wiedergegeben, zumal die Unterschiede geringfügig sind:

Tabelle I.

Ordn.	λ	n_0 (beob.)	n_1	n_2	n_0 (ber.)
13	680,9	2,046	2,140	1,935	2,040
14	635,1	2,055	2,155	1,950	2,054
15	598,0	2,073	2,180	1,965	2,075
16	565,2	2,090	2,195	1,985	2,092
17	537,2	2,111	2,220	2,005	2,114
18	512,6	2,133	2,250	2,025	2,139
19	493,2	2,166	2,280	2,045	2,165
20	475,7	2,199	2,310	2,080	2,197

Eine genaue Prüfung der Theorie ist in diesem Ergebnisse bei Berücksichtigung der verhältnismäßig geringen Unterschiede der Brechungsexponenten nicht enthalten. Diese liefert erst die Bestimmung der Phasendifferenzen. Dabei war für jede Farbe der Winkel e einmal $= 22{,}16^0$, das andere Mal $= 17{,}66^0$. Ferner war $\varphi = 11{,}80^0$, die Brechungsexponenten des Prismas für die drei Farben waren 1,520 bezw. 1,525 bezw. 1,530. Folgende Tabelle giebt die Resultate der Messungen.

Tabelle II.

λ	i	n_1	n_2	Δ (beob.)	Δ (ber.)	n_0(beob.)	n_0 (ber.)	n_a	n_a (ber.)
657	26,17	2,145	1,935	0,0038	0,0040	2,044	2,042	2,034	2,031
	23,31			0,0029	0,0032			2,034	
556	26,12	2,200	1,995	0,0039	0,0042	2,097	2,099	2,088	2,089
	23,27			0,0034	0,0034			2,087	
460	26,07	2,365	2,110	0,0059	0,0064	2,236	2,240	2,223	2,226
	23,24			0,0048	0,0051			2,222	

Beide Tabellen zeigen, daß die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung innerhalb der Fehler eine hinreichend genaue ist. Diese Messungen (zusammen mit den übrigen von mir ausgeführten) gehen die Berechtigung, im Prinzip die Wienersche Theorie als bestätigt anzuerkennen. Weitere Versuche, welche die Frage einer etwaigen Grenze ihrer quantitativen Gültigkeit

und die Möglichkeit einer etwaigen Modifizierung entscheiden sollen, beabsichtige ich demnächst auszuführen.

Die Versuche von Braun.

Analoge Versuche für elektrische Wellen sind bereits von Braun ausgeführt worden; er zeigte, daß ein geschichtetes Dielektrikum, das aus Backsteinen hergestellt war, sich wie ein doppelbrechender Körper verhält.[1]) Vor kurzem hat nun Braun ähnliche Untersuchungen auf optischem Gebiete veröffentlicht, die also den gleichen Zweck wie die meinigen hatten.[2]) Er hatte zur Schichtung dünne Häute von Kollodium und Aloëharz verwendet und auf diese Weise einen Körper gewonnen, an dem eine verhältnismäßig starke Doppelbrechung zu konstatieren war. Wendet man die Wienersche Theorie auf diese Substanzen an, so ergibt sich folgendes: Die Brechungsexponenten der einzelnen Stoffe sind 1,517 und 1,56. Nach den obengenannten Formeln berechnet sich dann für gleiche Schichtdicken der Unterschied der Hauptbrechungsexponenten zu 0,0006, eine Doppelbrechung, die bei der großen Zahl von Schichten wohl meßbar wäre. Das Verhalten der Braunschen Präparate ist aber nach seinen eigenen Angaben in erster Linie darauf zurückzuführen, daß die verwendeten Kollodiumhäute beim Eintrocknen schon an sich sehr stark doppelbrechend werden.

Während der Drucklegung dieser Arbeit sind von Braun weitere Versuche veröffentlicht, welche für den Tabaschir qualitativ den Nachweis einer durch Schichtung hervorgerufenen Doppelbrechung erbringen.[3])

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, im Juni 1905.

1) Braun, Physik. Ztschr. 5, S. 199, 1904.
2) Braun, Drud. Ann. 16, S. 278, 1905.
3) Braun, Drud. Ann. 16, S. 364, 1905.

Druckfertig erklärt 14. VIII 1905.]

INHALT.

Seite

G. F. Lipps, Bericht über das Fechner-Archiv 247

A. Mayer, Nachträgliche Bemerkung zu meiner II. Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz 313

Johannes Friedel, Experimentelle Untersuchungen über lamellare Doppelbrechung 315

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

L Soc 1726.9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

V.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1905.

Digitized by Google

Einzelpreis 1 Mark

SITZUNG VOM 30. OKTOBER 1905.

Eingang von Dankschreiben; geschäftliche Mitteilnngen; Tauschverkehr.

Entsprechend dem Ersnchen der kartellierten Akademien hat die kgl. preuß. Akademie d. Wissenschaften in Berlin die Herren Karl Klein und van't Hoff zu Mitgliedern des für die Herausgahe einer „Chemie der Minerale" eingesetzten engeren Ausschusses delegiert; die Genannten haben sich bereit erklärt, das Mandat zu übernehmen.

Zur Aufnahme in die Berichte werden bestimmt:

1. Eine Abhandlnng von Herrn Ernst von Meyer in Dresden, o. M.: „Über Konstitution und Bildungsweise der Kyanalkine genannten trimolekularen Nitrile".
2. Eine durch Herrn Adolf Mayer, o. M., übermittelte Arbeit von Herrn Georg Scheffers in Darmstadt: „Ebene Kurvennetze ohne Umwege".

GEMEINSAME ÖFFENTLICHE SITZUNG BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1905 ZUR ERINNERUNG AN LEIBNIZ.

In dieser Sitzung hielt der Sekretär der mathem.-phys. Klasse, F. Zirkel, folgende Ansprache:

Am verflossenen 6. Oktober wurde mit vielen anderen Akademien auch unsere Gesellschaft der Wissenschaften von einem herben Verlust hetroffen; ihr früher einheimisches, dann auswärtiges Mitglied Ferdinand Frhr. v. Richthofen, einst Prof. der Geographie an unserer Universität, starb in Berlin nach einem Schlaganfall in seinem 73. Lehensjahr. Eine Fülle von kurzen Nekrologen ist diesem großen Forscher, diesem vielhetranerten, wahrhaft edlen Mann schon auf das frische Grah gelegt worden, zahlreichere andere ausführliche werden folgen. Sie werden allesamt rühmen, wie schon in seinen ersten Arbeiten über die ungarisch-siebenbürgischen Trachytregionen und über die Umgegend von Predazzo sich die nnverkennharen Spuren jener großzügigen originellen Auffassung und jenes Ideenreichtums offenharen, die dann in

dem leider nicht ganz vollendeten fundamentalen Riesenwerk über China und in anderen Schriften zum vollen Ausdruck kamen, sie werden laut die hervorragende Lehrtätigkeit in Berlin preisen, die vielseitige Anregung, die allezeit von ihm ausgegangen.

Uns dürfte es vielleicht mehr ziemen, rückschauend den Blick zu werfen auf v. Richthofens vierjährige Wirksamkeit hier in Leipzig, wohin er 1883 als Nachfolger Peschels nach längerem Unbesetztsein der geographischen Lehrkanzel von Bonn berufen wurde. Die Erinnerung vieler von uns sieht seine hohe vornehme Gestalt noch als Vorsitzenden unseres Vereins für Erdkunde, wo er alle die verzweigten Interessen desselben förderte, den wissenschaftlichen Sinn pflegte, die Mitglieder in gegenseitigen anregenden Verkehr brachte, wo er aufopfernd arbeitete für das Zustandekommen von Vorträgen, für die Aufrechterhaltung der Verbindung mit anderen Gesellschaften. Und wenn er selber einen seiner meisterhaften und formvollendeten Vorträge darbot, so erhöhte den Reiz das Bewußtsein, daß es nicht ein Schreibtischgeograph war, der da zu uns sprach, vor uns stand ja ein Mann, der, selbst einer der berühmtesten Reisenden der damaligen Zeit, in drei Erdteilen überreiche Erfahrungen unter schweren Mühsalen und Entbehrungen errungen hatte.

Dieses uns zu gute gekommene Wirken v. Richthofens läßt sich nicht trennen von seiner akademischen Tätigkeit und von der als Schriftsteller. Die Formen und Erscheinungen der Erdoberfläche nicht bloß als solche hinzustellen, sondern als Erfolge von Kräftewirkungen in ihrem Wesen und Entstehen zu erfassen, darin, in dieser Betonung des Kausalitätsverhältnisses, in dieser Hervorhebung des genetischen Standpunktes, darin liegt der große Fortschritt der modernen Behandlung der physischen Geographie, welcher v. Richthofen durch seine Vorlesungen und durch seine Schriften einen mächtigen Impuls gegeben hat. Ja, wir dürfen eigentlich stolz darauf sein, daß sein in dieser Hinsicht besonders klassisches Werk mit dem anspruchslosen Titel „Führer für Forschungsreisende“ hier in Leipzigs Mauern, an der Ecke der Harkortstraße und des Floßplatzes niedergeschrieben worden ist, das Buch, das jetzt schon zwei Jahrzehnte hindurch zu tun und zu denken gegeben hat, mit seiner gewaltigen Fülle von neuen Gesichtspunkten, Beurteilungen von wichtigen theoretischen Fragen, mit seinen Versuchen, die Oberflächenformen auf genetischer Grundlage systematisch einzuteilen und charakteristische neue Bezeichnungsweisen für die abgesonderten Kategorien vorzuschlagen. Es ist erklärlich, daß, während dieses Buch Form gewann, sein Verfasser einen Beitrag zu

Digitized by Google

den Berichten oder Abhandlnngen unserer Gesellschaft nicht leicht spendeu konnte. Vielleicht aber hat v. Richthofen gerade seine besten und am meisten begeisterten Schüler in den damals noch so elenden Räumen seines Leipziger Instituts auf dem Hof neben dem jetzt verschwundenen alten Kreuzgang ausgebildet.

Als er uns 1886 verließ, da durfte sich nnsere Universität, die einer ihrer hesten Zierden heraubt wurde, einigermaßen damit trösten, daß es am Ende weniger gerade die rivalisierende Schwesteranstalt war, die ihn nach Berlin zog, als vielmehr das Gefühl einer Verpflichtung gegen den preußischen Staat, der ihm langjährige Reisen in fremden Erdteilen zum großen Teil finanziell ermöglicht hatte, andererseits anch die Znversicht, in der Reichshanptstadt, in deren weiten nnd einflußreichen Kreisen noch hesser als von hier aus für das Gedeihen der geographischen Wissenschaft wirken zu können. Alexander v. Humboldt hatte ihm in Berlin, Sir Roderick Murchison in London gezeigt, was alles der rechte Mann an der rechten Stelle durchzusetzen vermag, nm die Lösung wichtiger geographischer Prohleme zu unterstützen. Auch auf diesem Gebiete, wo er alles nach besten Kräften erfolgreich in die Tat übersetzte, wird sein Hinscheiden eine empfindliche Lücke zurücklassen. Geloben wir, meine Herren, das Bild des bei allem Bewußtsein der eigenen Kraft wahrhaft liebenswürdigen und trener Freundschaft fähigen Mannes nicht vergessen zu wollen.

Als ord. Mitglied der math.-phys. Klasse sprach Herr v. Oettingen über: „Die Mängel der psychischen Fähigkeit, perspektivische Bilder richtig vorzustellen"; znm Ahdruck in den Berichten.

SITZUNG VOM 30. OKTOBER 1905.

Über Konstitution und Bildungsweise der Kyanalkine genannten trimolekularen Nitrile.

Von

Ernst von Meyer.

Die Nitrile, Cyanverbindungen von der allgemeinen Formel: R′CN, in der R′ ein einwertiges Alkyl (Methyl, Äthyl, Benzyl u. a.) bedeutet, lassen sich durch geeignete Agentien in Polymere überführen, von denen *trimolekulare* Nitrile am längsten bekannt sind. *Dimolekulare*, bisher nur aus Nitrilen der aliphatischen und fettaromatischen Reihe gewonnen, wurden erst in neuerer Zeit entdeckt (vergl. die Studie des Verf. in diesen Berichten 1892. S. 403).

Die *chemische Konstitution* beider Klassen von Verbindungen kann als im wesentlichen aufgeklärt gelten, während ihre *Bildungsweisen* noch nicht in allen Punkten durchsichtig sind. Nach einigen geschichtlichen Bemerkungen sollen die wichtigsten Ergebnisse zahlreicher Untersuchungen des Verf. und seiner Schüler über trimolekulare Nitrile mit besonderer Berücksichtigung der Konstitution und Bildungsweisen dieser Stoffe zusammengestellt werden. Die meisten dieser Experimentalarbeiten finden sich im Journal f. praktische Chemie (zitiert als J. pr. Ch.), einige sind bisher nur als Dissertationen veröffentlicht.

Geschichtliches: Das erste Kyanalkin entdeckten H. Kolbe und E. Frankland. Durch Einwirkung von Kalium[1]) auf Cyanäthyl gedachten sie das oft gesuchte Radikal Äthyl (C_2H_5) zu isolieren, fanden jedoch als unerwartetes Produkt der heftigen Reaktion eine starke einsäurige Base: $C_9H_{15}N_3$, die sie *Kyanäthin* nannten. Sie erkannten zwar dieselbe als trimolekulares Cyan-

1) Ann. Chem. 65, 269 (1847).

äthyl, jedoch schlug ihr Versuch, die Konstitution des letzteren durch eine Formel zu versinnlichen, fehl. — Auch die Auffindung des dem Kyanäthin homologen trimolekularen Cyanmethyls, des *Kyanmethins*, durch A. G. Bayer[1]), förderte weder die Frage der Konstitution, noch die der Bildungsweise der Kyanalkine; im Gegenteil, Bayer wurde durch eine unrichtige Beobachtung zu einer irrigen Auffassung ihrer Entstehung geleitet.

Ganz anders geartete trimolekulare Nitrile als die Kyanalkine sind die aus Nitrilen der aromatischen Reihe durch Einwirkung von Natrium und anderen kräftigen Agentien dargestellten Verbindungen, deren Hauptvertreter das *Kyaphenin:* $(C_6H_5)_3(CN)_3$, also trimolekulares Cyanphenyl ist. Während die *Kyanalkine* aus den aliphatischen Nitrilen und ähnlichen unter Atomverschiebung (Wanderung von Wasserstoff) hervorgehen und daher einen unsymmetrischen Bau anfweisen, ist das Kyaphenin symmetrisch konstruiertes *Cyanurtriphenyl.* Im folgenden ist die Frage der Konstitution auch dieser Verbindungen im Gegensatz zu der Zusammensetzung der Kyanalkine zu berühren. —

Chemische Konstitution der Kyanalkine.

Unter den zahlreichen Kyanalkinen, die man jetzt kennt, ist das *Kyanäthin* am sorgfältigsten erforscht, daher das Paradigma, an dem die wichtige Frage nach der Konstitution aller dieser Verbindungen am besten erörtert wird. Die früher gemachten Versuche, dieses Problem zu lösen, mißlangen[2]), da das chemische Verhalten des Kyanäthins noch viel zu wenig untersucht war.

Durch eine Reihe von Arbeiten des Verfassers[3]) wurde die genaue Kenntnis der chemischen Natur der Kyanalkine, insbesondere des Kyanäthins, angebahnt; aber erst auf einem Umwege, durch Synthese, gelang es, Einblick in seine Konstitution zu gewinnen. Die Formel, welche letztere versinnlicht, steht in gutem Einklange mit allen Umwandlungen, die das Kyanäthin zeigt; auch ist sie, passend abgeändert, ein klarer Ausdruck der

1) Ber. 2, 319 u. 4, 176.

2) Vergl. Kolbe-Frankland, a. a. O. S. 287; Bayer, Ber. 2, 320. Wislicenus, Kurzes Lehrbuch d. org. Chemie, S. 517.

3) J. pr. Ch. (2) 22, 261; 26, 337; 39, 262. Über andere Untersuchungen s. unten.

Zusammensetzung aller dem letzteren entsprechenden Kyanalkine. Unerwarteterweise erwiesen sich diese Verbindungen als Abkömmlinge eines zyklischen Stammkörpers, des sogen. Pyrimidins: $C_4H_4N_2$.

Diese Erkenntnis wurde für das Kyanäthin auf folgendem Wege erlangt: In erster Linie durch Erforschung seines chemischen Verhaltens. Wird Kyanäthin mit konzentrierter Salzsäure im Einschlußrohr auf 180° erhitzt, so geht es glatt unter Austritt von 1 Mol. Ammoniak und Aufnahme der Elemente eines Mol. Wasser in eine Hydroxylverbindung über, die „Oxybase“[1]) des Kyanäthins:

$$\underbrace{C_9H_{12}N_2(NH_2)}_{\text{Kyanäthin}} + H_2O + HCl = H_2N \cdot HCl + \underbrace{C_9H_{13}N_2(OH)}_{\text{„Oxybase“}}.$$

Ist, wie hier angenommen, Hydroxyl in der neuen Verbindung enthalten, so muß an dessen Stelle im Kyanäthin Amid: (NH_2) vorhanden sein: Aus dieser besonderen Funktion des einen Stickstoffatoms läßt sich zwanglos die Tatsache erklären, daß Kyanäthin eine einsäurige Base ist. — Daß nun die „Oxybase“ die auch durch Einwirkung salpetriger Säure auf Kyanäthin leicht entsteht, Hydroxyl enthält, wurde aus ihrem Verhalten zu Fünffach-Chlorphosphor[2]) geschlossen: nach folgender Gleichung entsteht damit glatt die Verbindung $C_9H_{12}N_2Cl$:

$$C_9H_{13}N_2OH + PCl_5 = HCl + POCl_3 + C_9H_{13}N_2Cl.$$

Dieselbe läßt sich durch Einwirkung von Ammoniak unter Austausch ihres Chloratoms gegen Amid in Kyanäthin überführen:

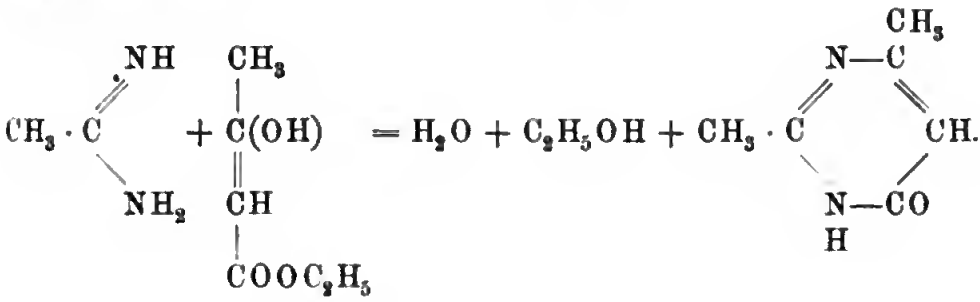
$$C_9H_{12}N_2Cl + H_3N = C_9H_{13}N_2(NH_2) \cdot HCl.$$

Andere Umsetzungen des Chlorids, bei denen das Chlor durch verschiedene Radikale, auch durch Wasserstoff ersetzt wird, sind bei der weiter unten gegebenen Übersicht kurz beschrieben. —

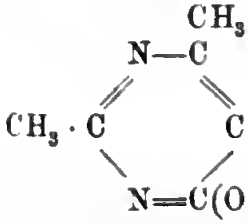
Alle diese Reaktionen geben nur Aufschluß über die Rolle eines der 3 Stickstoffatome im Kyanäthin. Zur Erkenntnis der Konstitution des übrigen Gebildes führten synthetische Vorgänge, und zwar gelang der Aufbau der sogen. „Oxybase“, deren naher Zusammenhang mit dem Kyanäthin oben erörtert wurde. PINNER

1) J. pr. Ch. **22**, 267. 2) J. pr. Ch. **22**, 273 flg.

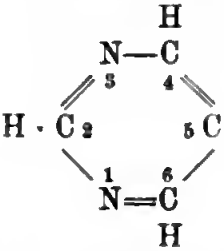
hatte in seinen ausgezeichneten Untersuchungen über die *Amidine* gezeigt, daß diese sich mit Acetessigester zu zyklischen Verbindungen, Abkömmlingen des *Pyrimidins*, kondensieren lassen. Die Umsetzung des Acetamidins z. B. erhellt zunächst aus folgender Gleichung, in der für Acetessigester die Enolformel angenommen ist:



Nach der jetzt gewonnenen Vorstellung über die Konstitution solcher zyklischer, sauerstoffhaltiger Verbindungen ist eine andere Auffassung derselben, wonach sie *tautomer* sind, nicht nur zulässig, sondern durch zahlreiche gewichtige Gründe gestützt. Die tautomere Form obiger Verbindung ist die folgende:



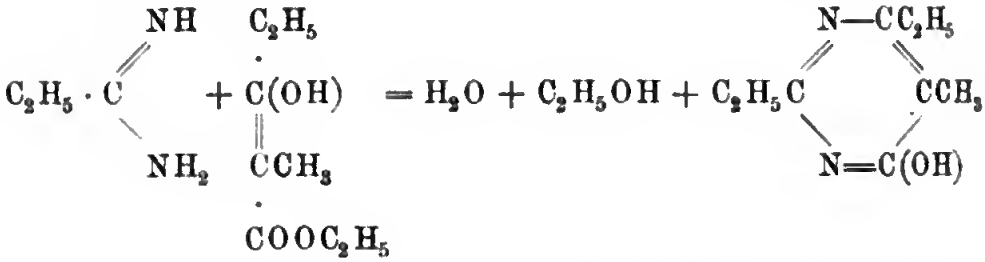
; also die eines *Dimethyloxypyrimidins*, durch Verschiebung des Wasserstoffatoms vom Stickstoff zum Sauerstoff entstanden. Die Stammform, das Pyrimidin[1]), hat dementsprechend die Formel:



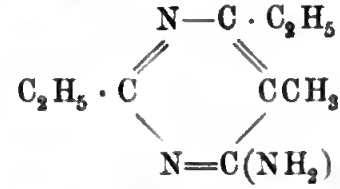
Zur bequemen eindeutigen Bezeichnung seiner Abkömmlinge versieht man die Kohlen- und Stickstoffatome in obiger Weise mit Zahlen. Jene Oxyverbindung ist also 2-4-*Dimethyl*-6-*Oxypyrimidin*.

1) Die von O. Widman (J. pr. Ch. 38, 189) statt Pyrimidin vorgeschlagene Bezeichnung *Miazin* hat, so viele Vorzüge sie bietet, keinen Eingang gefunden.

Meine Erwartung, daß aus den homologen Verbindungen Propionamidin (statt Acetamidin) und Propionylpropionsäureester (statt Acetessigester) dieselbe Verbindung hervorgehen sollte, wie die aus Kyanäthin entstehende „Oxybase“ $C_9H_{13}N_2(OH)$, bestätigte sich vollkommen.[1]) Beide Ingredienzien reagierten gemäß folgender Gleichung:

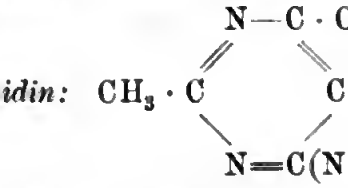


Das hierbei gebildete 2-4-5-*Diäthylmethyl*-6-*Oxypyrimidin* stimmte in Eigenschaften und Verhalten genau überein mit jener Oxybase. Da nun diese durch Einwirkung von PCl_5 und dann von Ammoniak, wie oben dargelegt, in *Kyanäthin* übergeführt wird, so ist dieses als 2-4-5-*Diäthylmethyl*-6-*Amido-*



pyrimidin zu betrachten: $C_2H_5 \cdot C$ CCH_3.

Das einfachste Kyanalkin, das *Kyanmethin*, ist nun 2-4-

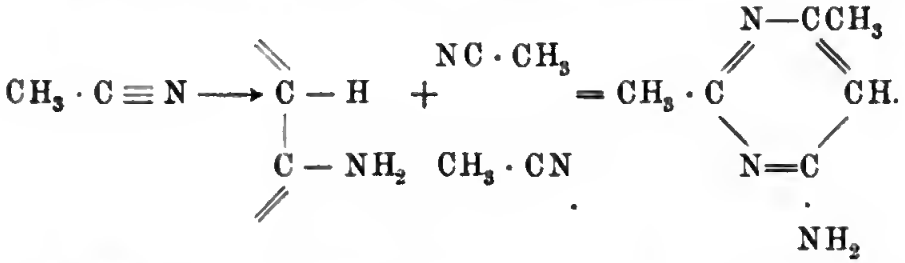


Dimethyl-6-*Amidopyrimidin*: $CH_3 \cdot C$ CH. Die aus ihm durch Erhitzen mit Salzsäure erhaltene Oxyverbindung erwies sich als völlig gleich[2]) mit dem von PINNER (s. oben) dargestellten 2-4-Dimethyl-6-Oxypyrimidin; auch läßt dieses sich wieder in Kyanmethin umwandeln (mittels PCl_5 und dann Ammoniak).

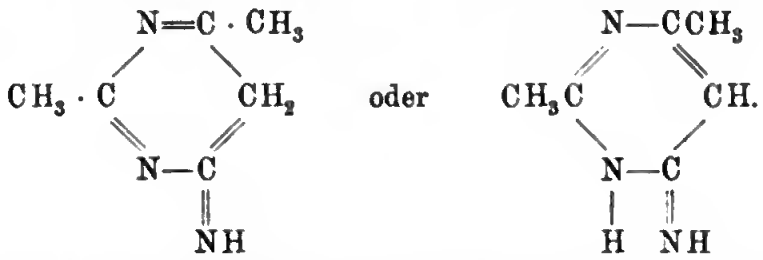
Betrachtet man die Formeln der beiden Kyanalkine, so ist unschwer zu erkennen, daß und in welcher Weise dieselben aus 3 Molek. eines Nitrils entstanden sind: man muß sich vorstellen, daß unter dem Einfluß von Natrium 2 At. Wasserstoff eines Mol. zum

1) J. pr. Ch. **39**, 264.
2) J. pr. Ch. **39**, 265.

Stickstoff desselben Mol. wandern, und daß durch das Freiwerden von je 2 Affinitätseinheiten die Vereinigung mit den zwei andern Molek. ermöglicht wird, z. B. bei Anwendung von Cyanmethyl:



Zur Erklärung der meisten Reaktionen ist die „Amido"formel der Kyanalkine die geeignetste. Von *tautomeren*, Imid (NH) enthaltenden Formeln können zwei in Betracht kommen, je nachdem 1 At. Wasserstoff des Amids zum benachtharten Kohlenstoff- oder Stickstoffatom gewandert ist, z. B. für Kyanmethin folgende:

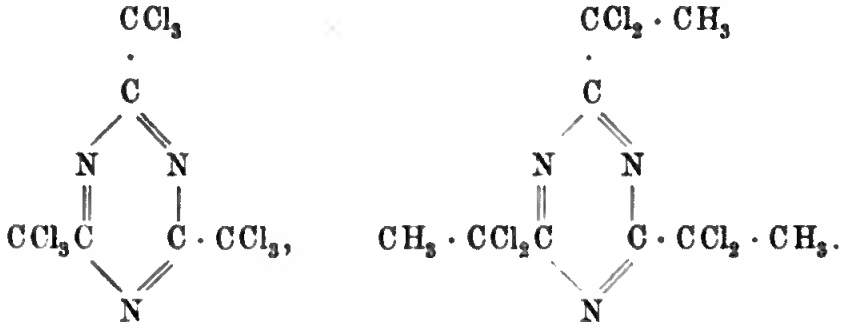


Wie aus obiger Erörterung sich ergiht, ist zum Entstehen eines Kyanalkins *beweglicher Wasserstoff* erforderlich. Die Versuche mit verschiedenen Nitrilen haben nun ergeben, daß nur *primäre Nitrile:* $R' \cdot CH_2 \cdot CN$, die *zwei* At. Wasserstoff an dem Kohlenstoffatom enthalten, das mit Cyan verbunden ist, zur Bildung von Kyanalkinen befähigt sind. Das *sekundäre Isopropylcyanid:* $(CH_3)_2 \cdot CH \cdot CN$ verhält sich dem Natrium gegenüber ganz anders[1]), als die primären Nitrile ($CH_3 \cdot CN$, $CH_3 \cdot CH_2CN$, $C_2H_5 \cdot CH_2CN$ u. a.). Kyanalkine aus verschiedenen Nitrilen können nur dann entstehen, wenn mindestens eins der dahei beteiligten Nitrile primärer Natur ist (Beispiele s. w. u.). Diese Tatsachen sprechen zugunsten der „Amido"formel der freien Kyanalkine; ob einigen Derivaten dieser letzteren eine „Imido"formel zukommt, ist noch nicht sicher ermittelt.

Werden *tertiäre* Nitrile, die überhaupt keinen Wasserstoff am α-Kohlenstoff enthalten, der Polymerisation unterworfen, so

1) J. pr. Ch. 37, 400.

bilden sich zwar unter geeigneten Bedingungen trimolekulare Verbindungen; diese gehören aber der Cyanurreihe: $R_3(CN)_3$ an. — Bei *aliphatischen* Nitrilen ist dieser Übergang am *Trichlormethylcyanid*[1]): $CCl_3 \cdot CN$ und dem α-Dichlorpropionitril[2]): $CH_3 \cdot CCl_2 \cdot CN$ gezeigt worden: beide verwandeln sich durch Einwirkung von Halogenwasserstoff in die Cyanurverbindungen, denen man folgende symmetrische Strukturformeln anlegt:



Die gleiche Vorstellung macht man sich von der Konstitution des Cyanurtriäthyls[3]) (aus obiger Dichloräthylverbindung durch Reduktion erhalten) und von dem schon länger bekannten Kyaphenin $(C_6H_5)_3C_3N_3$ (aus Benzonitril). Ob diese Anffassung für das Cyanurtriäthyl zutrifft, erscheint nicht sicher, da seine Unbeständigkeit gegenüber Salzsäure, die es leicht in Propionsäure und Ammoniak spaltet, im Widerspruche steht mit der Beständigkeit des Kyaphenins, das außerordentlich schwierig die entsprechende Zersetzung erfährt.

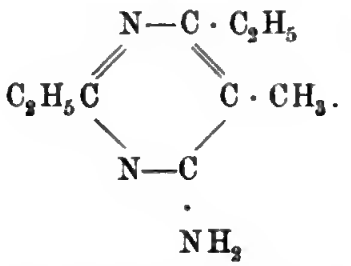
Übersicht der Kyanalkine und ihrer wichtigsten Umwandlungsprodukte.

In welcher Weise die oben erörterte Anffassung von der Konstitution des Kyanäthins und Kyanmethins mit deren gesamtem chemischen Verhalten übereinstimmt, wird am besten eine kurze Übersicht der Kyanalkine und ihrer wichtigsten Umwandlungen zeigen. In betreff weiterer Einzelheiten muß auf die Originalabhandlungen verwiesen werden; nur die hervorstechendsten Eigenschaften und Bildungsweisen der wichtigeren Verbindungen sollen verzeichnet werden.

---

1) WEDDIGE, J. pr. Ch. 33, 77. TSCHERWEN, das. 46, 143.
2) OTTO u. VOIGT, J. pr. Ch. 36, 79.
3) Das. S. 87.

Kyanäthin: 2-4-5-*Diäthylmethyl*-6-*Amidopyrimidin:*



Darstellung aus Cyanäthyl mittels Natrium[1]) und gewissen Natriumverbindungen[2]), am besten Natriumamid, Natriumäthylat, auch Natriumcyanamid, ferner mit andern Alkalimetallen, Lithium, Kalium, sowie mit Zinkäthyl u. a. Näheren Aufschluß über die Vorgänge bei der Bildung des Kyanäthins und einen Erklärungsversuch dafür bringt der letzte Abschnitt dieser Abhandlung.

Eigenschaften: Schön ausgebildete rhombische Kristalle (aus Alkohol) von 189° Schmelzpunkt. Löslichkeit: 1 Teil in 1380 Teilen Wasser (17°), in 17,6 Teilen 90% Alkohol (17°). — *Einsäurige* Base.

Abkömmlinge des Kyanäthins.

Ein Atom Wasserstoff desselben läßt sich direkt durch Alkyle und Acyle ersetzen, und zwar mittels der Halogenalkyle, bezw. Acyle. Bemerkenswert ist, daß die Einführung von mehr Alkylradikalen *nicht* gelang. Das Gleiche wurde auch für Kyanmethin ermittelt. Ob diese Begrenzung der Reaktion durch die Annahme erklärt wird, daß diese Derivate sich von einer tautomeren (Imido-)Form der Kyanalkine ableiten, ist noch unerwiesen.

Methylkyanäthin[3]) $C_9H_{13}N_2(NHCH_3)$, aus Kyanäthin und Methyljodid (bei 160°), durch Zersetzung des Produktes mit Silberoxyd erhalten, ist eine in Wasser leicht lösliche, starke einsäurige Base, sehr giftig; bei 74° schmelzende Kristalle, unzersetzt bei 257—258° siedend.

Äthylkyanäthin[4]), $C_9H_{13}N_2NHC_2H_5$, auf gleiche Weise wie das Methylderivat erhalten, bildet harte Kristalle von 45° Schmelzpunkt, siedet gegen 260°.

---

1) J. pr. Ch. **22**, 262.

2) J. pr. Ch. **38**, 584. Schwarze, das. 42, 2. Hermsdorf, Dissertation (Dresden 1904).

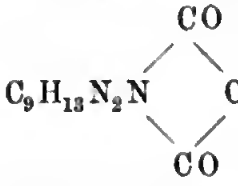
3) J. pr. Ch. **26**, 343. 4) Das. S. 345.

Phenylkyanäthin[1]): $C_9H_{13}N_2NH(C_6H_5)$, aus der Chlorverbindung $C_9H_{13}N_2Cl$ (s. unten) mit Anilin (bei 220°) gewonnen, bildet feine, bei 99° schmelzende Nadeln, mit Säuren Salze.

Acethylkyanäthin[2]): $C_9H_{13}N_2NH(COCH_3)$, aus Kyanäthin und Essigsäureanhydrid (bei 170°) erhalten, läßt sich im Vacuum destillieren, wobei es in der Vorlage kristallinisch erstarrt (59° Schmelzpunkt).

Carboxäthylkyanäthin[3]): $C_9H_{13}N_2NH(COOC_2H_5)$, durch Einwirkung überschüssigen Chlorkohlensäureesters aus Kyanäthin entstehend, läßt sich bei 247° überdestillieren, erstarrt kristallinisch.

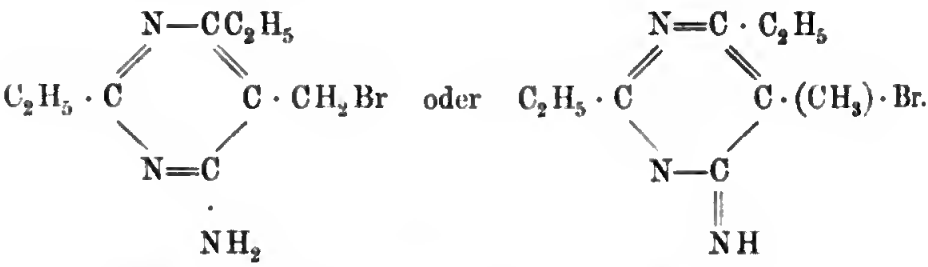
Durch *Phtalsäureanhydrid* gelingt es im Kyanäthin beide Amidowasserstoffatome zu ersetzen, sodaß Phtalylkyanäthin:



$C_9H_{13}N_2N \quad C_6H_4$ (weiße, bei 127,5° schmelzende Nadeln) entsteht. Die letzteren drei Acylverbindungen werden durch Kochen mit Wasser, Alkalien, Säuren leicht unter Rückbildung von Kyanäthin zerlegt (im Gegensatz zu den sehr beständigen Alkylderivaten).

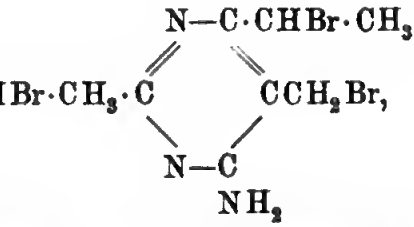
Halogenderivate des Kyanäthins. — Ein Atom an Kohlenstoff gebundenen Wasserstoffs läßt sich darin leicht durch Brom ersetzen, wenn letzteres bei Gegenwart von Wasser und Säure einwirkt. Läßt man dagegen Brom oder Chlor bei *Ausschluß von Wasser* in Chloroformlösung unter Erhitzen einwirken, so werden 3 At. Wasserstoff durch die Halogene verdrängt.

Monobromkyanäthin[4]) bildet dem Kyanäthin ähnliche Kristalle von 152—153° Schmelzpunkt; seine Konstitution kann je nach Anwendung der „Amid-“ oder einer „Imid“formel des Kyanäthins, wie folgt versinnlicht werden:



1) Das. 39, 274. 2) Das. 30, 122. 3) Das. S. 116.
4) J. pr. Ch. 26, 356; C. RIESS, das. 30, 145 flg.

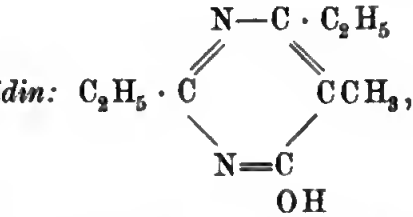
Tribromkyanäthin, vielleicht:



wird in perlmutterglänzenden Blättchen von 126° Schmelzpunkt erhalten, das entsprechende *Trichlorkyanäthin*[1]) in schönen, bei 110° schmelzenden Blättchen. —

Monojodkyanäthin[2]) $C_9H_{12}JN_2(NH_2)$, durch allmähliche Einwirkung konzentrierter Salzsäure auf eine mit Jod versetzte, verdünnt-schwefelsaure Lösung von Kyanäthin dargestellt, bildet kleine zugespitzte Prismen (von 152° Schmelztemper.), ist leichter zersetzbar als die Chlor- und Bromverbindungen. Alle *Halogenderivate des Kyanäthins* gehen, gleich diesem, unter geeigneten Bedingungen, in die entsprechenden Abkömmlinge[3]) der „Oxybase" über. Nur die Monohalogen-Kyanäthine sind Basen; durch Eintritt von 3 At. Halogen in Kyanäthin erlischt der basische Charakter völlig. —

2-4-5-*Diäthylmethyl*-6-*Oxypyrimidin:*



die sogen. *Oxybase* des Kyanäthins[4]), deren Entstehung aus diesem oben (S. 326) erörtert ist, bildet aus Wasser kristallisierend schöne seideglänzende Nadeln (von 157° Spkt.); 1 Teil löst sich in 133 Teilen Wasser (25°), in 12,4 Teilen 90% Alkohol (18°). Auch durch Einwirkung von salpetriger Säure auf in Eisessig gelöstes Kyanäthin bildet sie sich glatt unter Stickstoffentwickelung:

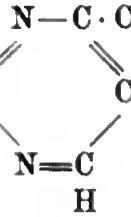
$$C_9H_{13}N_2(NH_2) + NOOH = N_2 + H_2O + C_9H_{13}N_2(OH).$$

Die Verbindung bildet als einsäurige schwache Basis mit starken Säuren Salze, sowie als schwache Säure, ein Silbersalz, löst sich auch leicht in Alkalien.

Ihre Veränderung durch *Fünffach-Chlorphosphor* (s. oben S. 326) führt zu der Chlorverbindung: $C_9H_{13}N_2Cl$ (2-4-5-Diäthyl-

1) Riess das. S. 161. 2) Das. S. 165. 3) Vergl. Riess, a. a. O.
4) Vergl. J. pr. Ch. **22**, 268; **26**, 342.

methyl-6-Chlorpyrimidin), die, ein unangenehm narkotisch riechendes Öl, zur Darstellung von verschiedenen Abkömmlingen des Pyrimidins dienen kann. Ihre Überführung in Kyanäthin, Phenylkyanäthin wurde oben erwähnt. Das Chloratom läßt sich mittels naszierenden Wasserstoffs (aus Zink und Salzsäure) durch Wasserstoff ersetzen, so daß die Base $C_9H_{14}N_2$, das 2-4-5-*Diäthylmethyl-*



pyrimidin[1]): $C_2H_5 \cdot C$ $C \cdot CH_3$ entsteht, welches ein narkotisch riechendes, stark giftiges, dem Coniin in seinen Wirkungen ähnliches Liquidum von 204,5° Siedepunkt darstellt. Seine kaltgesättigte wässrige Lösung trübt sich schon bei gelindem Erwärmen unter Abscheidung der öligen Base. Durch Einwirkung von Alkali in äthyl- oder methylalkoholischer Lösung wird das Chloratom durch die Radikale (OC_2H_5) oder (OCH_3) ersetzt: es entstehen also Äther der Oxybase[2]), Öle von eigentümlichem (Kräuter-)Geruch:

$$\underbrace{C_9H_{13}N_2(OC_2H_5)}_{\text{von } 230^0 \text{ Siedepunkt}} \quad \text{und} \quad \underbrace{C_9H_{13}N_2(OCH_3)}_{\text{von } 225^0 \text{ Siedepunkt.}}$$

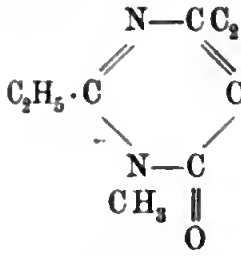
Entsprechend dieser Zusammensetzung werden beide durch Erhitzen mit konz. Salzsäure (auf 200°) in Chloräthyl bezw. Chlormethyl und die Oxybase zerlegt, z. B.

$$C_9H_{13}N_2(OC_2H_5) + HCl = C_2H_5Cl + C_9H_{13}N_2(OH).$$

Der Znsammenhang beider mit der Oxybase ist also völlig klar. Weniger leicht gelingt es, die Beziehungen isomerer Verbindungen[3]), die leicht durch Einwirkung von Jodalkylen auf die Oxybase zu erhalten sind, zu der letzteren aufzuklären. Während Methyl, Äthyl in obigen Substanzen sicher mit Sauerstoff verbunden sind, befindet sich in den jetzt zu beschreibenden Alkylverbindungen die Alkyle am Stickstoff, wie aus der Bildung von Alkylamin durch Oxydation mit Permanganat erhellt. Alle Beobachtungen

1) J. pr. Ch. 22, 280; 26, 338.
2) Vergl. J. pr. Ch. 22, 276; 39, 271.
3) Vergl. J. pr. Ch. 26, 348 flg.; 39, 270.

sprechen dafür, daß dieselben Derivate der tautomeren Form der Oxybase (S. 327) sind, z. B. die Methylverbindung:

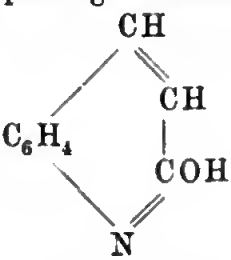


(1-Methyl-2-4-5-Diäthylmethyl-6-Pyrimidon)

Diese wird in leichten, bei 76,5° schmelzenden Nadeln von 275—276° Siedepunkt erhalten, die *Äthyl*verbindung in schönen, bei 43° schmelzenden Kristallen (267—268° Siedetemperatur). Sie sind in kaltem Wasser leicht löslich, durch Erwärmen wird die Lösung milchig und scheidet die Basen als Öle ab. In wäßrigen Alkalien sind sie nicht löslich.

Ihre *Darstellung* geschieht entweder durch Erhitzen der „Oxybase" mit den Jodalkylen (auf 150°), Zersetzen des Produktes mit Natronlauge und Ausschütteln mit Äther oder[1]) durch Erwärmen einer alkoholischen Lösung von „Oxybase", Jodalkyl und Ätzkali auf dem Wasserbade. In letzterem Falle entsteht, zumal bei Herstellung der *Äthyl*-Verbindung, neben dieser, als dem Hauptprodukte eine kleine Menge der isomeren Äthoxylverbindung: $C_9H_{13}N_2(OC_2H_5)$: ein Beweis, daß die „Oxybase" tautomer reagiert. Man kennt jetzt mehrfach derartige Vorgänge, bei denen aus einer einheitlichen Substanz zwei isomere Alkylderivate hervorgehen, deren Bildung von den Versuchsbedingungen abhängt.

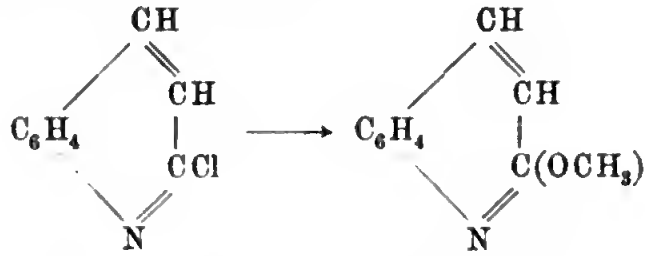
Unter den Abkömmlingen des Chinolins z. B. gibt es solche, die eine dem Oxypyrimidin gleichartige Atomgruppierung aufweisen,

z. B. das α-Oxychinolin (sogen. Carbostyril):  ;

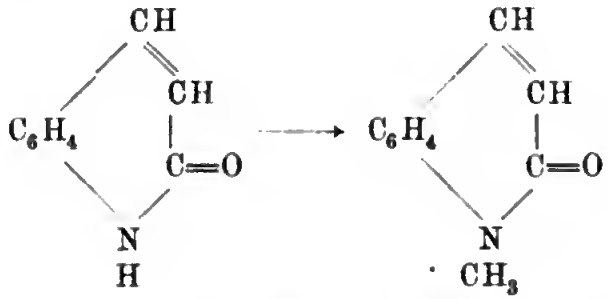
sein Stickstoffatom steht mit 2 At. Kohlenstoff in Bindung, von denen das eine Hydroxyl trägt, genau wie in obiger „Oxybase". Durch Einwirkung von Fünffach-Chlorphosphor[2]) auf

1) J. pr. Ch. 26, 353. 2) Ber. 15, 335.

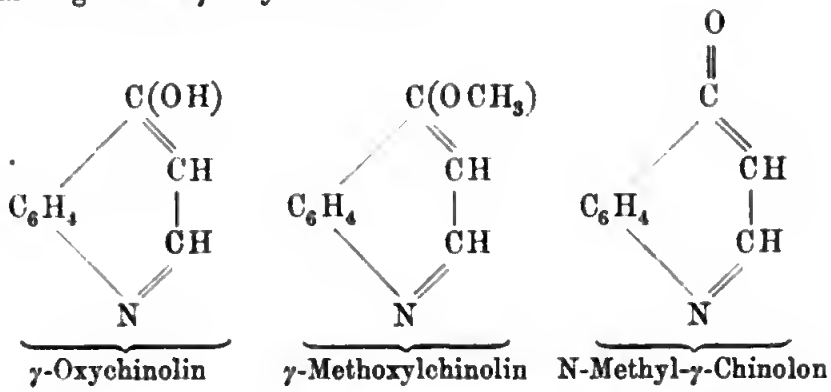
α-Oxychinolin entsteht α-Chlorchinolin, das mit methylalkoholischem Kali in α-Methylchinolin übergeht:



Wird dagegen α-Oxychinolin mit Jodmethyl und Alkali behandelt[1]), dann reagiert es, wie die tautomere Imidoverbindung und liefert das N-Methyl-α-Chinolon:



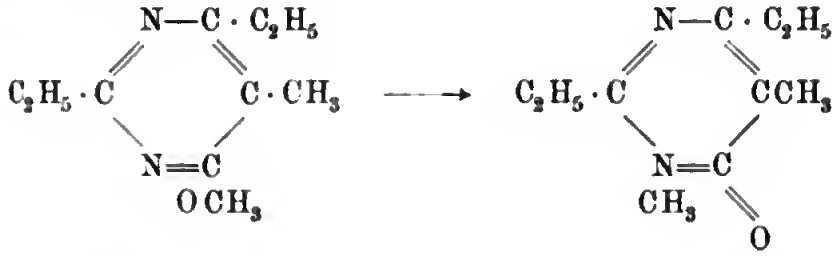
Man erkennt ohne weiteres die Analogie dieser Vorgänge mit denen an obigem Oxypyrimidin beobachteten. Ebenso kennt man die auf ganz gleiche Weise entstehenden isomeren Methylverbindungen des γ-Oxychinolins:



Hier hat man den Übergang der *Methoxyl*verbindung in das Chinolin durch starkes Erhitzen (auf 260°) ebenso beobachtet,

1) Ber. 20, 2009.

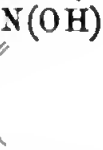
wie den des Methoxylpyrimidinderivates in das entsprechende 1-Methylpyrimidon[1]):



Es käme hierbei nur die Frage in Betracht, ob das Methyl nicht an das andere Stickstoffatom tritt; jedoch ist vorläufig kein Grund vorhanden, die einfachere Annahme, wie oben dargelegt, durch die weniger wahrscheinliche zu ersetzen.

Es sei noch auf die hohe Beständigkeit der Alkylpyrimidine hingewiesen, die auch durch stärkstes Erhitzen mit Salzsäure nicht in die „Oxybase" und Chloralkyl zu spalten sind, während diese Zerlegung der Alkyloxylderivate leicht gelingt (s. oben).

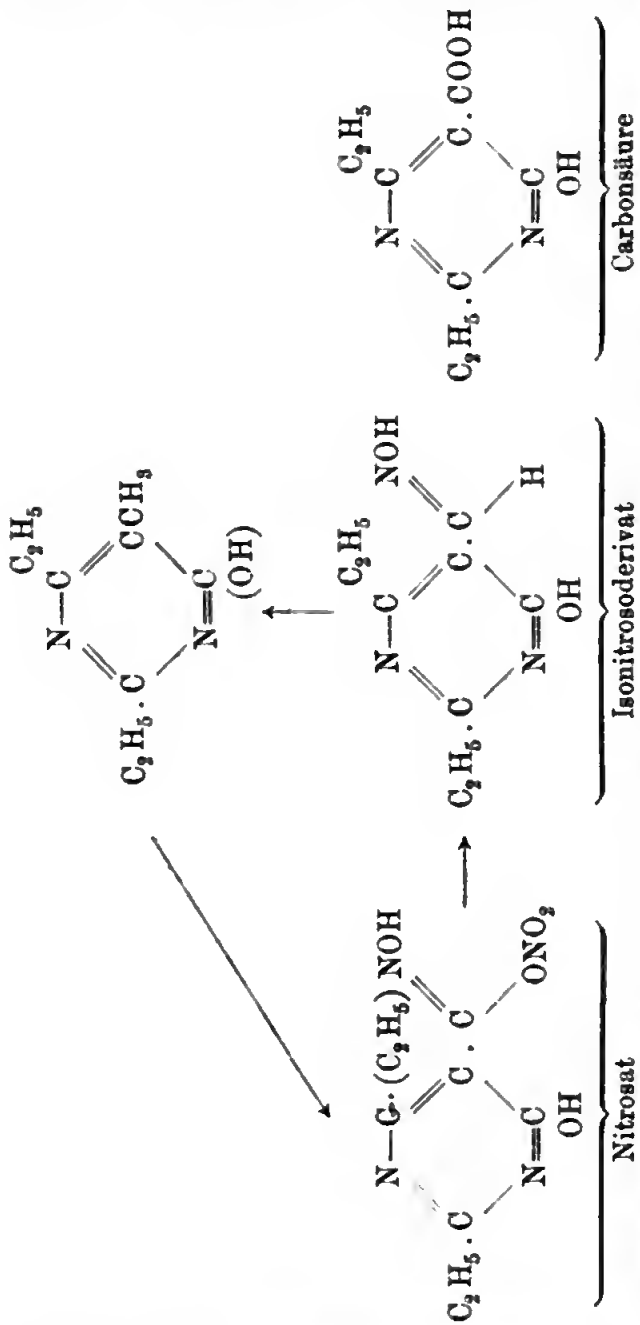
Von den mancherlei Abkömmlingen der „Oxybase", von denen Halogenderivate oben S. 333 erwähnt sind, heben sich einige besonders heraus, die durch geeignete Einwirkung von salpetriger Säure auf jene entstehen.[2]) Die „Oxybase", selbst aus Kyanäthin durch letzteres Agens hervorgehend, wird durch erschöpfende Behandlung damit bei hoher Temperatur in ein an Stickstoff und Sauerstoff reiches Produkt, ein „Nitrosat": $C_9H_{12}N_4O_5$ verwandelt, das glänzende bei 136° schmelzende Blättchen bildet. Auf Grund seines chemischen Verhaltens kann angenommen werden, daß das Methyl (CH_3) der „Oxybase" umgewandelt ist in den Komplex:



So erklären sich die Umsetzungen dieser Verbindung ungezwungen. Durch mäßige Reduktion (mit Natriumamalgam, Schwefelammonium) geht sie, unter Entziehung von salpetriger Säure und Sauerstoff, in eine Isonitrosoverbindung: $C_9H_{13}N_3O_2$ über (glänzende Nadeln von 205° Schmelzpunkt), die durch

1) J. pr. Ch. 39, 271. 2) Vergl. J. pr. Ch. 39, 276 flg.

kräftige Reduktionsmittel (HJ z. B.) die ursprüngliche Oxybase liefert. Endlich ist die Umwandlung des „Nitrosats“ in eine Carbonsäure, die Carboxyl an Stelle des Methyls der Oxybase enthält, durch Erhitzen mit konz. Salzsäure zu erwähnen. Die Beziehungen dieser drei Verbindungen zu der „Oxybase“ ergeben sich klar aus nebenstehenden Formeln.

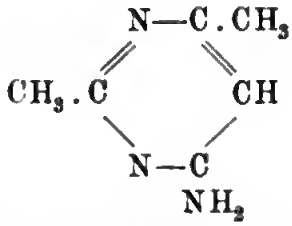


Es lag nahe, die Gewinnung dieser Carbonsäure durch Oxydation der Oxybase zu versuchen, was jedoch auf keine Weise gelang, da letztere, ebenso wie Kyanäthin, selbst durch schwach oxydierende Mittel zu Propionsäure und Ammoniak aufgespalten werden. Nur bei Anwendung von Brom auf Kyanäthin in verdünnter schwefelsaurer Lösung gewinnt man als Nebenprodukt eine Dicarbonsäure mit 6 At. Kohlenstoff, die symmetrische *Dimethylbernsteinsäure*[1]), deren Entstehung sich unschwer erklären läßt.

1) J. pr. Ch. 26, 358 flg.

Aus der obigen Übersicht ergibt sich, daß das chemische Verhalten des Kyanäthins und die Konstitution der daraus abgeleiteten Verbindungen sich unter Zugrundelegung der auf synthetischem Wege ermittelten Formel des Kyanäthins einwandfrei deuten lassen.

Kyanmethin, 2-4-*Dimethyl*-6-*Amidopyrimidin*:



Die durch diese Formel ausgedrückte Konstitution ist, wie oben (S. 328) dargelegt, auf gleichem Wege ermittelt worden, wie die des Kyanäthins. — Seine *Darstellung*[1]) aus Cyanmethyl $CH_3 . CN$ entspricht ebenfalls genau der von Kyanäthin, ist nur erschwert durch die große Löslichkeit des Kyanmethins in Wasser (1 Teil in 0,64 Teile Wasser), die in auffallendem Gegensatze steht zu der geringen der homologen Base. Wie mit Natrium, so läßt sich Kyanmethin auch mit Natriumamid, Natriumalkylat und anderen Polymerisationsmitteln gewinnen; am besten wird es dem mit Wasser behandelten Produkte nach Eindampfen zur Trockne mittels Benzol (im Soxhlet-Apparat) entzogen. Das Kyanmethin, eine starke einsäurige Base, bildet schöne rhombische Kristalle von 181° Schmelzpunkt. Von seinen *Abkömmlingen* seien folgende genannt:

Jodmethylat[2]): $C_6H_9N_3 . CH_3J$ aus Kyanmethin und überschüssigem Jodmethyl entstehend bildet körnige Kristalle; das freie Methylkyanmethin ist noch nicht bekannt.

Halogenderivate. — Ein *Trichlorkyanmethin*[3]): $C_6H_6Cl_3N_3$ entsteht durch Behandeln der Chloroformlösung von Kyanmethin mit Chlor, ist jedoch anders konstituiert, als Trichlorkyanäthin, da es schon mittels Ammoniaks unter Verlust von 2 At. Chlor in *Monochlorkyanmethin* übergeht, man hat es demnach mit einem Dichlorid des letzteren zu tun. — *Monobromkyanmethin*[4]) und

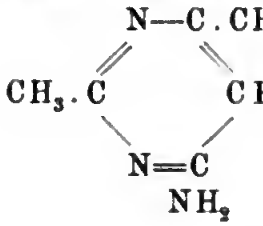
---

1) J. pr. Ch. 27, 153; 31, 365.

2) Lehmann, Dissertation (Dresden 1903, S. 6).

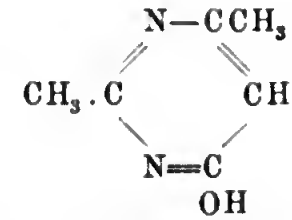
3) Keller, J. pr. Ch. 31, 369. 4) J. pr. Ch. 27, 155.

Monojodkyanmethin[1]) bilden sich durch direkte Einwirkung der Halogene, und zwar des Broms auf die salzsaure, des Jods auf die alkoholische Lösung von Kyanmethin (bei Gegenwart von Quecksilberoxyd). Beide Verbindungen kristallisieren gut; sie enthalten das Halogen am C_5, z. B.

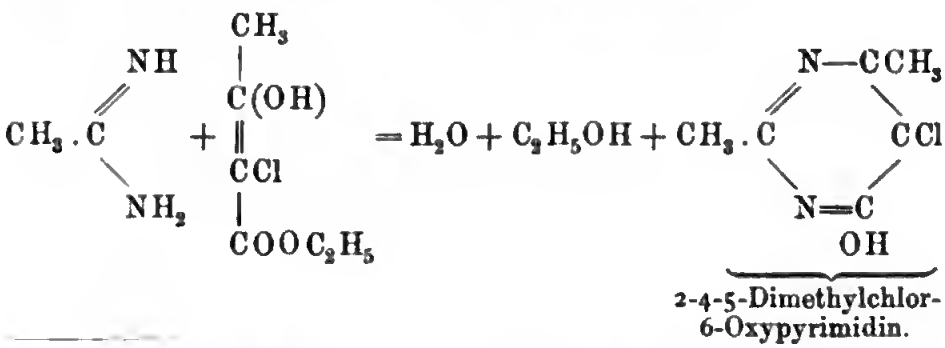


2-4-5-*Dimethylbrom*-6-*Amidopyrimidin*.

2-4-*Dimethyl*-6-*Oxypyrimidin*[2]):



die „Oxybase" des Kyanmethins, aus diesem durch Erhitzen mit Salzsäure oder mittels salpetriger Säure hervorgehend, synthetisch aus Acetamidin und Acetessigester erhalten, ist durch letztere Bildungsweise als Pyrimidinderivat erkannt worden (s. ob.): bei 192°—193° schmelzende Nadeln. — Das chemische Verhalten dieser Verbindung entspricht durchweg dem der homologen Oxybase des Kyanäthins. — *Monohalogenderivate* derselben lassen sich sowohl direkt, durch Einwirkung des Halogens, als indirekt aus den monohalogenierten Kyamethinen (s. oben) gewinnen (durch salpetrige Säure). Für das *Monochlor*derivat ist der Beweis geliefert, daß es das Chloratom an C_5 enthält, und zwar durch Synthese aus Acetamidin und α-Chloracetessigester[3]):



2-4-5-Dimethylchlor-6-Oxypyrimidin.

1) LEHMANN, Diss. S. 16.

2) J. pr. Ch. 27, 155; 29, 131; PINNER, Ber. 18, 2847.

3) LEHMANN, Diss. S. 21.

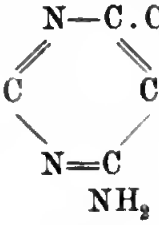
Digitized by Google

Die *Monochlor*oxybase bildet derbe, bei 191° schmelzende Kristalle, die *Monobrom*oxybase (aus Wasser mit 1 Mol. Kristall-Wasser) bei 189° schmelzende Prismen.

Das durch Behandeln der Oxybase mit Fünffach-Chlorphosphor entstehende 2-4-6-*Dimethylchlorpyrimidin* läßt sich genau wie die homologe Verbindung (S. 334) zu mannigfachen Umwandlungen verwenden.[1])

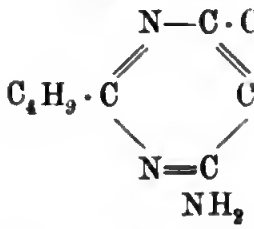
Die dem Kyan-methin und -äthin homologen Verbindungen sind nur oberflächlich untersucht, um festzustellen, ob sie sich analog jenen beiden bilden und verhalten. Dies ist der Fall, und so genügt eine kurze Aufzählung derselben.

Kyanpropin[2]) aus norm. Propylcyanid, 2-4-5-*Dipropyläthyl*-6-*Amidopyrimidin*:



bildet zugespitzte, bei 115° schmelzende Prismen, die noch schwerer löslich in Wasser sind, als Kyanäthin; es kann aus genanntem Cyanid mit Natrium oder Natriumäthylat gewonnen werden. Die entsprechende „Oxybase", durch Erhitzen des Kyanpropins mit Salzsäure dargestellt, bildet Nadeln von 97,5° Schmelzpunkt.

Kyanisobutin[3]), 2-4-5-*Diisobutylisopropyl*-6-*Amidopyrimidin*,



aus Isobutylcyanid: $CH(CH_3)_2 \cdot CH_2 \cdot CN$ mit Natrium in geringer Ausbeute erhalten, kristallisiert schwierig, geht aber leicht, durch Einwirkung salpetriger Säure, in die entsprechende „Oxybase", Kristalle von 88,5° Schmelzpunkt über.

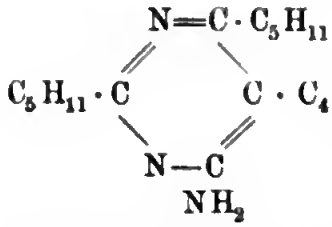
---

1) Vergl. Lehmann a. a. O. S. 10 besonders Schmidt, Ber. 35, 1575.

2) J. pr. Ch. 37, 379; 42, 4.

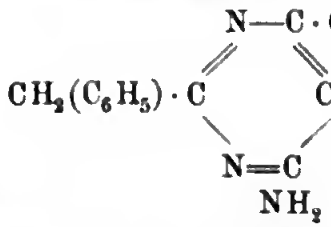
3) Tröger, J. pr. Ch. 37, 407.

Kyanisoamylin[1]), *2-4-5-Diisoamylisobutyl-6-Amidopyrimidin*:



aus Isoamylcyanid (Valeronitril) $CH(CH_3)_2 \cdot CH_2 \cdot CH_2CN$ mittels Natrium entstehend, durch Destillation rein zu gewinnen, bildet sternförmige Kristalle von 53° Schmelzpunkt. Zu bemerken ist die Abnahme der Schmelztemperaturen der Kyanäthine mit zunehmendem Molekulargewicht.

Kyanbenzylin[2]), *2-4-5-Dibenzylphenyl-6-Amidopyrimidin*



am besten aus Benzylcyanid durch Erhitzen mit trocknem Natriumäthylat (oder Natriumamid) im Autoklaven auf 160°—170° zu gewinnen, kristallisiert in weißen, bei 106° schmelzenden Nadeln; es liefert mit Chlor, Brom Monohalogenderivate, mit starker Salzsäure erhitzt, die entsprechende Oxyverbindung.

Kyanalkine, aus verschiedenen Nitrilen hervorgehend.

Solche Verbindungen, an deren Bildung verschiedene Nitrile beteiligt sind, können einmal durch Einwirkung von Natrium oder Natriumäthylat auf Gemische von Nitrilen gewonnen werden; doch ist ihre Reindarstellung schwierig. Sodann entstehen sie in besserer Ausbeute aus den Natriumverbindungen dimolekularer Nitrile durch Erhitzen mit Cyaniden.

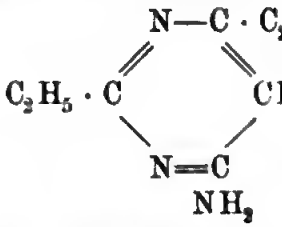
Kyanmethyldiäthin[3]), $C_8H_{13}N_3$ durch Zusammentreten von 2 Mol. Cyanäthyl und 1 Mol. Cyanmethyl unter dem Einfluß von Natrium entstehend, läßt sich durch sorgsame fraktionnierte Kristallisation aus Wasser von den Nebenprodukten trennen; es bildet (aus Benzol ausgeschieden) glänzende, bei 165,5° schmelzende

1) Das. S. 409.

2) WACHE, J. pr. Ch. 39, 256; HERFELDT, das. 53, 246.

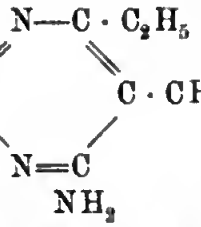
3) G. v. MEYER u. C. RIESS, J. pr. Ch. 31, 112.

Blättchen; 1 Teil löst sich in 37 Teilen Wasser (20°). Die stark basische Verbindung bildet Salze, mit Brom eine Monoderivat (bei 155° schmelzende Prismen), mit Salzsäure erhitzt eine „Oxybase“ (Nadeln von 150° Schmelzpunkt). Ihre Konstitution ist wahrscheinlich folgende:



2-4-*Diäthyl*-6-*Amidopyrimidin.*

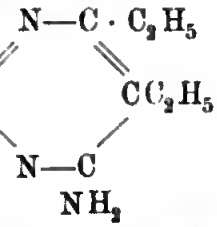
Ein Kyanalkin von der Zusammensetzung: $C_{10}H_{17}N_3$, durch Erhitzen des Natrium-Dipropionitrils mit Isopropylcyanid erhalten[1]), kann als 2 — 4 — 5 — *Isopropyläthylmethyl* — 6 — *Amido-*



pyrimidin: $C_3H_7 \cdot C$ $C \cdot CH_3$ angesprochen werden; es

kristallisiert aus Weingeist in glänzenden, bei 154° schmelzenden Blättchen, ist noch nicht näher untersucht.

Das isomere 2-4-5-*Triäthyl*-6-*Amidopyrimidin*[2]):



ist aus der Natriumverbindung des

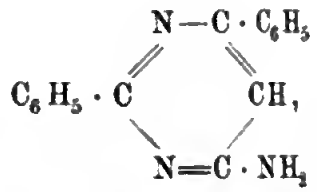
normalen Di-Propylcyanids durch Erhitzen mit überschüssigem Äthylcyanid (bei 180°) gewonnen worden. Man hat anzunehmen, daß aus jener Natriumverbindung das Natriumpropylcyanid vorübergehend entsteht, das sich mit 2 Mol. Äthylcyanid vereinigt. Das Kyanalkin kristallisiert dem Kyanäthin sehr ähnlich, schmilzt bei 184°, geht durch Erhitzen mit Salzsäure in die entsprechende „Oxybase“ ($C_{10}H_{15}N_2OH$) über, die seideglänzende, bei 144° schmelzende Nadeln bildet.

---

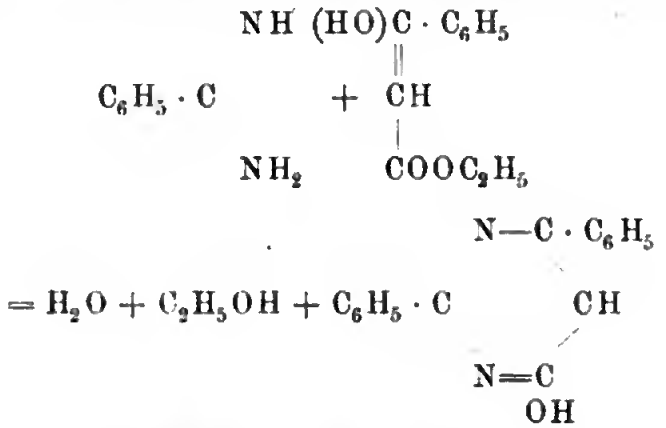
1) J. pr. Ch. 39, 198.

2) Wache, J. pr. Ch. 39, 247.

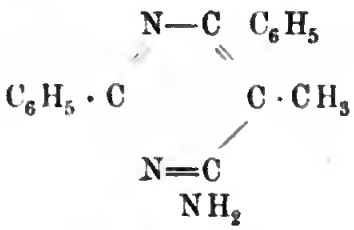
2-4-*Diphenyl*-6-*Amidopyrimidin*[1]):



durch Zusammenschluß von 2 Mol. Phenyl- und 1 Mol. Methylcyanid entstanden, wird durch Einwirkung von Natrium auf ein Gemisch heider Cyanide erhalten; es kristallisiert in rhombischen Tafeln von 121° Schmelzpunkt. — Die durch Erhitzen mit Salzsäure gewonnene Oxyverhindung (feine hei 281° schmelzende Nadeln) ist von PINNER[2]) durch Wechselwirkung von Benzamidin und Benzoylessigester dargestellt worden, und daraus ergibt sich ihre Konstitution, wie auch die des Diphenylamidopyrimidins:



2-4-5-*Diphenylmethyl*-6-*Amidopyrimidin*[3]):



ist auf verschiedene Weise dargestellt worden; es hildet schöne hei 168° schmelzende rhomhische Tafeln (in Wasser nicht, in Alkohol schwer löslich). Man kann es durch Erhitzen eines Gemisches von Äthyl- und Phenylcyanid mit Natrium oder Natriumäthylat gewinnen, hesser durch Einwirkung von Phenyl-

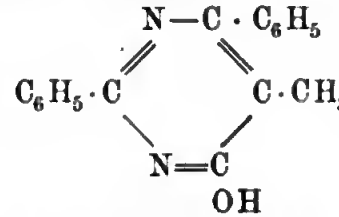
1) SCHWARZE, J. pr. Ch. 42, 13. 2) Ber. 22, 1626.
3) J. pr. Chem. 39, 195; 42, 9.

cyanid auf die Natriumverbindung des dimolekularen Äthylcyanids. In jedem Falle ist anzunehmen, daß sich vorübergehend das Natriumcyanäthyl bildet, welches mit 2 Mol. Phenylcyanid zusammentritt; das Produkt liefert dann mit Wasser neben Natronhydrat die freie Base:

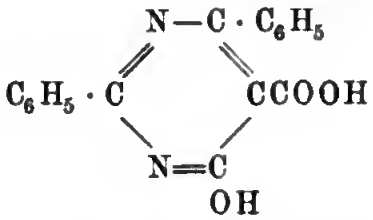
$$C_2H_4 \cdot Na \cdot CN + 2\,C_6H_5CN = C_{17}H_{14}NaN_3$$

$$C_{17}H_{14}NaN_3 + H_2O = NaOH + C_{17}H_{15}N_3.$$

Die dieser Base entsprechende Oxyverbindung, das 2-4-5-*Diphenylmethyl*-6-*Oxypyrimidin*:

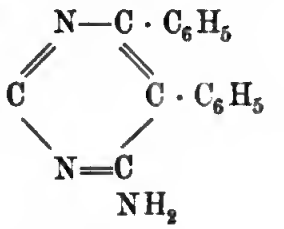


aus jener sowohl mittels Salzsäure, als salpetriger Säure auf bekannte Weise dargestellt, bildet sich auch — und damit ist ihre Konstitution festgestellt — aus Benzamidin und Methylbenzoylessigsäureester[1]) analog der oben erwähnten Homologen. Die Verbindung kristallisiert in seideglänzenden, bei 250° schmelzenden Nadeln. Sie läßt sich, in alkalischer Lösung, mittels Kaliumpermanganat in die Carbonsäure:



umwandeln[2]), welche aus Alkohol in schönen Prismen kristallisiert und beim Erhitzen auf 250° unter Abspaltung von CO_2 in das 2-4-Diphenyl-6-Oxypyrimidin (s. ob. S. 344) übergeht.

Endlich ist noch das 2-4-5-*Triphenyl*-6-*Amidopyrimidin*[3]):



zu nennen, das durch Ein-

1) J. pr. Ch. 42, 16. 2) J. pr. Ch. 40, 303.
3) J. pr. Ch. 39, 253.

wirkung überschüssigen Phenylcyanids auf die Natriumverbindung des dimolekularen Benzylcyanids bei 170° entsteht; es kristallisiert in feinen, bei 175° schmelzenden Nadeln, wird durch Erhitzen mit Salzsäure in die entsprechende Oxyverbindung (weiße bei 340° noch nicht schmelzende Nadeln) übergeführt.

Bildungsweisen der Kyanalkine.[1])

Der häufig beobachtete Übergang einfacher Verbindungen in polymere ist selten völlig aufgeklärt worden, zumal die neben der Hauptreaktion sich abspielenden Vorgänge meist unbeachtet geblieben sind. Für die Erkenntnis der Entstehung von Kyanalkinen aus Nitrilen ist nun zunächst der vom Verf. aufgefundene und sorgfältig untersuchte Übergang der letzteren in *dimolekulare Nitrile*[2]) von Bedeutung; denn dasselbe vollzieht sich mit den gleichen Agentien, wie die Bildung von Kyanalkinen, nur unter andern Versuchsbedingungen, nämlich bei Gegenwart eines die Temperatur niedrig haltenden Lösungsmittels. Am genauesten ist die Umwandlung des Äthylcyanids (Propionitrils) in das di- und das trimolekulare Propionitril (Dipropionitril und Kyanäthin) durch *Natrium* erforscht worden, und diese Reaktionen seien in erster Linie hier erörtert.

Äthylcyanide und Natrium. — Läßt man Natrium auf eine *absolut-ätherische* Lösung von Äthylcyanid einwirken, so wird von dem Metall die eine Hälfte dazu verwandt, um Cyannatrium zu bilden, die andere verdrängt aus dem Nitril 1 At. Wasserstoff, das sich mit dem bei der Entstehung von Cyannatrium erzeugten Äthyl vereinigt; das dabei entstandene Natriumäthylcyanid verbindet sich mit 1 Mol. Nitril zu der Natriumverbindung des Dipropionitrils:

$$\text{I.}\quad \begin{matrix}CH_2CH_3\\ |\\ CN\end{matrix} + Na = NaCN + CH_2 \cdot CH_3$$

$$\text{II.}\quad \begin{matrix}CH_2CH_3\\ |\\ CN\end{matrix} + Na = C_2H_4NaCN + H$$

1) Vgl. besonders J. pr. Ch. 22, 262 ff. Hermsdorf, Dissertation (Dresden 1904).

2) J. pr. Ch. 38, 336; 39, 189; 52, 81; vgl. auch diese Berichte 1892, S. 403.

III. $CH_2 \cdot CH_3 + H = CH_3 \cdot CH_3$

IV. $C_2H_4NaCN + \underset{\underset{CN}{|}}{CH_2CH_3} = \underset{\underset{CH(CH_3)}{|}}{\overset{C_2H_5}{\overset{|}{C}}} = N \cdot Na$
$\qquad\qquad\qquad

Gesamtmenge des Natrinms	Natrium als Cyannatrium	Verhältnis des Natriums im Cyannatrium zur Gesamtmenge des Natriume	Äthan in ccm	In Reaktion getretenes Propionitril in g	Gesamtmenge des angewandten Propionitrils	Gewichtsverhältnis des Natriums zum in Reaktion getretenen Propionitril	Molekularverhältnis des Natriums zum in Reaktion getretenen Propionitril	Ausbeute an Rohkyanäthin in g auf das in Reaktion getretene Propionitril bezogen
16	5,48	1 : 2,9	—	84	114	1 : 5,2	1 : 2,2	54 g = 64,3%
18,5	6,015	1 : 3,07	—	96	164	1 : 5,2	1 : 2,2	55 g = 60%
5,6	—	—	1730 = 1,77 g Na	42,5	57,5	1 : 7,6	1 : 3,2	—
14,5	4,6	1 : 3,15	3670 bei 0° 760 mm = 3,77 g Na	76,8	203	1 : 5,3	1 : 2,3	—
11	3,3	1 : 3,3	—	74	102	1 : 6,7	1 : 2,8	45 g = 60%
12,2	4,0	—	—	89	120	1 : 7,3	1 : 3,1	—
28,6	—	—	—	—	199	1 : 6,95	—	—
28	—	—	—	176	231	1 : 6,28	1 : 2,6	104 = 60%
29	—	—	—	193	254	1 : 6,65	1 : 2,8	115 = 60%
47	—	—	—	338	422	1 : 7,2	1 : 3,01	211 = 62,5%
29	9,35	1 : 3,1	—	220	290	1 : 7,58	1 : 3,2	
28	—	—	—	197	300	1 : 7,04	1 : 2,9	126 = 64%
30	—	—	—	195	275	1 : 6,5	1 : 2,7	135 = 69%
24	—	—	—	123	250	1 : 5,1	1 : 2,6	—
26	—	—	—	129	247	1 : 5	1 : 2,1	—
12	3,85	1 : 3,1	3875 = 3,989 Na	80	100	1 : 6,7	1 : 2,7	55 = 70%

Wasser. — Ferner ist hervorzuheben, daß das so gewonnene Kyanäthin keineswegs nur in Gestalt seiner Natriumverbindung (gemäß Gleichung V) in dem Produkte der Reaktion enthalten ist; stets kann diesem ein Teil der Base durch Benzol, das Natriumkyanäthin nicht löst, entzogen werden. Nach Beendigung des komplizierten chemischen Prozesses besteht offenbar ein Gleichgewichtszustand, der von den Versuchsbedingungen abhängig ist.

In der Hauptsache kann man auf Grund obiger Erörterungen und an der Hand der Tabelle folgendes feststellen:

Das feste Endprodukt der Wechselwirkung von Natrium und Äthylcyanid enthält Natrium-Kyanäthin, freies Kyanäthin, Natrium-Äthylcyanid und Cyannatrium. Während die Entstehung von Natrium-Kyanäthin aus Gleichung V erhellt, kann die von freiem Kyanäthin vielleicht durch Einwirkung von 2 Mol. Äthylcyanid auf das intermediär gebildete Natrium-Dipropionitril (Gl. IV) erklärt werden:

VI. $C_6H_9NaN_2 + 2\,C_2H_5CN = C_9H_{15}N_3 + C_2H_4NaCN.$

So würde die Anwesenheit von Natrium-Äthylcyanid[1]) eine Deutung finden, welches zur Bildung von propionsaurem Natrium und Ammoniak (s. ob.) Anlaß gibt. Die Menge des Natriums steht dann zum verbrauchten Äthylcyanid im Verhältnis 1 : 2,5. Nimmt man weiter an, daß Natrium-Äthylcyanid, fermentartig wirkend, eine größere Menge Cyanäthyl in Kyanäthin umsetzt, und erinnert man sich des Auftretens von Ammoniak, das durch die reduzierende Wirkung des Wasserstoffs auf Äthylcyanid entstehen kann, so versteht man die verschiedenen, in der Tabelle niedergelegten Beobachtungen; auch die Ausbeuten an Kyanäthin, die meist gegen 60% des zur Reaktion gelangten Äthylcyanids betragen, werden verständlich.

Bildung von Kyanäthin aus Äthylcyanid und Lithium oder Kalium. — Bemerkenswert ist die Abhängigkeit der Wirkung dieser Alkalimetalle auf das Cyanid von der Größe ihres Atomgewichtes, bezw. ihrer chemischen Energie. Das Lithium wirkt am trägsten auf Cyanäthyl ein, und zwar ist — wie bei Natrium — das Verhältnis der reagierenden Stoffe etwa 1 At. Li : 2,7 Mol. C_2H_5CN, aber nur $^1/_4$—$^1/_5$ des Lithiums findet sich als Cyanmetall, was für die Ausbeute günstig ist, die 80% erreicht.

1) Die Neigung von Natrium-Dipropionitril zur Bildung von Natrium-Äthylcyanid ist oben (S. 345) gezeigt worden.

Beifolgende Tabelle erläutert diese Verhältnisse.

Gesamtmenge des Lithiums	Lithium als LiCN	Verhältnis des Lithiums als LiCN zur Gesamtmenge des Lithiums	In Reaktion getretenes C_2H_5CN	Angewandtes C_2H_5CN	Gewichtsverhältnis Li : C_2H_5CN	Molekularverhältnis Li : C_2H_5CN	Ausbeute an Rohkyanäthin.
In der Retorte 1 g	0,218	1 : 4,6	ca. 20	20	1 : 20	1 : 2,6	16 g ca. 80 %
Im Einschlußrohre 0,14 g	0,0304	1 : 4,6	ca. 3	ca. 3	1 : 21	1 : 2,7	2,2 g ca. 80 %

Das bei den Versuchen gebildete Kyanäthin fand sich größtenteils in freiem Zustande vor, was zugunsten der Auffassung einer Fermentwirkung des Lithium-Äthylcyanids ($C_2H_4 \cdot Li \cdot CN$) spricht.

Bei Anwendung von *Kalium* liegen infolge der viel größeren chemischen Energie und Reaktionsgeschwindigkeit die Verhältnisse ungünstiger, als beim Lithium und Natrium (s. Tabelle). Schon

Gesamtmenge des Kaliums	Kalium als KCN	Verhältnis des Kaliums als KCN zur Gesamtmasse des Kaliums	In Reaktion getretenes C_2H_5CN	Angewandtes C_2H_5CN	Mol. Verhältnis K : C_2H_5CN	Gewichtsverhältnis K : C_2H_5CN	Ausbeute in %
9 g	4,16 g	1 : 2,2	40	40	1 : 4,5	1 : 3,15	10 g 25 %
2	0,8 g	1 : 2,5	9 g	15	1 : 4,5	1 : 3,2	ca. 2 g 20 %

die Menge des in Cyanid verwandelten Kalium gegen $^2/_5$ läßt dies erwarten; obwohl das Verhältnis K : C_2H_5CN, ähnlich wie beim Natrium, annähernd 1 : 3 ist, so stellt sich doch die Ausbeute viel geringer, als bei Anwendung der andern Metalle. Gewiß sind auch Nebenreaktionen, die sich stärker, als in obigen Fällen, bemerklich machen, Schuld daran.

Während *Lithium* schon in seiner Wirkung auf Äthylcyanid eine erhebliche Abschwächung gegenüber dem Natrium zeigt, ist *Magnesium*[1]) nur im aktivierten Zustande (Mg mit wenig Jodäthyl in Äther geschüttelt) und bei sehr hohen Temperaturen wirksam; dies wurde durch Erhitzen von Benzylcyanid mit solchem

1) HERMSDORF, Dissertation S. 24.

Magnesium bei 160° gezeigt, wobei man Kyanbenzylin (S. 342) in einer Ausbeute von 45% erhielt.

Kyanalkine aus Cyaniden und Natriumamid.[1]) Die Wechselwirkung von Äthylcyanid und Natriumamid verläuft glatter, als die mit Natrium, da die Nebenreaktionen (Bildung von Cyannatrium, Äthan, Reduktion von Äthylcyanid) fehlen. Sicher entsteht in erster Linie neben Ammoniak Natrium-Äthylcyanid, und dieses wirkt auf das Cyanid polymerisierend ein:

$$C_2H_5CN + NaNH_2 = H_3N + C_2H_4NaCN.$$

Bei einem Versuche wurden 10 g C_2H_5CN und 3 g $NaNH_2$ im Einschmelzrohr auf 165° erhitzt, und man erhielt gegen 10 g (also nahezu 100%) *Roh*-Kyanäthin; das meiste war als Natriumverbindung in dem Produkte enthalten.

Ganz ähnliche, günstige Ergebnisse wurden mit anderen Cyaniden: *Benzyl-, Methylcyanid* erzielt. Auch das *Phenylcyanid*, C_6H_5CN, ließ sich durch Erhitzen mit Natriumamid zu Kyaphenin polymerisieren (jedoch in geringerem Betrage, gegen 20%). Die Überführung anderer aromatischer Nitrile (z. B. o- und p-Tolunitril) in Polymere gelang *nicht*.

Cyanide und Alkylate.[2]) — Nur die Natriumverbindungen der aliphatischen Alkohole wirken in scharf getrocknetem Zustande polymerisierend auf Alkylcyanide ein, die *Natriumphenylate* eignen sich dazu *nicht*. Am besten läßt man auf ein Cyanid die Natriumverbindung mit dem gleichen Alkyl im Einschlußrohr bei 130° bis 140° einwirken.[3]) Die Ausbeuten bei Gewinnung von Kyanäthin und Kyanmethin betragen $^2/_3$ des in Reaktion getretenen Alkylcyanids; Cyannatrium bildet sich nur in sehr geringer Menge. — Ohne Zweifel geht der Entstehung von Kyanalkin die von Natrium-Äthylcyanid voran, welches mit dem überschüssig vorhandenen Äthylcyanid in Wechselwirkung tritt, z. B.:

$$C_2H_5CN + NaOC_2H_5 = C_2H_4NaCN + C_2H_5OH.$$

Die ziemlich gleiche Ausbeute an Kyanalkin läßt auf ein konstantes Gleichgewicht schließen, das sich zwischen Kyanalkin, Natrium-Alkylcyanid, Alkohol und Alkylcyanid einstellt.

1) Das. S. 30. 2) J. pr. Ch. 38, 584; 42, 2 ff.

3) Über die Bildung von Kyanalkinen aus einem Gemisch von Cyaniden mittels Natriumäthylat vgl. J. pr. Ch. 42, 8.

Wie in den bisher erörterten Fällen, so ist die Bildung einer *Metall*-Verbindung des Alkylcyanids auch bei Anwendung einiger anderer Mittel, die zur Polymerisation von Äthylcyanid gedient haben, anzunehmen. So wandelt Natriumcyanamid[1]) (technisches Präparat mit 80% Na_2NCN) Äthylcyanid in Kyanäthin um, jedoch wurden nur etwa 40% des Cyanids polymerisiert. Beim *Benzyl*cyanid war die Wirkung dieser Natriumverbindung günstiger, indem 65% Kyanbenzylin gewonnen wurden.

Zinkäthyl[2]) gehört ebenfalls zu den Polymerisationsmitteln, die Alkylcyanide in Kyanalkine umzulagern vermögen. Erhitzt man z. B. Äthylcyanid (5 Teile) mit Zinkäthyl (3 Teilen) im Einschlußrohr auf 150°, so kann man aus dem Produkte, das keine Spur Cyanzink enthielt, gegen 50% Kyanäthin gewinnen. Die einfachste Annahme ist folgende: Zuerst bildet sich aus gleichen Mol. der Agentien neben Äthan (das nachgewiesen wurde) eine Äthyl-Zinkverbindung, $C_2H_4(ZnC_2H_5)CN$, die mit dem überschüssigen Äthylcyanid (2 Mol.) zusammentritt:

$$C_2H_5CN + Zn(C_2H_5)_2 = C_2H_6 + C_2H_4(ZnC_2H_5)CN$$

$$C_2H_4(ZnC_2H_5)CN + 2C_2H_5CN = C_9H_{14}(ZnC_2H_5)N_3.$$

Durch Zersetzen mit Wasser zerlegt sich das letzte Produkt in Äthan, Zinkoxyd und Kyanäthin. — Schließlich sei bemerkt, daß auch eine Sauerstoffverbindung, das wasserfreie *Baryumoxyd*, als fähig erkannt wurde, beim Erhitzen auf 200° (im Rohr) Äthylcyanid teilweise (etwa 35%) in Kyanäthin umzulagern; vielleicht bildet sich hierbei zuerst eine Baryumverbindung des Äthylcyanids: $C_2H_4(BaOH)\cdot CN$, die polymerisierend wirkt.

Durch die obigen Untersuchungen über Kyanalkine ist der Zusammenhang dieser mit den Alkylcyaniden, aus denen sie hervorgehen, also ihre chemische Konstitution klar gelegt worden; auch die Vorgänge, die sich bei der Entstehung der trimolekularen Nitrile aus den einfachen abspielen, sind in wesentlichen Punkten derart erforscht worden, daß man sie zu beschreiben vermag.

---

1) Hermsdorf, a. a. O. S. 40. 2) Das. S. 28.

Druckfertig erklärt 8. XII. 1905.]

Ebene Kurvennetze ohne Umwege.

Von

Georg Scheffers.

Unter einem *Kurvennetz* in der Ebene verstehen wir zwei Scharen von je einfach unendlich vielen Kurven in der Ebene derart, daß durch jeden allgemein gewählten Punkt je eine Kurve jeder Schar hindurchgeht. Wird einer Kurve von jeder Schar ein Fortschreitungssinn beigelegt, in dem ihre Bogenlänge positiv sein soll, so haben alle Kurven beider Scharen infolge der Stetigkeit bestimmte Fortschreitungssinne, da zu jeder Kurve eine unendlich benachbarte vorhanden ist, auf der man den Fortschreitungssinn in entsprechender Weise festsetzen wird.

Sind nun P und Q zwei beliebige Punkte in der Ebene, so kann man, *beständig Kurven des Netzes folgend*, auf unendlich vielen Wegen von P nach Q gelangen, indem man nach Belieben einmal einer Kurve der einen Schar, dann einer Kurve der andern Schar usw. nachgeht (siehe Fig. 1). Wenn alle diese Wege von P nach Q die gleiche (nur von P und Q abhängige) Gesamtbogenlänge haben — mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen der Bogenlängen —, so soll das Netz ein *Kurvennetz ohne Umwege* heißen.

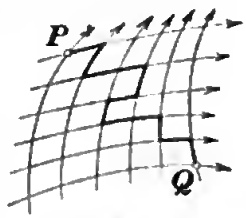


Fig. 1.

Zu solchen Netzen, die meines Wissens bisher noch nicht allgemein um ihrer selbst willen untersucht worden sind, gelangt man auf drei verschiedene Weisen.

Erstens: Es sei $\varphi(x, y)$ eine *Funktion des Ortes* (x, y) in der Ebene. Die Geschwindigkeit v, mit der sich φ auf einem unendlich kurzen Wege ds vom Punkte (x, y) aus ändert, ist

$$v = \frac{d\varphi}{ds} = \varphi_x \frac{dx}{ds} + \varphi_y \frac{dy}{ds}.$$

Insbesondere gibt es *zwei* Richtungen $dy : dx$ vom gewählten Punkte (x, y) aus, auf denen $v = 1$ ist. Sie werden durch die Bedingung

$$(\varphi_x dx + \varphi_y dy)^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

gegeben. Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, die zwei Scharen von je einfach unendlich vielen Integralkurven hat. Die Integralkurven bilden also ein Kurvennetz. Auf allen Kurven des Netzes ist v überall gleich Eins, d. h. gehen wir von irgend einem Punkte (x_0, y_0) nach irgend einem andern Punkte (x_1, y_1) auf irgend einem solchen Wege, der aus lauter Stücken von Integralkurven der einen oder anderen Art besteht, so ist der zurückgelegte Weg insgesamt gleich

$$\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0),$$

also nur von den beiden Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) abhängig, d. h.: *die Integralkurven der Differentialgleichung* (1) *bilden ein Kurvennetz ohne Umwege.*

Zweitens: In der Ebene sei eine *zweifach unendliche Schar von Kreisen* in der Art gegeben, daß jeder Punkt (x, y) der Ebene Mittelpunkt eines Kreises der Schar ist. Der Kreisradius r darf dabei eine beliebige Funktion der Koordinaten x, y des Mittelpunktes sein. Wir wollen aus dieser Kreisschar eine solche einfach unendliche Schar von Kreisen herausgreifen, die die Krümmungskreise einer Kurve sind. Zwei unendlich benachbarte Kreise mit den Mitten (x, y) und $(x + dx, y + dy)$ und den Radien r und $r + dr$ sind dann und nur dann benachbarte Krümmungskreise einer Kurve, wenn sie einander berühren, d. h. wenn ihre Zentrale $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gleich der Differenz dr ihrer Radien ist, wenn also

$$(r_x dx + r_y dy)^2 = dx^2 + dy^2$$

ist. Diese Gleichung hat wieder die Form (1). Also folgt, *daß die Evoluten derjenigen Kurven, deren Krümmungskreise sämtlich einer gegebenen zweifach unendlichen Kreisschar angehören, ein Kurvennetz ohne Umwege bilden.*

Drittens: Es sei

$$z = f(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche. Ihre *Minimalkurven* erfüllen die Differentialgleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

oder:

$$(f_x dx + f_y dy)^2 + dx^2 + dy^2 = 0.$$

Setzen wir $f = i\varphi$, so nimmt sie die Form (1) an. Daraus folgt, *daß die Projektionen der Minimalkurven einer beliebigen Fläche auf eine beliebige Ebene stets ein Kurvennetz ohne Umwege bilden.*

Diese drei Ergebnisse lassen sich ohne Mühe umkehren:

Erstens: Liegt in der Ebene ein Kurvennetz ohne Umwege vor und ordnet man irgend einem Punkte (x_0, y_0) der Ebene die Zahl Null zu, so kann man einem beliebigen Punkte (x, y) der Ebene diejenige Zahl zuordnen, die gleich der Gesamtbogenlänge eines Weges im Netze ist, der vom Punkte (x_0, y_0) zum Punkte (x, y) führt. Da alle Wege des Netzes vom einen zum andern Punkte nach Definition gleichlang sind, so folgt, daß dadurch jedem Punkte (x, y) eine Funktion $\varphi(x, y)$ von x, y allein zugeordnet ist. Die Kurven des Netzes sind alsdann diejenigen, auf denen sich die Ortsfunktion $\varphi(x, y)$ überall mit der Geschwindigkeit Eins ändert.

Zweitens: Ist ein Kurvennetz ohne Umwege und damit nach dem Vorhergehenden eine Ortsfunktion $\varphi(x, y)$ gegeben, so konstruieren wir um jeden Punkt (x, y) der Ebene denjenigen Kreis, der den zugehörigen Wert $\varphi(x, y)$ der Ortsfunktion zum Radius hat. So ergibt sich eine zweifach unendliche Schar von Kreisen. Diejenigen Kreise, deren Mitten längs irgend einer Kurve des Netzes liegen, sind alsdann die Krümmungskreise einer Kurve.

Drittens: Ist ein Kurvennetz ohne Umwege und damit nach dem Vorhergehenden eine Ortsfunktion $\varphi(x, y)$ gegeben, so errichten wir in jedem Punkte (x, y) der Ebene auf die Ebene ein Lot, dessen Länge gleich dem i-fachen des dem Punkte (x, y) zugehörigen Wertes der Ortsfunktion $\varphi(x, y)$ ist. Der Ort der Endpunkte dieser Lote ist eine Fläche $z = i\varphi(x, y)$, deren Minimalkurven senkrecht über den Kurven des Netzes liegen.

Es ist erwünscht, *die Kurvennetze ohne Umwege durch eine Eigenschaft zu charakterisieren, die dem Netze in der unendlich kleinen Umgebung einer beliebigen Stelle zukommt.* Dazu gelangen wir auf folgendem Wege:

Zuerst schicken wir eine Bemerkung voraus, die überhaupt für *jedes* Kurvennetz in der Ebene gilt. Es seien $c_0, c_1, c_2 \ldots$ und $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ Kurven der beiden Scharen eines Kurvennetzes. P_0 sei der Schnitt von c_0 und γ_0 (siehe Fig. 2). Wählen wir P_1 unendlich nahe bei P_0 auf γ_0, so gehe durch P_1 die Kurve c_1 des Netzes. Es seien t_0 und t_1 die Tangenten von c_0 und c_1 in P_0 bez. P_1. Ihr Schnittpunkt sei T_0. *Alsdann ist die Länge*

der Strecke P_0T_0 ganz unabhängig davon, wie klein man auch die unendlich kleine Strecke P_0P_1 auf γ_0 wählen mag. Es folgt dies einfach daraus, daß sich die Länge P_0T_0 als Grenzwert für $\lim P_0P_1 = 0$ ergibt.

Fig. 2.

Nach dieser Vorbemerkung sei *insbesondere* vorausgesetzt, daß ein Kurvennetz *ohne Umwege* vorliege. Alsdann wählen wir noch Q_1 auf c_0 so, daß die Bogenlängen P_0P_1 und P_0Q_1 einander gleich sind. Durch Q_1 gehe die Netzkurve γ_1 der zweiten Schar Es sei R der Schnittpunkt von c_1 und γ_1 (siehe Fig. 3). Da ein Netz ohne Umwege vorliegt, so muß nun $P_0P_1 + P_1R = P_0Q_1 + Q_1R$ oder also $P_1R = Q_1R$ sein. Also sind P_0, P_1, R, Q_1 die Ecken eines unendlich kleinen *Deltoids* (d. h. Vierecks mit je zwei zusammenstoßenden gleichlangen Seiten). Ist nun T_0 der Schnittpunkt der Tangenten von c_0 in P_0 und c_1 in P_1 und S_0 der Schnittpunkt der Tangenten von γ_0 in P_0 und γ_1 in Q_1, so ist T_0 als Schnittpunkt der Viereckseiten P_0Q_1 und P_1R und S_0 als Schnittpunkt der Viereckseiten P_0P_1 und Q_1R aufzufassen. Da das Viereck ein Deltoid ist, so muß also $P_0T_0 = P_0S_0$ sein.

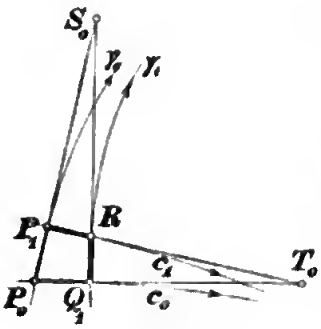


Fig. 3.

Nach der vorausgeschickten Bemerkung ist die Lage von T_0 (und entsprechend die von S_0) unabhängig davon, wie unendlich nahe man P_1 (und entsprechend Q_1) auf γ_0 (bez. c_0) bei P_0 wählen mag. Also auch ohne die Annahme $P_0P_1 = P_0Q_1$ folgt:

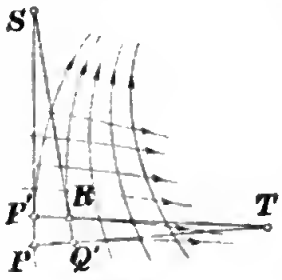


Fig. 4.

Ein Kurvennetz ohne Umwege hat folgende Eigenschaft: Wählt man eine Folge von unendlich benachbarten Kurven der einen Schar und eine Folge von unendlich benachbarten Kurven der andern Schar beliebig aus, so daß unendlich kleine Maschen entstehen, also etwa $PP'RQ'$ eine solche unendlich kleine Masche des Netzes ist, so liegt der Schnittpunkt T von PQ' und $P'R$ und der Schnittpunkt S von PP' und $Q'R$ so, daß stets $PT = PS$ ist (siehe Fig. 4).

Wir wollen jetzt analytisch zeigen, daß diese Eigenschaft des Netzes im Infinitesimalen für Kurvennetze ohne Umwege *charakteristisch* ist.

Es seien nämlich

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \beta(x, y)$$

die Differentialgleichungen von zwei Kurvenscharen c und γ, die ein Netz bilden. Die durch den Punkt P oder (x, y) gehende Kurve c hat in P als Tangente die Gerade

$$(3) \qquad \mathfrak{y} - y - \alpha(\mathfrak{x} - x) = 0$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Wir gehen längs der durch P gehenden Kurve γ der zweiten Schar unendlich wenig weiter bis zu einem Punkte P' oder $(x + \delta x, y + \delta y)$, so daß nach (2):

$$(4) \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \beta(x, y)$$

ist. Die durch P' gehende Kurve der ersten Schar hat in P' eine Tangente, deren Gleichung aus (3) hervorgeht, wenn wir x und y um δx und δy variieren. Für den Schnittpunkt T oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ beider ewähnten Tangenten ist daher außer (3) auch die Gleichung:

$$-\delta y + \alpha\delta x - (\alpha_x \delta x + \alpha_y \delta y)(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = 0$$

oder wegen (4) die Gleichung:

$$-\beta + \alpha - (\alpha_x + \alpha_y \beta)(\mathfrak{x} - x) = 0$$

erfüllt, so daß sich für ihn:

$$\mathfrak{x} - x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha_x + \alpha_y \beta}, \qquad \mathfrak{y} - y = \frac{\alpha - \beta}{\alpha_x + \alpha_y \beta}\alpha$$

ergibt. Demnach ist

$$PT^2 = \frac{(1 + \alpha^2)(\alpha - \beta)^2}{(\alpha_x + \alpha_y \beta)^2}.$$

Analog ergibt sich, wenn man die beiden Scharen in ihrer Bedeutung vertauscht:

$$PS^2 = \frac{(1 + \beta^2)(\beta - \alpha)^2}{(\beta_x + \beta_y \alpha)^2}.$$

Nun fordern wir nach dem Obigen $PT^2 = PS^2$, d. h.:

$$(\alpha_x + \alpha_y \beta)\sqrt{1 + \beta^2} = \pm (\beta_x + \beta_y \alpha)\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Setzen wir $\alpha = \operatorname{tg} u$, $\beta = \operatorname{tg} v$, so daß statt (2)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} u(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} v(x, y) \tag{5}$$

die Differentialgleichungen der beiden Kurvenscharen werden, so geht diese Gleichung über in:

$$u_x \cos v + u_y \sin v = \pm (v_x \cos u + v_y \sin u)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos u \pm \cos v}{\sin (u - v)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin u \pm \sin v}{\sin (u - v)} = 0.$$

Es gibt also eine Funktion $\varphi(x, y)$, für die:

$$\varphi_x = \frac{\sin u \pm \sin v}{\sin (u - v)}, \qquad \varphi_y = -\frac{\cos u \pm \cos v}{\sin (u - v)}$$

ist. Alsdann ist:

$$\varphi_x \cos u + \varphi_y \sin u = \mp 1,$$

$$\varphi_x \cos v + \varphi_y \sin v = 1,$$

d. h. in jedem Falle sind u und v Lösungen der Gleichung für w:

$$(\varphi_x \cos w + \varphi_y \sin w)^2 = 1. \tag{6}$$

Bei der ersten Differentialgleichung (5) ist aber:

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad \sin u = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und bei der zweiten analog:

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad \sin v = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

folglich gilt nach (6) für den Differentialquotienten y' bei beiden Kurvenscharen die Bedingung:

$$(\varphi_x + \varphi_y y')^2 = 1 + y'^2$$

oder:

$$(\varphi_x dx + \varphi_y dy)^2 = dx^2 + dy^2.$$

Dies aber ist die Differentialgleichung (1) eines Kurvennetzes ohne Umwege.

Hiermit ist also bewiesen, *daß für ein Kurvennetz ohne Umwege die Eigenschaft charakteristisch ist, daß bei jeder unendlich kleinen Masche $PP'RQ'$ des Netzes der Schnittpunkt T von PQ und $P'R$ gerade soweit von P entfernt sein muß wie der Schnittpunkt S von PP' und $Q'R$.* Hierbei ist, was wir der Kürze halber vorhin unerwähnt gelassen haben, stillschweigend

vorausgesetzt worden, daß die Kurven in den Richtungen PP' und PQ' beide positiven oder beide negativen Fortschreitungssinn haben.

Um noch ein *Beispiel* eines Kurvennetzes ohne Umwege anzugeben, gehen wir von den Minimalkurven einer Rotationsfläche:

$$z = iF(\sqrt{x^2 + y^2})$$

aus. Ihre Differentialgleichung lautet:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right)^2 = dx^2 + dy^2$$

oder, wenn wir Polarkoordinaten r, t einführen, also $x = r\cos t$ und $y = r\sin t$ setzen:

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)^2 dr^2 = r^2 dt^2 + dr^2,$$

woraus folgt:

$$t = \pm \int \frac{1}{r}\sqrt{F'(r)^2 - 1}\, dr$$

Nach dem Früheren sind dies die Gleichungen eines speziellen Kurvennetzes ohne Umwege, geschrieben in Polarkoordinaten r, t. Bezeichnen wir das Integral mit $f(r)$, so folgt, daß

$$t = \pm f(r) + \text{konst.}$$

ist, d. h.:

Läßt man eine Kurve c in der Ebene um den Anfangspunkt O rotieren, so gehören die hervorgehenden einfach unendlich vielen Kurven zu einem speziellen Kurvennetz ohne Umwege. Die zugehörige zweite Schar geht durch Spiegelung dieser Schar an einer Geraden durch O hervor. Dasselbe folgt ohne Rechnung daraus, daß die Schar der Minimalkurven der Rotationsfläche die Drehungen um die Achse gestattet.

Wählen wir als Fläche im Raume eine Minimalfläche, so ergibt sich durch Projektion ihrer Minimalkurven auf eine Ebene ein triviales Kurvennetz ohne Umwege, bestehend aus zwei Scharen von je einfach unendlich vielen kongruenten Kurven, die durch Schiebung einer Kurve längs einer anderen hervorgehen.

Druckfertig erklärt 9. XII. 1905.]

GEMEINSAME ÖFFENTLICHE SITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1905.

Die Mängel der psychischen Fähigkeit perspektivische Bilder richtig aufzufassen.

Von

Arthur von Öttingen.

Ein perspektivisches Bild wird für eine bestimmte Entfernung des Auges $\mathfrak{A}$ von der Bildfläche entworfen. Diese sogenannte „Distanz“ ist ein Hauptelement, sowohl bei Herstellung der Zeichnung, als auch in der Auffassung. Die Horizontebene schneidet das Bild im Horizont *H*. Ein Lot vom Auge $\mathfrak{A}$ auf die Bildfläche trifft den sogenannten Hauptpunkt *O* des Horizontes. Die drei Stücke *H*, *O* und *D* sind die einzigen gegebenen Elemente perspektivischer Zeichnung; man könnte höchstens noch ein viertes hinzufügen, den Maßstab, der an irgend einer Stelle, am besten am unteren Bildrande, angegeben wird. Ohne Maßstab sind alle Strecken nur in ihrem Verhältnis zu einander zu erfassen. Obwohl nun ein Bild nur für einen bestimmten Augenpunkt entworfen ist, gibt es doch viele Fälle, in denen Teile der Zeichnung richtig erscheinen, wenn der Beschauer seinen Standpunkt verläßt. Es gibt Freiheiten der Augenbewegung ohne Gefahr einer Bildverzerrung. Diese Freiheiten habe ich systematisch und kombinatorisch in bezug auf die Elemente *H*, *O* und *D* in einer Abhandlung dargestellt in den Berichten der Königl. Gesellsch. vom 14. Nov. 1901 unter dem Titel: „Eine Forderung der malerischen Perspektive vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet“. Ich gedenke hierauf heute nur beiläufig zurückzukommen, möchte vielmehr gerade die entgegengesetzte Frage behandeln. *Trotz Einhaltung* des richtigen Augenpunktes kann das Bild unrichtig oder mangelhaft erfaßt werden. Es liegt die Frage nahe, ob auch dieser Fall sich systematisch ordnen läßt. Bei dieser Untersuchung kommt man zu der Erkenntnis, daß zwar Mängel vorhanden sind, daß aber eine Schulung oder Übung des Vorstellungsvermögens möglich ist und zwar auf Grund der logischen Kraft

mathematischer Betrachtung. Das strenge mathematische Gesetz bietet uns ein Mittel dar, die Vorstellungsfähigkeit zu prüfen, zu berichtigen und merklich zu fördern.

Zwei Elementargebilde sind es, die in Frage kommen, *Strecken* und *Winkel*, speziell auch *Entfernungen* vom Beschauer und Erhebungen oder Neigungen von Linien in vertikalen Ebenen.

Die Schätzung von Strecken wird mit zunehmender Entfernung immer unsicherer, bis in großer Entfernung alle Schätzung gänzlich aufhört. Ferne Größen werden immer unterschätzt. Niemand vermag das Zifferblatt der Turmuhr richtig anzugeben und weit über Lebensgröße hergestellte Statuen auf hohen Häusern werden als lebensgroß erfaßt. Unser Auge dringt in unabsehbare Fernen, bis in die Fixsternwelt, aber alle Größenangaben schwinden schon bei Sonne und Mond; es scheint hier nur noch der Gesichtswinkel uns psychisch zu beschäftigen und für den fernen Hintergrund von Landschaften gilt dasselbe. Wenn wir in freier Natur schon in der perspektivischen Gewandtheit behindert sind, so kann es nicht auffallen, daß auch in der richtigsten mathematischen Zeichnung wir in Verlegenheit geraten.

Wenden wir uns zunächst einfachen, rein mathematischen Zeichnungen zu. Auf unserer Bildfläche können Gebilde der Fuß- oder Standebene gezeichnet werden. Daß alle nach einem Horizontpunkte gezogenen Linien einander parallel sind, ist nicht ganz leicht zu sehen. Erst wenn bekannte Objekte sich über diesen Linien erheben, sehen wir in die Tiefe der Fußebene hinab; so z. B. bei einer Allee von Bäumen, die gleich weit von einander abstehen. In größerer Bildtiefe werden die Abstände so klein, daß sie bald unserer Vorstellung entschlüpfen. Parallelität der im Horizont sich schneidenden Linien ist das erste Gebilde, dessen Vorstellung wir durch mathematische Betrachtung einüben. Hierbei wird durch das bekannte Teilungsprinzip sowohl die Abteilung perspektivisch gleich großer Strecken nach der Tiefe hin, $ab = bc = cd = \cdots$ (Fig. 1), als in brachialer Richtung $aa' = bb' = cc' = \cdots$ die gleich bleibende Entfernung beider Linien von einander zu erfassen sein. Dasselbe geschieht für über einander liegende

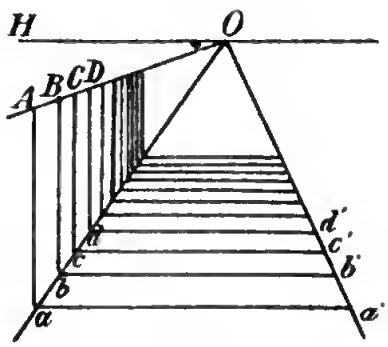


Fig. 1.

parallele Linien hinsichtlich der gleichen *Erhebungen* $aA = bB = cC = \cdots$, bis in gewisser Tiefe je nach der absoluten Größe und Feinheit der Zeichnung die Möglichkeit einer Unterscheidung aufhört. Irgendwo stößt man auf eine Schranke; doch besteht weiter die mathematische Einsicht in eine unendlich große Anzahl endlicher Strecken bis zum mathematischen Horizont, und daß die Anzahl unendlich groß ist, wird nach dem Teilungsprinzip sofort anschaulich, kann aber auch auf Grund der Aufsuchung harmonischer Punkte dargetan werden,

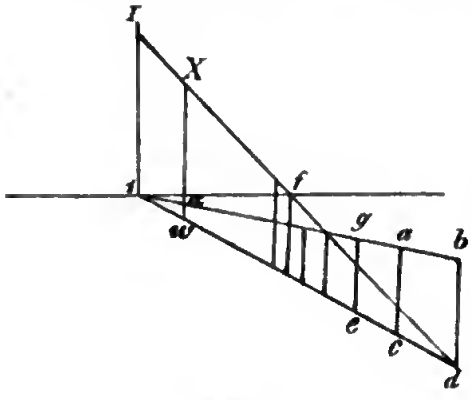


Fig. 2.

denn c ist harmonisch zu a, b und O, (Fig. 1) und d wieder harmonisch zu b, c und O usf. bis ins Unendliche.

Eine vom Terrainpunkt d (Fig. 2) nach einem unendlich fernen Fluchtpunkt aufsteigende Linie können wir uns noch recht gut vorstellen, nur werden wir die Länge der Lote in der zugehörigen Vertikalebene d 1 I um so weniger leicht erfassen, je tiefer im Terrain die Lotlinie sich erhebt. Auch hier hilft unserer Vorstellung die mathematische Betrachtung zurecht. Wir ziehen durch irgend einen Punkt die horizontale Gerade 1 b und kennen bereits die gleich großen vertikalen Strecken $db = ca = eg = \cdots$ Nun wird es leichter, die anderen vertikalen Linien bis zur geneigten Geraden dI sich vorzustellen, denn in jeder vertikalen Linie herrscht vollkommene geometrische Proportionalität; so z. B. zwischen $w\alpha$ und wX. Noch schwieriger aber erkennen wir das perspektivische Ansteigen einer Linie wie A II (Fig. 3), die geometrisch sich herabsenkt nach dem Fluchtpunkte II. Daß die geometrisch kleiner werdenden Vertikalen $aA, bB, cC \cdots$ perspektivisch anwachsen, muß auch durch

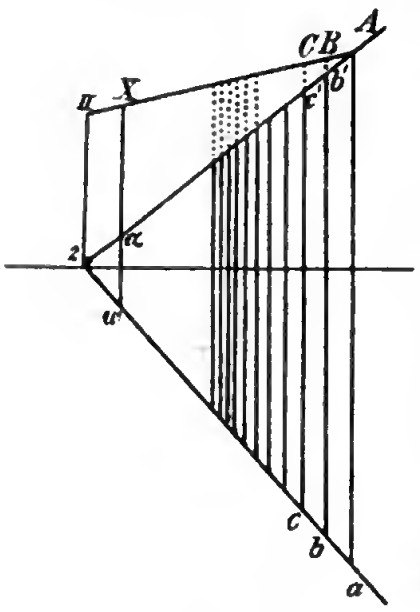


Fig. 3.

ein Hilfsmittel unterstützt werden. Zieht man die Gerade $2A$, die vorhin schon als parallel der Fußspur erkannt wurde, so sieht man die Strecken $aA, bb', \cdots$ als gleich groß an und an irgend einer Stelle ist dann $w\alpha$ mit wX geometrisch vergleichbar. Jetzt ersieht man auch das Ansteigen der Geraden A II. Dieses Beispiel lehrt, daß es nicht ohne weiteres möglich ist, Neigungswinkel von Geraden gegen die Fußebene richtig aufzufassen, d. h. nicht ohne Abmessung im Winkelmeßpunkte.

Alle nach einem Fluchtpunkt hingerichteten Strahlen sind einander parallel. Man sieht oft am Abendhimmel die Sonnenstrahlen von der Sonne ausgehen; daß alle diese Strahlen im Raume einander parallel sind und auf uns und unsere Umgebung zustrahlen ist nicht leicht vorzustellen. Gewiß hat es deshalb so lange gedauert, bis ein Schiaparelli die Sternschnuppentheorie aufstellen konnte.

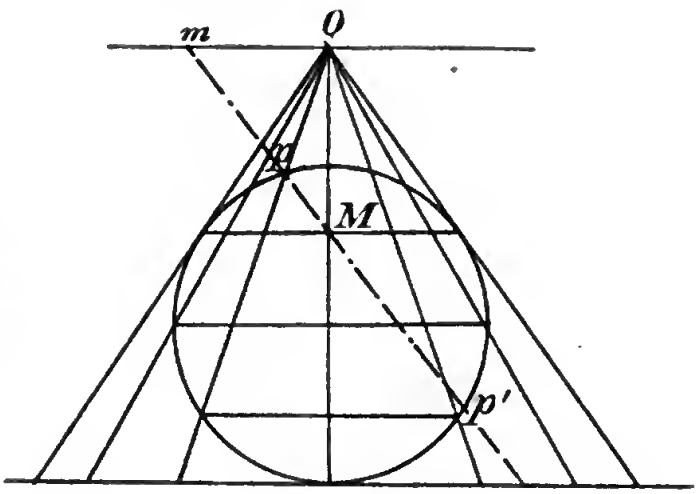


Fig. 4.

Gewisse mathematische Figuren sind sehr geeignet unsere mangelhafte Vorstellungsfähigkeit kundzutun. Das sind die *perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte.*

Das Auge A vor der Bildfläche bestimmt mit der Kreisperipherie (Fig. 4) einen Kegelmantel von Projektionsstrahlen. Dieser Kegel von Projektionsstrahlen schneidet die Fußebene notwendig in einem Kegelschnitt, mithin kann der Kreis als Abbild eines Kegelschnittes betrachtet werden, der auf der Erde liegt. Wir bemühen uns ihn auf der Erde liegend vorzustellen.

Berührt oder schneidet der Kreis den Horizont nicht, so stellt er eine *Ellipse* dar, in speziellen Fällen auch einen *Kreis.* Nun läßt sich beweisen, daß der Mittelpunkt ein ganz bestimmter Punkt M des Bildes ist, sobald nur die Horizontalebene angenommen worden ist, *ganz unabhängig von der Stellung des Auges*

in der Horizontebene, denn M ist die Polare von H. Jede Sehne durch M halbiert die Ellipse. Wo man auch sein Auge stelle, immer bleibt es schwer, sich die beiden Ellipsenhälften vorzustellen, und zwar um so schwerer, je größer der Kreis ist und je näher er an den Horizont heranreicht, weil in diesen beiden Fällen M immer mehr vom geometrischen Kreismittelpunkt entfernt liegt. Wiederum tritt die mathematische Betrachtung mächtig helfend ein. Wir projizieren die brachialen Sehnen von einem Horizontpunkte aus in irgend eine Tiefe und erkennen, daß die durch M (Fig. 4) streichende Sehne die größte von allen einander geometrisch parallelen Sehnen ist, eine bekannte Eigenschaft eines Durchmessers. Man findet dasselbe von jedem Projektionspunkte im Horizonte aus.

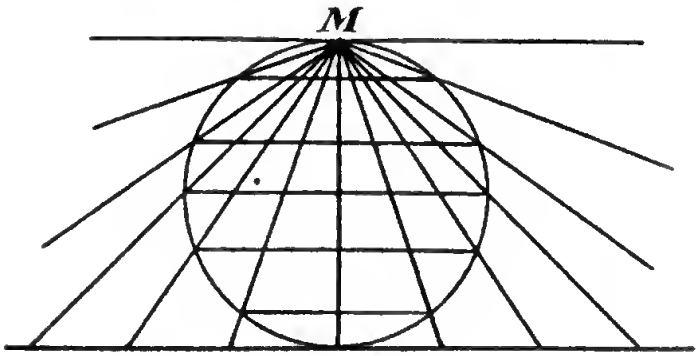


Fig. 5.

Berührt der Kreis den Horizont (Fig. 5), so ist er das Bild einer *Parabel*. Sie ist aus der Ellipse entstanden, die sich immer weiter nach der Tiefe erstreckt. Der Mittelpunkt M ist in den Horizont gefallen und dieser unendlich ferne Punkt ist das Bild der ganzen fernen halben Ellipse. Von einer entsprechenden Vorstellung kann nicht mehr die Rede sein, mathematische Logik ist allein Führer. Die Parabel wird gezeichnet als eine Kurve, die sich immer weiter öffnet. Das ist bei unserem Kreisbilde schwer zu sehen, allein die Projektion überzeugt uns davon, daß bis zum Horizont hin das Anwachsen der Sehnen sich fortsetzt bis endlich der geheimnisvolle Schwund der halben Ellipse auch der mathematischen Kontrolle entbehrt.

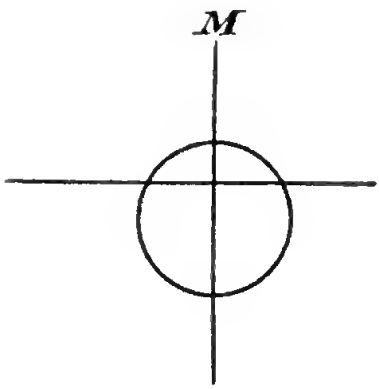


Fig. 6.

Rückt der Kreis noch weiter hinauf (Fig. 6), so wird der

Horizont geschnitten und der Kreis stellt jetzt eine Hyperbel dar mit zwei unendlich fernen Punkten. Der Mittelpunkt M ist aus dem Kreise herausgetreten und liegt im Rücken des Beschauers.

Es läßt sich die ganze Geometrie der Kegelschnitte an solchen Kreisbildern darstellen, wie ich an einem anderen Orte durchführen werde. Die Methode hat große Vorzüge: *Ganz geschlossene Kurven* liegen auch für die Parabel und Hyperbel vor, die *unendlich fernen Punkte sind zugänglich*, und mit Zirkel und Lineal lassen sich *kontinuierliche Kegelschnitte* hinzeichnen. Man könnte hier den Einwand erheben, daß bei mathematisch perspektivischer Zeichnung von Gebilden *in einer Ebene* nicht deutlich unterschieden wird, welche Teile *vorn* und welche *hinten* liegen, daß ferner Unterschiede der Entfernung, die in freier Natur sich kundtun, hier fehlen. Die mathematische Zeichnung entbehrt der Luftperspektive. Man kann diese indeß ersetzen durch Verdickung der vorderen Teile der Kurven. Es scheint aber bei unseren Kreisbildern auch dieses Mittel wenig zu helfen. Übung auf Grund mathematischer Logik führt immer am schnellsten zum Ziel. Auch die perspektivische Halbierung kann bei unseren Kreisbildern gesehen und geübt werden, denn auf jedem Durchmesser sind Peripheriepunkte perspektivisch gleich weit von M entfernt, was sich dadurch kundtut, daß M und m (Fig. 4) auf dem Horizont harmonisch sind zu p und p', und da m unendlich weit in der Fußebene liegt, so hälftet M die Strecke pp'. Übt man sich in der Bestimmung harmonischer Punkte, indem man zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt aus freier Hand einträgt und durch Konstruktion die Richtigkeit der Schätzung prüft, so übt man sich zugleich im Erfassen perspektivisch gleicher Strecken.

Es ist in dem erwähnten früheren Aufsatze dargetan worden, daß eine richtige Vorstellung von Winkeln in einer Ebene streng an den Ort des Auges gebunden sei. Aber auch hier zeigen sich Mängel, sobald die Verkürzungen bedeutende sind und die Bilder in der Tiefe liegen, während wir im Vordergrunde auch rein mathematische ebene Figuren nach einiger Übung gut uns vorstellen können. Anders ist es, wenn körperliche Figuren dargestellt werden; unsere Vorstellung ist viel gewandter, daher architektonische Zeichnungen leicht richtig zu erfassen sind, nur muß der Augenpunkt erkundet werden.

In der praktischen Malerei ist unsere Vorstellung weniger

behindert. Von sehr großen und gar unendlichen Entfernungen ist da nicht die Rede; bei Zeichnungen von Sonne und Mond bemerkt man schon Verlegenheiten, sie werden stets zu groß gezeichnet. Der gemalte Horizont ist in endlicher Entfernung vorzustellen; nebenbei ist der mathematische Horizont als unentbehrliches Element für richtige Abmessung von Gegenständen, von Strecken, Winkeln, Neigungen nicht zu vernachlässigen.

Die Auffassung einer Landschaft hängt merklich vom Standpunkt des Beschauers ab. Der folgende Versuch ist belehrend: Man fertige von einer Landschaft eine Photographie an, oder besser ein Pastellbild. Der Vordergrund sei reich gestaltet. Von diesem Bilde A fertige man zwei Kopien an, und zwar eine im doppelten Maßstabe und eine dritte im dreifachen. Stellt man A, B und C neben einander auf und vergleicht zunächst den Hintergrund, so empfindet man, daß ähnlich wie bei Sonne und Mond, auch hier der Gesichtswinkel abnimmt, je kleiner das Bild ist; von der Entfernung selbst können wir uns meist keine Vorstellung machen. Nur die Luftperspektive gibt einen Anhalt für die Tiefen der Hintergrundteile. Der Vordergrund aber erscheint uns um so tiefer, je kleiner das Format ist, und zwar müßte das nach mathematischem Beweise genau umgekehrt der Verkleinerung statthaben. Es muß A dreimal so tief erscheinen als C und zweimal so tief als B. Stellt man nun A in einer gewissen Entfernung auf, B zweimal so weit und C dreimal so weit, so erscheinen die Tiefen sowohl, als der Hintergrund merklich gleich. Nähert man sich jetzt den Bildern, so wird C tiefer als A erscheinen und entfernt man sich, so wird A tiefer als B und C aussehen. Dieser Versuch soll uns hier nur warnen unsere Fähigkeiten anzuklagen, wenn wir die nötige Bedingung, die einer richtigen Augenstellung, verletzen. Bei Aufstellung von Gemälden in Wohnräumen und in Museen ist der Versuch auch von Nutzen. Gestattet man nicht dem Beschauer soweit zurückzutreten, wie die vom Maler gewählte Distanz es erheischt, so muß der Vordergrund an Tiefe verlieren. Unser Leipziger Museum wird fast überall das rechte Maß für das Beschauen der Gemälde gestatten. Doch kommen Ausnahmen vor. Das schöne Gemälde Romjaldsfjord von Österley stellt eine schön gemalte steile Gebirgswand dar; das Tal im Vordergrunde ist nur schmal. Es gewinnt dieser Vordergrund an Tiefe, wenn man zurücktritt; leider wird man daran gehindert durch eine Wand im Rücken. Ein Künstler

wird sich nie beklagen, wenn man weit hinter die richtige Distanz zurücktreten kann, denn die Landschaft wird oft gefälliger, nur ist sie nicht mehr ganz naturgetreu. Bei Ansichtskarten fällt einem oft die unnatürliche Tiefe des Vordergrundes auf. Das liegt daran, daß diese Bilder mit kurzer Brennweite aufgenommen worden sind. In der Distanz von etwa 10 Zentimeter werden sie naturgetreu und sie bleiben naturgetreu, wenn man sie mit einer schwachen Lupe betrachtet, die man dicht vor das Auge hält. Die Lupe bewirkt dann keine Änderung des Gesichtswinkels, also auch in diesem Sinne keine Vergrößerung, sie schafft nur Deutlichkeit bei geringer und richtiger Distanz.

Die Luftperspektive des Vordergrundes kann nur in der richtigen Distanz richtig beurteilt werden. Als Beispiel erwähne ich die Römische Landschaft von Preller (Nr. 726 des Leipz. Museums). Der reiche hügelige unruhige Vordergrund verliert seine Plastik, wenn man zu nahe steht. Er wird schöner und tiefer, je weiter man zurücktritt. Rückt man zu weit zurück, so fehlt es schon merklich an Luftperspektive, wenn auch die Formen gewinnen.

Hierher gehört auch folgendes Erlebnis: Ich stellte einmal einen Freund vor ein Pastellbild, das einen reichen Vordergrund hatte. Sogleich äußerte er, der tiefere Teil des Vordergrundes habe zu wenig Luft. Ich erwiderte nichts, veranlaßte meinen Freund zwei Schritte näher zu treten in die richtige Distanz und sofort rief er: „Jetzt ist es richtig!“ Der Kritiker muß immer vorsichtig sein. Hierzu kommt noch folgendes: Es gibt Fälle, wo der Künstler mit Recht von den mathematischen Gesetzen der Perspektive abweicht, weil er dem veränderlichen Standpunkt des Beschauers Rechnung trägt. Eine gewisse Freiheit der Bewegung muß der Maler voraussetzen, und hiermit ist die strenge Befolgung der Gesetze zuweilen im Widerspruch. Widerwärtige Verzerrungen *müssen* vermieden werden. So darf z. B. eine brachiale Reihe von Kugeln nicht in richtiger Projektion gemalt werden, weil bei seitlicher Verschiebung des Standpunktes die widerwärtigsten Verzerrungen den Anblick stören. Genaueres hierüber mit Berechnung des Betrages findet man in dem oben angeführten Artikel, Seite 448 ff.

Weitgehende Beachtung verdient das folgende wohlbekannte Gesetz für jeden Vordergrund:

Teilt man die Strecke vom unteren Bildrande bis zum Hori-

zont in zwei gleiche Teile, so ist die Strecke vom unteren Bildrande bis zu jener Halbierungsstelle immer gleich der Augendistanz D, wenn diese in *dem* Maßstabe gedacht wird, der am unteren Bildrande in der Standebene besteht. Der Satz, der in dieser Form wohlbekannt, wenn auch zu wenig beachtet wird, kann noch stark verallgemeinert werden, indem man die Tiefe eines beliebigen Punktes in seiner Abhängigkeit von der Distanz untersucht. In dieser Allgemeinheit kann man sagen: *Die Tiefe, in der irgend ein Punkt der Fußebene erscheint, ist proportional der Entfernung des Auges vom Bilde.*" Ich kann mich nicht erinnern, diesen so wichtigen Satz irgendwo gelesen zu haben. Doch ist der Satz unschwer zu beweisen. Erstlich kann durch das Zurücktreten des Beschauers der am Bildrande verzeichnete Maßstab

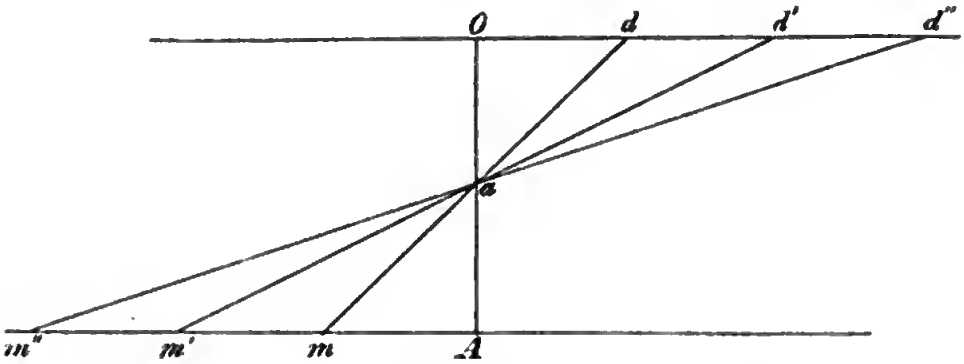


Fig. 7.

nicht verändert werden. Man kann sich am einfachsten einen Meterstab auf der Erde liegend denken, so zwar, daß sein Bild genau am unteren Bildrande erscheint. Rückt man nun zurück, so bleibt das Bild dasselbe, nur weicht der vorgestellte Meterstab weiter vom Beschauer nach der Tiefe hin fort. Trägt man nun in bekannter Weise den niedergeklappten Distanzpunkt auf dem Horizont auf, so ist es sofort ersichtlich, daß die Projektion eines beliebigen Punktes a (Fig. 7) von den Distanzpunkten d d' d'' aus Maßgrößen ergeben Am, Am', Am'', die proportional den Distanzen Od, Od', Od'' sind; m. a. W. bei der Distanz Od erscheint Aa so groß wie Am, in der dreifachen Distanz Od'' dagegen so groß wie Am''.

Mit der Veränderung der Tiefenauffassung hängen viele bemerkenswerte Erscheinungen zusammen: Gesetzt, es verlaufe eine Allee vom unteren Bildraude links in schräger Richtung nach

der Tiefe rechts hin. Man faßt hierbei eine gewisse Richtung der Allee auf. Tritt man zurück, so bleibt der Alleepunkt am unteren Rande fest, aber ein in der Tiefe liegender Endpunkt liegt jetzt in der Vorstellung weiter fort, als vorhin, folglich wird auch eine *andere Richtung der Allee vorgestellt werden.* Der Betrag der Richtungsänderung läßt sich genau angeben nach dem bekannten Winkelmeßverfahren vom Winkelmeßpunkte aus nach den Fluchtpunkten im Horizont. Noch ein Beispiel: Ein im Vordergrunde links befindlicher Pfosten werfe seinen Schatten vom Vordergrunde nach der Tiefe rechts hin in schräger Richtung. Ändert man seinen Standpunkt, so ändert sich scheinbar auch die *Richtung* des Schattens. Mithin ändert man auch die Auffassung hinsichtlich des *Sonnenstandes.* Eine schräg verlaufende Mauer oder Brücke stellt sich in der Auffassung mehr parallel dem Horizonte, je näher man an das Bild herantritt. Endlich: Verläuft ein Fluß im Zickzack im Vordergrunde des Bildes, so streckt sich der Lauf scheinbar, wenn man sich entfernt, er knickt zusammen und bildet spitzere Winkel, wenn man sich dem Bilde nähert. Es sieht so aus, als hätte der Fluß oder Weg Scharniere an den Wendepunkten. (Es wurden Bilder in verschiedenem Maßstabe vorgelegt zur Erweisung der zuletzt besprochenen Versuche, und zwar der Lauf der Passer bei der Zenoburg bei Meran und eine geknickte Allee am Ufer des Vierwaldstättersees bei Luzern).

Druckfertig erklärt 24. XII. 1905.]

INHALT.

Seite

E. von Meyer, Über Konstitution und Bildungsweise der Kyanalkine genannten trimolekularen Nitrile 324

G. Scheffers, Ebene Kurvennetze ohne Umwege 353

A. von Öttingen, Die Mängel der psychischen Fähigkeit perspektivische Bilder richtig aufzufassen 360

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

9. Sor 1726.9

MAY 1 0 1905

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SIEBENUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1905.

VI.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1905.

Einzelpreis 60 Pfg.

Digitized by Google

SITZUNG VOM 4. DEZEMBER 1905.

Geschäftliche Mitteilungen und Tauschverkehr.

Schreiben der kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin, worin die Geneigtheit derselben, dem Kartell beizntreten, mitgeteilt wird.

Wahl der Sekretäre für die Jahre 1906 und 1907. Zum Sekretär wird, nachdem Herr Zirkel erklärt hatte, eine eventuelle Wiederwahl aus Gesundheitsrücksichten nicht annehmen zu können, Herr Karl Chun vom 1. Januar 1906 ab gewählt, welcher die Wahl annahm. Die Wahl zum stellvertretenden Sekretär, anstatt des ebenfalls eine abermalige Wahl ablehnenden Herrn Credner, fiel auf Herrn R. Boehm, welcher, in der Sitzung nicht anwesend, über seine Annahme zu befragen ist.

Feststellung des Sitzungskalenders für 1906.

Vorträge:

Herr Scheibner legt eine Abhandlung für die Berichte vor: „Zur Auflösung der Ikosaedergleichnng".

Herr Bruns kündigt die Vorlage von zwei Arbeiten an: 1. von Herrn Prof. Bruno Peter: „Vermessnng von 28 Sternen in den Hyaden"; zum Abdruck in den Abhandlungen. 2. von Herrn A. Krause: „Studien über das Verhalten von Taschenuhren"; zum Abdruck in den Berichten.

Zur Auflösung der Ikosaedergleichung.

Von

W. Scheibner.

Bekanntlich ist es Herrn F. Klein (in Verbindung mit Herrn Gordan) gelungen, die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades auf die Eigenschaften der sogen. Ikosaedergleichung zu gründen, welche ihrerseits von einem einzigen Parameter abhängt, auf den 60sten Grad steigt und eine verhältnismäßig einfache Auflösung mittels elliptischer Thetafunktionen gestattet. Diese Gleichung kann für $x^5 = z$ in der Gestalt geschrieben werden:

$$z_4^3 + 12^3 \varpi(q) z \cdot z_2^5 = 0,$$

wo

$$z_2 = z^2 + 11z - 1,$$

$$z_4 = z^4 - 228z^3 + 494z^2 + 228z + 1,$$

und $\varpi(q)$ oder q einen noch zu bestimmenden Parameter bedeutet. Führt man ferner die Funktion ein:

$$z_6 = z^6 + 522z^5 - 10005z^4 - 10005z^2 - 522z + 1$$

$$= (z^2 + 1)(z^4 + 522z^3 - 10006z^2 - 522z + 1),$$

so besteht die identische Relation

$$12^3 z z_2^5 = z_6^2 - z_4^3,$$

mithin auch

$$z_4^3 + \varpi(q)(z_6^2 - z_4^3) = 0 \quad \text{oder} \quad \varpi(q) = \frac{z_4^3}{z_4^3 - z_6^2}.$$

Für $z = x^5$ bezeichnen z_4 und z_6 die beiden Kovarianten

$$144g \quad \text{und} \quad -864h \quad \text{der Funktion} \quad f = xz_2,$$

wenn letztere vom Grade $m = 12$ angenommen, also der Koeffizient von x^{12} $a_0 = 0$ vorausgesetzt wird.

Die entwickelten Formeln gestatten eine Vereinfachung, wenn man an Stelle von z die Variable y einführt und

$$125y = z - \frac{1}{z} + 11$$

setzt. Damit folgt

$$z_2 = 125zy, \quad z_4 = 3125z^2(5y^2 - 10y + 1),$$

$$z_6 = 15625z^3(y^2 + 4y - 1)\sqrt{125(125y^2 - 22y + 1)},$$

und die Ikosaedergleichung erhält die Form einer bikubischen Resolvente:

$$(5y^2 - 10y + 1)^3 + 12^3\varpi \cdot y^5 = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$5y + \frac{1}{y} = 10 - 12\sqrt[3]{\varpi \cdot y^2}.$$

Setzt man ferner

$$G = 15(5y^2 - 10y + 1),$$

$$H = 5(y^2 + 4y - 1)\sqrt{5(125y^2 - 22y + 1)},$$

$$J = 16(H^2 - \tfrac{1}{27}G^3) = 15^3(4y)^5,$$

nebst

$$G^3 = -180^3\varpi \cdot y^5, \quad H^2 = 60^3(1 - \varpi)y^5,$$

so wird nicht allein J die Diskriminante der kubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H,$$

sondern auch

$$\varpi = \frac{G^3}{G^3 - 27H^2}, \quad \frac{27\varpi}{\varpi - 1} = \frac{G^3}{H^2} = \Omega.$$

Mithin wird $\varpi < 0$ für $0 < \Omega < 27$, $\varpi > 1$ für $\Omega > 27$, $0 < \varpi < 1$ für $\Omega < 0$, während die Werte $\varpi = 0$ und $\Omega = 0$, $\varpi = 1$ und $\Omega = \infty$, $\varpi = \infty$ und $\Omega = 27$ einander entsprechen.

Daß die Wurzel der Ikosaedergleichung sich durch *hypergeometrische* Entwickelungen ausdrücken läßt, hat im Anschluß an die bekannten Untersuchungen von Herrn Schwarz über algebraische Fälle der hypergeometrischen Reihe Herr Klein in Band XII der *Mathem. Annalen* S. 514/15 gezeigt. In der inhaltsreichen *Algebra* des Herrn Weber, Bd. II, S. 432, findet sich für die Wurzel x der Gleichung

$$z_4^3 + 12^3\varpi \cdot zz_2^5 = 0$$

der Ausdruck

$$x = \varpi^{\frac{1}{3}} \frac{F\left(\frac{11}{60}, \frac{13}{60}, \frac{4}{6}, \varpi\right)}{F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{1}{6}, \varpi\right)},$$

welcher auf bekannte Weise umgeformt werden kann, wenn der absolute Wert von ϖ kein ächter Bruch ist.

Läßt man dagegen

$$\varpi(q) = \frac{g_2^3}{\Delta} = -\frac{16\,G^6}{27\,J}$$

die absolute Invariante der elliptischen Modulfunktionen bedeuten, und bestimmt $q = e^{-h}$ als das zugehörige Modularargument, so erhält die Wurzel x den einfachen Ausdruck[1]):

$$x = q^{\frac{2}{5}} \frac{\Sigma(-1)^n q^{5n^2-3n}}{\Sigma(-1)^n q^{5n^2-n}} = q^{-\frac{3}{5}} \frac{\vartheta_1(hi, q^5)}{\vartheta_1(2hi, q^5)}$$

$$= q^{\frac{2}{5}} \left\{1 - q^2 + q^4 - q^8 + q^{10} - q^{12} + q^{14} - q^{18} + 2q^{20} \cdots\right\},$$

oder wenn nach WEBER (*Algebra* Bd. II, S. 431) $\nu = 5n + 1$ und $= 5n + 2$ gesetzt wird,

$$x \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{5}{12}(6n+1)^2} = \sum_{\nu} (-1)^\nu q^{\frac{1}{60}(6\nu+1)^2},$$

d. h. mit umgeändertem Vorzeichen:

$$x = q^{\frac{2}{5}} \frac{1 - q^2 + q^4 - q^8 - q^{22} \cdots}{1 - q^{10} - q^{20} + q^{50} \cdots} = q^{\frac{2}{5}} \frac{1 - q^2 - q^8 + q^{14} + q^{26} \cdots}{1 - q^4 - q^6 + q^{18} + q^{22} \cdots}.$$

Der Wert des Parameters ϖ läßt sich nach KLEIN's Theorie als Funktion der Koeffizienten der gegebenen Gleichung 5ten Grades, beziehungsweise der Quadratwurzel ihrer Diskriminante, algebraisch berechnen, dergestalt daß die Wurzeln der gegebenen Gleichung und der Ikosaedergleichung aufeinander reduzierbar sind. In der Tat zeigt sich, daß für

$$y = \frac{1}{2w + 5}$$

1) Durch Druckfehler steht in KLEIN's *Ikosaeder*, S. 132 und *Crelle's Journal*, Bd. 129, S. 154, sowie *Mathem. Annalen*, Bd. 61, S. 53 der Wert $q^{\frac{1}{5}} \frac{\vartheta_1(2hi, q^5)}{\vartheta_1(hi, q^5)}$; vergl. KLEIN-FRICKE *Modulfunktionen* Bd. 2, S. 383. Vgl. auch BIANCHI im 17. Bande der *math. Annalen*, p. 252, KLEIN, ebenda, p. 569, sowie *Proceedings of the London Mathematical Society* 1880, p. 152.

die Ikosaedergleichung in der kanonischen Gestalt

$$(w^2 - 5)^3 + 27\varpi(2w + 5) = 0,$$

oder kürzer

$$w^2 = 5 - 3\sqrt[3]{\varpi(2w + 5)},$$

einfach als die Jacobi'sche Resolvente[1]) der sogenannten Brioschi'schen Normalform[2])

$$x^5 \pm 5x^3 + \tfrac{45}{4}x = \sqrt{\pm 6(\varpi - 1)}$$

definiert werden kann.

Die Auflösung der bikubischen Resolvente für y kann vermöge der Gleichung

$$4y = \sqrt[5]{\frac{J}{3375}}$$

durch Ausziehung der fünften Wurzel aus J geleistet werden, sobald die Koeffizienten G und H der kubischen Resolvente ermittelt sind. Zur Berechnung von q aber reicht die Kenntnis des Parameters $\varpi = \frac{G^3}{G^3 - 27H^2}$ vollständig aus. Dabei bleiben zwar die Werte

$$G = k^2 g_2, \quad H = k^3 g_3, \quad J = -\tfrac{16}{27} k^6 \Delta$$

um Potenzen eines Faktors k unbestimmt, allein der Wert von q wird dadurch, wie man leicht einsieht, nicht beeinflußt.

Wie S. 371 (Sitzung vom 7. Dezember 1903) erörtert, beruht die Berechnung von $q = e^{-\pi \frac{M}{M'}}$ auf der Einführung der Gauss'schen arithmetisch-geometrischen Mittel M und M' zwischen den Größen

$$m \text{ und } n \quad \text{resp.} \quad m \text{ und } n' = \sqrt{m^2 - n^2},$$

welche in der elliptischen Thetafunktion $\Theta(u, q)$ das Argument der Amplitude φ

$$u = M \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}}$$

1) Vgl. S. 312 (1904).
2) Vgl. S. 102 (1905).

definieren, während $\varkappa = \frac{n'}{m}$ den Modul des Integrals bezeichnet. Schreibt man

$$l = \lg \frac{m}{n}, \quad l_1 = \lg\left(1 + \frac{n}{m}\right) + \tfrac{1}{2} l - \lg 2 = \lg \frac{m_1}{n_1},$$

$$l_2 = \lg\left(1 + \frac{n_1}{m_1}\right) + \tfrac{1}{2} l_1 - \lg 2 = \lg \frac{m_2}{n_2}, \text{ usw.},$$

so erhält man einfach

$$\lg q = 2 \lg \frac{n'}{4m} + l - \tfrac{3}{2}(l_1 + \tfrac{1}{2} l_2 + \tfrac{1}{4} l_3 + \tfrac{1}{8} l_4 \cdot\cdot),$$

$$\lg \vartheta^4 = -(l + l_1 + l_2 + l_3 \cdot\cdot),$$

$$\lg \vartheta_2^4 = 2 \lg \frac{n'}{m} + l - l_1 - l_2 - l_3 \cdot\cdot,$$

$$\lg \vartheta_3^4 = l - l_1 - l_2 - l_3 \cdot\cdot,$$

$$\lg \vartheta_1'^4 = 2 \lg \frac{n'}{m} + l - 3(l_1 + l_2 + l_3 \cdot\cdot).$$

Die Berechnung von m und n aber richtet sich nach dem Vorzeichen der Diskriminante J. Im Falle $G^3 > 27 H^2$ findet man auf bekanntem Wege für

$$\chi_1 = \prod_{p=1}^{\infty}(1 - q^{2p}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n+1)},$$

$$8 \lg \chi_1 = -(l_1 + \tfrac{3}{2} l_2 + \tfrac{7}{4} l_3 + \tfrac{15}{8} l_4 \cdot\cdot):$$

$$\Delta = 16 \vartheta_1'^8 = (64q)^2 \chi_1^{24} = (64q)^2 (1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} \cdot\cdot)^{24},$$

$$g_2 = \tfrac{4}{3}(\vartheta_3^8 - \vartheta^4 \vartheta_2^4)$$

$$= \tfrac{4}{3}\{1 + 240q(1 + 9q^2 + 28q^4 + 73q^6 + 126q^8 \cdot\cdot)\},$$

$$g_3 = \tfrac{4}{27}(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)(2\vartheta_3^8 + \vartheta^4 \vartheta_2^4)$$

$$= \tfrac{8}{27}\{1 - 504q^2(1 + 33q^2 + 244q^4 + 1057q^6 \cdot\cdot)\},$$

folglich

$$12^3 \varpi = \frac{1}{q^2} \frac{\{1 + 240q^2(1 + 9q^2 + 28q^4 + 73q^6 + 126q^8 \cdot\cdot)\}^3}{(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - q^{24} \cdot\cdot)^{24}}.$$

Aus den drei Wurzeln

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{3} k(\vartheta_3^4 + \vartheta^4), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{3} k(\vartheta_2^4 - \vartheta^4), \quad \lambda_3 = -\tfrac{1}{3} k(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)$$

der kubischen Resolvente $4\lambda^3 = G\lambda + H$ hat man alsdann die Werte zu bilden:

$$m = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad n = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad n' = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

Ist dagegen $G^3 < 27H^2$, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\Delta = -\tfrac{1}{16}\vartheta^4\vartheta_2^4\vartheta_3^{16} = \tfrac{1}{256}\vartheta_1'^8(iq^{\frac{1}{2}})$$
$$= -q(1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}\cdot\cdot)^{24},^1)$$
$$g_2 = \tfrac{1}{12}(\vartheta_3^8 - 16\vartheta^4\vartheta_2^4)$$
$$= \tfrac{1}{12}\{1-240q(1-9q+28q^2-73q^3+126q^4\cdot\cdot)\},$$
$$g_3 = \tfrac{1}{216}(\vartheta^4-\vartheta_2^4)(\vartheta_3^8+3^2\vartheta^4\vartheta_2^4)$$
$$= \tfrac{1}{216}\{1+504q(1-33q+244q^2-1057q^3\cdot\cdot)\},$$
$$12^3\varpi = -\frac{1}{q}\,\frac{\{1-240q(1-9q+28q^2-73q^3+126q^4\cdot\cdot)\}^3}{(1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}\cdot\cdot)^{24}},$$

und wenn $\lambda = \frac{1}{6}k(\vartheta^4-\vartheta_2^4)$ die reelle Wurzel der Resolvente, nebst $\mu^2 = 12\lambda^2 - G$:

$$m = \sqrt{2\mu}, \quad n = \sqrt{\mu+3\lambda}, \quad n' = \sqrt{\mu-3\lambda}.$$

Da für $G^3 > 27H^2$, $\varpi > 1$, so ist der gefundene Wert $12^3\varpi\cdot q^2 = 1+744q^2\ldots$ neben $q^2<1$ damit in Übereinstimmung. Für $G^3 < 27H^2$ dagegen liegt ϖ zwischen 0 und 1, so lange $G<0$, und wird *negativ* für $G>0$, während für $q=0$, $G=\frac{k^2}{12}=\infty$, neben $G^3=27H^2$ und $\varpi=\pm\infty$. Mithin wechseln beim Durchgang von g_2 durch $\frac{1}{12}$, oder von G durch $\frac{k^2}{12}=\infty$, ϖ und G^3-27H^2 das Vorzeichen, sodaß man für $g_2>\frac{1}{12}$ auf den Fall $G^3>27H^2$, $\varpi>1$ zurückkommt. Von einem Übergange zu $q<0$ kann nicht die Rede sein, und die Gleichung $12^3\varpi\cdot q = -1+744q\ldots$ enthält für $\varpi<0$ und kleine Werte von q keinen Widerspruch.

Aus dem berechneten Werte von q geht für $G^3>27H^2$, bei Vernachlässigung von q^{20}, die Ikosaederwurzel hervor:

$$x = q^{\frac{2}{5}}(1+q^{10})(1-q^2+q^4-q^8),$$

oder

$$z = x^5 = q^2(1-5q^2+15q^4-30q^6+40q^8-26q^{10}-30q^{12}\cdot\cdot),$$

1) Die Exponenten bilden die Reihe der sogen. Pentagonalzahlen $\frac{1}{2}n(3n\pm1)$.

nebst

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{q^2}(1+5q^2+10q^4+5q^6-15q^8-24q^{10}+15q^{12}+70q^{14}+30q^{16}\cdots),$$

sowie

$$125y = z - \frac{1}{z} + 11 = -\frac{1}{q^2}(1-q^2-q^4+2q^{10}-q^{12}+0\cdot q^{14}+0\cdot q^{16}\cdots)^6$$

$$= -\frac{1}{q^2}(1-6q^2+9q^4+10q^6-30q^8+6q^{10}-25q^{12}+96q^{14}+60q^{16}\cdots).$$

Da aber

$$J = -\tfrac{16}{27}k^6\Delta = 15^3(4y)^5,$$

so folgt zur Ermittelung des Faktors k die Gleichung

$$k^6 = -180^3\frac{y^5}{\Delta},$$

und nach Substitution der obigen Werte von y und Δ:

$$k = \pm\frac{3}{50q^2}(1-q^2-q^4+6q^{10}-5q^{12}-4q^{14}+0\cdot q^{16}\cdots),$$

Ist aber $G^3 < 27H^2$, so ergeben sich die entsprechenden Formeln:

$$x = -q^{\frac{1}{5}}(1-q^5)(1+q+q^2-q^4)\cdots,$$

$$z = -q(1+5q+15q^2+30q^3+40q^4+26q^5-30q^6\cdots),$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{q}(1-5q+10q^2-5q^3-15q^4+24q^5+15q^6-70q^7+30q^8\cdots),$$

$$125y = \frac{1}{q}(1+q-q^2-2q^5-q^6+0\cdot q^7+0\cdot q^8\cdots)^6,$$

endlich

$$k = \mp\frac{6}{25q}(1+q-q^2-6q^5-5q^6+4q^7+0\cdot q^8\cdots).$$

Im Art. 14 S. 171 der Sitzung vom 29. Februar 1904 finden sich die Bedingungen untersucht, unter denen eine bikubische Gleichung in der kanonischen Form

$$z^6+15A_2z^4+15A_4z^2+A_6 = \pm A_5z$$

sich auf die Jacobi'sche Resolvente einer Gleichung fünften Grades zurückführen läßt. Diesen Bedingungen wird die bikubische

Resolvente der Ikosaedergleichung zu genügen haben. Setzt man in dem Ausdruck

$$5y + \frac{1}{y} = 10 - 12\sqrt[3]{\varpi \cdot y^3}, \quad y = \frac{1}{2w+5},$$

so folgt

$$w^2 = 5 - 3\sqrt[3]{\varpi(2w+5)},$$

oder

$$w^6 - 15w^4 + 75w^3 - 125 + 27\varpi(2w+5) = 0$$

neben der Jacobi'schen Resolvente für $z = \frac{1}{20} A\,\mathrm{S} \pm x_0 x_1$:

$$z^6 - 5Gz^4 + 5(G^2 - 2A'z^2) - 5(25H^2 - \mathfrak{A}') = \pm Az\sqrt{D_5}.$$

Hier bezeichnet D_5 die Diskriminante von $f = Ax^5 \cdots$ mit den Kovarianten

$$g_1 = \mathfrak{A}'x + \mathfrak{B}', \quad g_2 = Gx^2 \cdots, \quad g_3 = Hx^3 \cdots, \quad g_4 = A'x^4 \cdots$$

Legt man auch hier die kanonische Form

$$f = x^5 + 10Cx^3 + 5Ex + F$$

zu Grunde und schreibt (S. 172)

$$\alpha = F^2, \quad \beta = E, \quad \gamma = C,$$

so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der beiden für $w = z$ zu identifizierenden Gleichungen:

$$G = \beta + 3\gamma^2 = 3, \quad G^2 - 2A' = 3\beta^2 - 2\beta\gamma^2 + 15\gamma^4 = 15,$$

$$25H^2 - \mathfrak{A}' = 25 - 27\varpi,$$

oder

$$27\varpi - 25 = \alpha\gamma + \beta^3 - 11\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^4 - 25\gamma^6,$$

während

$$54\varpi = \pm\sqrt{D_5},$$

oder

$$54^2\varpi^2 = \alpha^2 + 32\alpha\gamma(5\beta^2 - 45\beta\gamma^2 + 108\gamma^4) + 256\beta^3(\beta^2 - 10\beta\gamma^2 + 25\gamma^4).$$

Aus diesen vier Gleichungen findet man die Werte von $\alpha\,\beta\,\gamma\,\varpi$ lediglich durch Ausziehung von Quadratwurzeln, und zwar erhält man leicht

$$\alpha = \pm 54(\varpi - 1), \quad \beta = \tfrac{9}{4}, \quad \gamma = \pm\tfrac{1}{2},$$

während ϖ *beliebig* bleibt. Die doppelten Vorzeichen richten sich

nach dem Vorzeichen der Diskriminante Δ oder $G^3 - 27H^2$. Der entsprechende Ausdruck von f wird mithin

$$f = x^5 \pm 5x^3 + \tfrac{45}{4}x + \sqrt{\alpha} = 0$$

und stimmt mit der S. 102 angegebenen Brioschi'schen Form für $b = \pm \frac{1}{2}$ überein. Auf diesem Wege läßt sich also die bikubische Ikosaederresolvente auf die sogen. Brioschi'sche Resolvente 5ten Grades, gleichfalls mit *einem* wesentlichen Parameter, reduzieren, und die Wurzeln beider Gleichungen werden rational voneinander abhängig.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, an einem einfachen numerischen Beispiel die bequeme Anwendbarkeit der entwickelten Formeln zu prüfen. Wir wählen hierzu die Parameterwerte

$$\varpi_1 = -\tfrac{1}{99} \quad \text{und} \quad \varpi_2 = \tfrac{1}{101},$$

welche beide dem Falle $G^3 < 27H^2$ entsprechen und zunächst auf sehr rasch konvergierende hypergeometrische Reihen führen. Man erhält aus Weber's Formel:

$$x = \varpi^{\frac{1}{3}} \frac{1 + \frac{209}{4800}\varpi \cdot \cdot}{1 - \frac{11}{1200}\varpi \cdot \cdot} = \varpi^{\frac{1}{3}}(1 + \tfrac{253}{4800}\varpi \cdot \cdot),$$

also für $\varpi_1 = -\frac{1}{99}$: $\quad \lg x_1 = 9.334557\,n,$

und für $\varpi_2 = \frac{1}{101}$: $\quad \lg x_2 = 9.332119,$

nebst

$$\lg y_1 = 1.232548, \quad \lg y_2 = 1.240303\,n.$$

Um die Wurzel der Ikosaedergleichung mittels elliptischer Modulfunktionen zu berechnen, hat man von einer kubischen Resolvente auszugehen, welche den gegebenen Werten von ϖ entspricht. Eine solche ist

$$4\lambda'^3 = \pm 3\lambda' + 10, \quad \lambda'_1 = 1.54043, \quad \lambda'_2 = 1.17429,$$

wobei ich bemerke, daß für $4\lambda^3 = G\lambda + H$:

$$\lambda = \tfrac{1}{6}k(\vartheta^4 - \vartheta_2^4) = k'\lambda', \quad G = \pm 3k'^2, \quad H = 10k'^3$$

zu setzen ist. Die zugehörigen Werte des Modularguments ergeben

$$\lg q_1 = 7.430528, \quad \lg q_2 = 7.825712.$$

Damit folgt weiter

$$\lg x_1 = 9.487277\,n, \quad \lg x_2 = 9.568059\,n,$$
$$\lg y_1 = 0.479555, \quad \lg y_2 = 0.094648,$$
$$\lg w_1 = 0.368150\,n, \quad \lg w_2 = 0.321780\,n.$$

Die beiden gefundenen Werte erfüllen die Ikosaedergleichung in der Form

$$5y + \frac{1}{y} = 10 - 12\sqrt[3]{\varpi \cdot y^2},$$

oder

$$w^2 = 5 - 3\sqrt[3]{\varpi\,(2w + 5)},$$

was bei den oben aus der hypergeometrischen Entwickelung abgeleiteten Ausdrücken *nicht* der Fall ist. Es scheint hiernach, als ob die Weber'sche Formel eine Ungenauigkeit enthalte, die noch der Aufklärung bedarf. Um kein Mißverständnis entstehen zu lassen, mag hier noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß, wenn man die für $G^3 > 27H^2$ geltenden Formeln auf den Fall einer negativen Diskriminante Δ anwenden will, man *imaginäre* Werte von q zu Hilfe nehmen muß.

Die vorstehende Notiz über die Auflösung der Ikosaedergleichung mag als eine Ergänzung der historischen Bemerkungen auf S. 314 (Sitzung vom 5. Dezember 1904) angesehen werden; ein paar weitere Zusätze sollen zur Erläuterung der auf S. 213, 225 und 226 (Sitzung vom 6. Juli 1903) angestellten Betrachtungen dienen.

S. 213 Zeile 10 würde zweckmäßig hinzuzufügen sein:

„Es mag gleich hier bemerkt werden, daß die Gleichung

$$\varrho^m f(x\alpha) = f(\xi\alpha) = \varphi\xi$$

nicht notwendig voraussetzt, daß die Funktion f ein in x^m multipliziertes Glied enthalte. Vielmehr kann im speziellen Falle der Koeffizient $a_0 = 0$ sein, ohne daß die Koeffizienten α oder b, d. h. die Kovariante gx, ihre Bedeutung verlieren. Ebenso kann eintretendenfalls b_0 verschwinden, sodaß x^n in g nicht vorkommt; es sind dann gleichwohl f und g als Kovarianten von den Graden m und n zu betrachten, wobei $\varphi\xi$ resp. $\chi\xi$ den Faktor ϱ erhalten. Auch ist leicht einzusehen, daß der Ko-

variantenbegriff nicht auf den Fall beschränkt zu werden braucht, in welchem die Koeffizienten b *rational* durch die Koeffizienten a bestimmt werden: als Beispiel für eine *irrationale* Kovariante kann die oben entwickelte Gleichung

$$\varrho\varrho'(x - x') = \varepsilon(\xi - \xi') \quad \text{oder} \quad \varrho'\varrho''(x' - x'') = \varepsilon(\xi' - \xi'')$$

dienen, wo zwar ξ' linear von x', diese Wurzel aber algebraisch irrational von den Koeffizienten der Funktion fx abhängt."

S. 225 wird ferner angeführt, daß die Kovariante der $k$ten Überschiebung $[fg]_k = h$ die Gleichung erfüllt:

$$[\varphi\chi]_k = \varepsilon^k \varrho^{m+n-2k}[fg]_k,$$

also ist

$$h = (a_0 b_k - \tilde{k}_1 a_1 b_{k-1} \pm \cdots + (-1)^k a_k b_0) x^{m+n-2k} + \cdots$$

eine zuerst wohl von Cayley betrachtete Kovariante von f und g vom Grade $m + n - 2k$, mit dem Gewichte $q = k$ und mit bilinearen Koeffizienten. Zum Beweise der Kovarianteneigenschaft für die $k$te Überschiebung reicht es aus, mittels Differentiation daraus die Kovariante der $k + 1$sten Überschiebung herzuleiten. Man erhält leicht

$$[fg]_{k+1} = [f,g]_k - [fg_1]_k,$$

nebst

$$[fg]'_k = (m - k)[f,g]_k + (n - k)[fg_1]_k,$$

oder

$$(m + n - 2k)[f,g]_k = [fg]'_k + (n - k)[fg]_{k+1},$$

$$(m + n - 2k)[fg_1]_k = [fg]'_k - (m - k)[fg]_{k+1},$$

ferner

$$[\varphi_1\chi]_k = \varepsilon^{k+1}\varrho^{m+n-2k-2}\left\{[f,g]_k + \frac{\varrho'}{\varrho}[fg]_k\right\},$$

$$[\varphi\chi_1]_k = \varepsilon^{k+1}\varrho^{m+n-2k-2}\left\{[fg_1]_k + \frac{\varrho'}{\varrho}[fg]_k\right\},$$

folglich durch Subtraktion:

$$[\varphi\chi]_{k+1} = \varepsilon^{k+1}\varrho^{m+n-2k-2}[fg]_{k+1}.$$

Für den *ersten Teil des Art.* 11 S. 226 endlich dürfte sich die nachstehende erweiterte Fassung empfehlen, welche auch die Einführung des Polarenbegriffs berücksichtigt.

„Selbstverständlich gestatten die bisher angestellten Betrachtungen über Kovarianten oder Invarianten ganzer Funktionen Verallgemeinerungen nach mehrfacher Richtung, namentlich bei Vermehrung der Anzahl der Variabeln. Um gewissen Sätzen und Ableitungen eine größere Übersichtlichkeit und Eleganz zu verleihen, hat man *homogene* Ausdrücke mittels Einführung einer neuen Variablen y zu Grunde gelegt, also statt der Funktion fx die *binäre Form* $f(xy)$ als Ausgangspunkt gewählt. So erhält man z. B. für

$$f = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} y + \widehat{m}_2 a_2 x^{m-2} y^2 \cdots + a_m y^m$$

$$= \frac{1}{m}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad g = \frac{1}{n}\left(x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

$$h = [fg] = \frac{y}{mn}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{y}{mn}\frac{\partial (fg)}{\partial (xy)},$$

sodaß die Kovariante h, nach Weglassung des Faktors $y = \delta_2\xi + \delta_3 = \varrho$, mit der Funktionaldeterminante der Funktionen f und g nach x und y übereinkommt. Der Vorteil besteht hauptsächlich darin, daß die lineare Substitution $x = \frac{\delta\xi + \delta_1}{\delta_2\xi + \delta_3}$ durch die beiden einfacheren $x = \delta\xi + \delta_1$, $y = \delta_2\xi + \delta_3$ ersetzt wird, und tritt bei mehr Variabeln noch mehr hervor.

Wir beschränken uns jedoch in dieser Beziehung auf die Betrachtung der einfachsten, auf die lineare Transformation beliebig vieler Variabeln bezüglichen Fälle. Die elementare Auflösung eines Systems *linearer* Gleichungen von der Form

$$\sum_i a_i^k x_i = y_k \quad \text{gibt} \quad Rx_i = \sum_k A_i^k y_k,$$

wo

$$R = |a_i^k| = \sum a_i^k A_i^k$$

die Determinante des Systems bezeichnet. Führt man nun die lineare Transformation in der Gestalt aus:

$$x_i = \sum_k \delta_i^k \xi_k, \quad \text{wodurch} \quad y_k = \sum_i \alpha_i^k \xi_i$$

hervorgehen mag, so folgt

$$\alpha_h^k = \sum_i \delta_i^h a_i^k \quad \text{und für} \quad \mathsf{P} = |\alpha_i^k| = \sum \alpha_i^k \mathsf{A}_i^k:$$

$$\mathsf{P}\xi_i = \sum_k \mathsf{A}_i^k y_k.$$

Hier ist aber nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie

$$P = \varepsilon R, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon = |\delta_i^k|$$

die Determinante der linearen Substitution bedeutet, d. h. R ist eine Invariante der linearen Funktionen $y = fx_i$ vom Gewicht 1.

Betrachtet man jetzt die (homogene) *quadratische* Form

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = fx = \sum_{ik} a_i^k x_i x_k, \quad a_i^k = a_k^i,$$

so wird

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_i a_i^k x_i.$$

Durch die lineare Transformation $x_i = \sum_k \delta_i^k \xi_k$ ergibt sich

$$f = \sum_{ik} \alpha_i^k \xi_i \xi_k, \quad \alpha_i^k = \alpha_k^i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_i \beta_i^k \xi_i, \quad \text{wo} \quad \beta_h^k = \sum_i \delta_i^h a_i^k.$$

Zugleich erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k} = 2 \sum_i \alpha_i^k \xi_i = 2 \sum_i b_i^k x_i, \quad \text{nebst} \quad \alpha_h^k = \sum_i \delta_i^h b_i^k.$$

Da aber

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \sum_i \delta_i^k \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so hat man auch

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_k} = 2 \sum_{hi} \delta_h^k a_h^i x_i = 2 \sum_i \beta_k^i x_i,$$

also $b_i^k = \beta_k^i$. Mithin folgt

$$|\beta_i^k| = |b_i^k| = \varepsilon |a_i^k| \quad \text{neben} \quad |\alpha_i^k| = \varepsilon |b_i^k| = \varepsilon^2 |a_i^k|,$$

d. h. die symmetrische Determinante $|a_i^k|$ ist eine Invariante der Form f vom Gewicht 2.

Für eine *beliebige* ganze Funktion $F(x_1 x_2 \cdots x_n) = Fx$ bilde man mit den Argumenten $x_i + hy_i$ die Taylor'sche Entwicklung

$$F(x + hy) = Fx + h\Phi_1(xy) + \tfrac{1}{2}h^2\Phi_2(xy) + \tfrac{1}{6}h^3\Phi_3(xy) \cdots$$

und setze

$$x_i = \sum_k \delta_i^k \xi_k, \quad y_i = \sum_k \delta_i^k \eta_k,$$

Digitized by Google

so wird der Koeffizient von h^p:

$$\frac{1}{p!}\Phi(xy) = \sum_{\nu} \frac{y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \cdots y_n^{\nu_n}}{\nu_1!\,\nu_2! \cdots \nu_n!} \cdot \frac{\partial^p F}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \cdots \partial x_n^{\nu_n}},$$

wenn die Summation $\sum_{\nu}$ auf alle positive Zahlen ν_i inkl. der Null erstreckt wird, deren Summe p beträgt. Für $p = 1, 2$ erhält man

$$\Phi_1 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} y_i \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \sum_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k,$$

wo die Indizes i und k unabhängig alle Werte von 1 bis n annehmen. Vermöge der linearen Transformation wird ebenso

$$F(\xi + h\eta) = F\xi + h\Phi_1(\xi\eta) + \tfrac{1}{2}h^2\Phi_2(\xi\eta) + \cdots,$$

also auch

$$\Phi_1 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \eta_i \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \sum_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \eta_i \eta_k.$$

Die *quadratische* Form

$$f(y) = \sum_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = \sum_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \eta_i \eta_k$$

liefert für die sogen. *Hesse'sche Determinante*

$$H = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \right|, \qquad \mathsf{H} = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \right|$$

die Gleichung

$$\mathsf{H} = \varepsilon^2 H,$$

d. h. H ist eine Kovariante der Funktion F mit dem Gewicht 2.

Bezeichnet man ferner durch $F_1(x)$, $F_2(x) \cdots F_n(x)$ ein System von n Funktionen beliebigen Grades von $x_1 x_2 \cdots x_n$ mit der *Funktionaldeterminante*

$$D = \frac{\partial(F_1 F_2 \cdots F_n)}{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)},$$

so erhält man vermöge der n linearen Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial F_k}{\partial x_i} y_i = \sum_i \frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} \eta_i$$

die Relation

$$\frac{\partial(F_1 F_2 \cdots F_n)}{\partial(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)} = \Delta = \varepsilon D,$$

mit anderen Worten, D ist eine Kovariante des Systems $F_1 F_2 \cdots F_n$ mit dem Gewicht 1.

Wenn Fx eine *homogene* Funktion der n Variabeln x_i vom Grade m ausdrückt, so nennt man $\Phi_p(xy)$ die $p$te *Polare* von F, für welche die Relation erfüllt ist:

$$\frac{1}{p!}\Phi_p(xy) = \frac{1}{(m-p)!}\Phi_{m-p}(yx),$$

wie aus der identischen Gleichung

$$F(x+hy) = h^m F\left(y+\frac{x}{h}\right)$$

hervorgeht. Sei z. B. $n=2$, so erhält man:

$$\Phi_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}y_2, \quad \Phi_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}y_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}y_1 y_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}y_2^2,$$

usw. neben

$$mF = x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad (m-1)\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + x_2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2},$$

usw.

Schreibt man folglich

$$F(x_1 x_2) = x_2^m f(x) \quad \text{nebst} \quad x = \frac{x_1}{x_2},$$

so ergeben sich die Werte

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = m x_2^{m-1} f_x, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = m x_2^{m-1}(f - x f_x), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = m(m-1)x_2^{m-2} f_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = m(m-1)x_2^{m-2}(f_x - x f_{xx}),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = m(m-1)x_2^{m-2}(f - 2x f_x + x^2 f_{xx}),$$

usw. und damit für $y = \frac{y_1}{y_2}$:

$$\Phi_1 = m x_2^{m-1} y_2 \{f - (x-y)f_x\},$$

$$\Phi_2 = m(m-1)x_2^{m-2} y_2^2 \{f - 2(x-y)f_x + (x-y)^2 f_{xx}\},$$

allgemein

$$\frac{1}{p!}\Phi_p = \widehat{m}_p x_2^{m-p} y_2^p \{f - \widehat{p}_1(x-y)f_x + \widehat{p}_2(x-y)^2 f_{xx} \mp \cdots\}.$$

Vertauscht man hier x und y, sowie p und $m-p$ und schreibt kurz $\mathfrak{f}$ für $f(y)$, so folgt der weitere Ausdruck

$$\frac{1}{p!}\Phi_p = \widehat{m}_p x_2^{m-p} y_2^p \{\mathfrak{f} + \widehat{m-p}_1(x-y)\mathfrak{f}_x + \widehat{m-p}_2(x-y)^2 \mathfrak{f}_{xx} + \cdots\}.$$

Man schließt daraus, daß Φ_p in Bezug auf x und y von den Graden $m-p$ und p sein muß, während die höheren Potenzen sich von selbst wegheben.

Die lineare Transformation aber nimmt jetzt die Gestalt an:

$$x = \frac{\delta\xi + \delta_1}{\delta_2\xi + \delta_3}, \qquad y = \frac{\delta\eta + \delta_1}{\delta_2\eta + \delta_3},$$

wenn $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\delta = \delta_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^2$, $\delta_2 = \delta_2^1$, $\delta_3 = \delta_2^2$ geschrieben werden. Setzt man also

$$\delta_2\xi + \delta_3 = \varrho, \quad \delta_2\eta + \delta_3 = \varrho',$$

$$\varphi_p = f - \binom{p}{1}_1 (x-y) f_x + \binom{p}{2}_1 (x-y)^2 f_{xx} \mp \cdots = [(x-y)^p, f]_p$$

$$= \mathfrak{f} + \binom{m-p}{1}_1 (x-y)\mathfrak{f}_x + \binom{m-p}{2}_1 (x-y)^2 \mathfrak{f}_{xx} + \cdots = [(y-x)^{m-p}, \mathfrak{f}]_{m-p}$$

so hat man

$$F' = \varrho^m f(x\alpha) = f(\xi\alpha), \quad \varrho^{m-p}\varrho'^p \varphi_p(xy\alpha) = \varphi_p(\xi\eta\alpha),$$

und es wird durch das Stattfinden dieser Relationen φ_p als die $p$te *Polare* von f definiert. Beide Gleichungen gehen ineinander über für $y = x$ oder $\eta = \xi$, $f = \varphi_p$, während für $x = 0$ oder $y = 0$:

$$\varphi_p(0y) = \mathfrak{f} - \binom{m-p}{1}_1 y\mathfrak{f}_x + \binom{m-p}{2}_1 y^2 \mathfrak{f}_{xx} \mp \cdots$$

$$= a_{m-p} y^p + \binom{p}{1}_1 a_{m-p+1} y^{p-1} + \binom{p}{2}_1 a_{m-p+2} y^{p-2} \cdots + a_m,$$

$$\varphi_p(x0) = f - \binom{p}{1}_1 x f_x + \binom{p}{2}_1 x^2 f_{xx} \mp \cdots$$

$$= a_p x^{m-p} + \binom{m-p}{1}_1 a_{p+1} x^{m-p-1} + \binom{m-p}{2}_1 a_{p+2} x^{m-p-2} \cdots + a_m.$$

Eine Kovariante $\psi(xy)$ endlich von $\varphi(xy)$ in Bezug auf die Variable y wird zu einer Kovariante von $f(x)$, wenn man y durch x ersetzt.[1]) Denn da für $k = \frac{1}{2}(\mu p - q)$ $\psi(y)$ einer Gleichung genügt von der Form

$$\varepsilon^k \varrho'^q \psi(xy\alpha) = \psi(x\eta\alpha)$$

vom Grade q, der Dimension μ und dem Gewichte k, während x auf den Grad $\mu(m-p)$ steigt, so erhält man durch Multiplikation mit $\varrho^{\mu(m-p)}$ für

$$y = x, \quad \eta = \xi, \quad \varrho' = \varrho, \quad l = \mu(m-p) + q = \mu m - 2k:$$

$$\varepsilon^k \varrho^l \psi(x\alpha) = \psi(\xi\alpha),$$

also eine Kovariante von f, Grad l, Dimension μ, Gewicht k."

1) Weber, *Algebra*, Bd. I, S. 188.

Druckfertig erklärt 21. XII. 1905.]

SITZUNG VOM 3. JULI 1905.

Zwei Briefe von Wilhelm Weber an G. Th. Fechner über das psychische Maß.

Auszugsweise veröffentlicht von

G. F. Lipps.

Durch allgemeine Erwägungen über das Grundverhältnis zwischen Leib und Seele war Fechner schon im Herbste 1850 dazu geführt worden [1]), „den *verhältnismäßigen* Zuwachs der körperlichen lebendigen Kraft oder $d\beta : \beta$, wenn β die lebendige Kraft bedeutet, zum Maße des *Zuwachses* der zugehörigen geistigen Intensität zu machen". Hierdurch hatte er ohne weiteres die sogenannte „Fundamentalformel"

$$d\gamma = \frac{K d\beta}{\beta},$$

wo γ die Empfindungsintensität und K eine Konstante bezeichnet, sowie die sogenannte „Maßformel"

$$\gamma = K \log \frac{\beta}{b},$$

wo b den „Schwellenwert" der Empfindung angibt, erhalten. „Als erste Bestätigung", sagt Fechner, „fiel mir gleich ein, daß die Verstärkung der Lichtempfindung nach alltäglicher Erfahrung hinter der Verstärkung des physischen Lichtreizes zurückbleibt und überhaupt gegebene Zuwüchse zu Reizen um so schwächer empfunden werden, zu je stärkeren Reizen sie entstehen, ohne daß ich noch den genauen Ausdruck dieser Tatsache im Weberschen Gesetze [2]) kannte, womit erst eine scharfe Bewährung der Formel möglich wird. Doch schien sich mir mit dieser ersten noch sehr im allgemeinen sich haltenden Be-

1) Elemente der Psychophysik, zweiter Teil, S. 554 folgend.

2) E. H. Weber, De pulsu, resorptione, auditu et tactu; annotationes anatomicae et physiologicae, 1834. Zusammengefaßt in der Abhandlung „Der Tastsinn und das Gemeingefühl" in Wagners Handwörterbuch der Physiologie, 1846.

stätigung auf einmal, ich gestehe es, eine ungeheure Perspektive zu eröffnen". Es ergab sich ferner „in den Phänomenen des Schlafes und der unbewußten Empfindungen" eine Erklärung des Umstandes, daß nach der Maßformel die Empfindung γ schon für den endlichen Reizwert $\beta = b$ verschwindet. „Mit all dem war freilich", wie Fechner hervorhebt, „noch kein psychisches Maß begründet; sondern die ganze Betrachtung litt vielmehr an dem Mangel eines scharfen Fundamentalbegriffes für das psychische Maß". Es konnten jedoch „die schon ohne Maß bewährbaren Folgerungen der Formeln" hinreichen, „um damit auch die Maßbeziehung zwischen Reiz und Empfindung, welche in den Formeln mit eingeschlossen ist, für konstatiert zu halten".

„Inzwischen übersandte ich", bemerkt Fechner weiterhin, „nachdem der Gegenstand soweit gediehen war, schon im Jahre 1850 dem Professor W. Weber in Göttingen eine Abhandlung darüber, mit der Bitte um ein Urteil darüber, wobei ich unter Anerkenntnis der noch sehr großen Mangelhaftigkeit in Begründung und Ausführung des Gegenstandes doch die Hoffnung aussprach, die Idee möge eine glückliche sein".

Die zwei, durch diese Abhandlung veranlaßten Briefe von Wilhelm Weber habe ich nun im Mai dieses Jahres bei der Ordnung des im Fechner-Archiv der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften aufbewahrten Nachlasses Fechners aufgefunden. Fechner selbst hat aus ihnen bloß diejenige Stelle mitgeteilt, die sich auf die von ihm geäußerte Hoffnung „die Idee möge eine glückliche sein" bezieht. Die Briefe enthalten aber außerdem Erörterungen über das psychische Maß. Insbesondere ist zu beachten, daß hier bereits in aller Bestimmtheit der prinzipielle Unterschied zwischen den Ordnungszahlen der Empfindungen und den Maßzahlen der Reize oder zwischen bloßer Gradation und wirklicher Messung betont wird. Es erschien darum geboten, die in beiden Briefen vorliegenden wissenschaftlichen Ausführungen zu veröffentlichen.

I.

. . . . . .

Über den Inhalt [Ihrer Abhandlung] erlaube ich mir noch folgende, wenn auch nur sehr fragmentarische Bemerkungen beizufügen, von geringer Bedeutung, die mir aber am nächsten liegen. Es gibt einige Empfindungen, deren Intensität wir nach *Graden* unterscheiden, z. B. die Lichtempfindungen von den Sternen 1., 2., 3.... Größe. Es gibt andere Empfindungen, wo solche Unterscheidungen nicht versucht worden sind. Bei jenen hat sich ergeben, daß die Zahlen, welche zur Zählung der Grade gebraucht werden, in arithmetischer Reihe wachsen oder abnehmen, wenn die lebendigen Kräfte der Körper, von welchen jene Empfindungen

erregt werden, in geometrischer Reihe wachsen. Hierdurch ist die Möglichkeit gegeben, durch Messung lebendiger Kräfte, z. B. durch photometrische Messungen die *Nummern* der Sternklassen zu bestimmen, zu welchen einzelne Sterne gehören. Durch diese Nummern wird aber weder die Lichtintensität eines Sternes noch der Unterschied der Lichtintensität zweier Sterne als (mathematische) Größe bestimmt. Jene Nummer n mag eine Funktion anderer mathematischer Größen ($= \log \beta/b$) sein, aber die Intensität, welche nur gradweise Unterscheidung zuläßt, kann nicht zu einer Funktion mathematischer Größen gemacht werden. Jene Nummern sind nur Bezeichnungen aber keine Bestimmungen (Definitionen) verschiedener Intensitäten. Der Übergang von den Gradnummern zu den Graden selbst liegt außer dem Bereiche mathematischer Betrachtung. Könnte man nun nicht sagen, daß in der Psychologie nicht die Nummern der Lichtintensitäten Gegenstand der Betrachtung sind, sondern die Lichtintensitäten selbst, und daß folglich ein Prinzip mathematischer Nummerierung der Lichtintensitäten kein Prinzip mathematischer Psychologie sei?

Man könnte zwar antworten, daß, wenn man auch nicht gewiß wisse, ob Lichtintensitäten Größen sind, und noch weniger sie bestimmen könne, so stehe es doch frei, die Hypothese zu machen, daß die Lichtintensitäten Größen und jenen Nummern proportional seien. Hiergegen würde ich einwenden, daß von keinem Dinge gesagt werden kann, *es sei eine Größe*, sondern nur, *es könne als Größe gedacht werden* (wobei aber die Art, wie es als Größe gedacht werde, d. i. wie es gemessen werden könne, gegeben sein und alle Operationen, Addition, Subtraktion, ... durch die Messung Sinn und Bedeutung erhalten müssen). Aber nicht die Hypothese der Möglichkeit, daß etwas als Größe gedacht werden könne, sondern nur die Hypothese der Wirklichkeit, daß etwas als Größe gedacht werde (mit deutlicher Angabe der Art und Weise) kann an die Spitze einer Theorie gestellt werden, wenn die Theorie zu Resultaten führen soll, die nicht an Möglichkeiten sondern an Wirklichkeiten geprüft werden sollen.

Die [von Ihnen] ausgesprochene Fundamentalhypothese wird in einzelnen Fällen wirklich durch die Erfahrung bestätigt, wenn sie so ausgesprochen wird, daß die Verhältnisse der lebendigen Kräfte den Zahlendifferenzen der Nummern der Intensitätsgrade, welche in der Empfindung unterschieden werden, proportional seien. Wollte man weiter gehen, so könnte man annehmen, daß

jede Empfindung an eine geistige Bewegung gebunden sei; nur würde ich nicht glauben, daß man die Empfindung mit dieser geistigen Bewegung identifizieren dürfe, weil die Empfindung durch das Bewußtsein gegeben ist und in diesem Bewußtsein eine solche *Bewegung* nicht enthalten ist, wenigstens wenn Bewegung in ihrer gewöhnlichen Beziehung zu Raum- und Zeitverhältnissen verstanden wird, was notwendig ist, wenn sie als mathematische Größe oder als Funktion mathematischer Größen gedacht werden soll. Unter Annahme einer wirklichen geistigen Bewegung, welche aller Empfindung zugrunde liegt, dürfte sich nun ferner auch wohl von einer geistigen lebendigen Kraft sprechen lassen, im Gegensatz zur physischen lebendigen Kraft, und annehmen lassen, daß dieselbe nicht der letzteren selbst, sondern deren Logarithmus proportional sei, d. h. daß die geistige lebendige Kraft mit den Nummern der Intensitätsgrade proportional sei, welche in der Empfindung unterschieden werden. Will man also im allgemeinen von *geistiger Intensität* als mathematischer Größe oder als Funktion mathematischer Größen sprechen, so muß man, wie es mir scheint, diese geistige Intensität von derjenigen unterscheiden, welche durch das Bewußtsein selbst in der Empfindung gegeben ist, und muß sie hypothetisch hinstellen, wie es der Fall ist, wenn man sie sich als eine in Raum und Zeit darstellbare Bewegung denkt. Es fragt sich nur, ob durch diese neue Hypothese etwas Wesentliches gewonnen wird, was nicht auch schon durch die gegebene Relation der physischen lebendigen Kräfte mit den Nummern der Empfindungsgrade erreicht werden kann.

Im Verlaufe Ihrer Untersuchung haben Sie nun ferner die physischen lebendigen Kräfte (von denen die Nummern der Empfindungsgrade abhängen) nach ihrem Nebeneinander und Nacheinander, nach ihrer Stetigkeit und Unstetigkeit usw. klassifiziert und damit die verschiedenen Empfindungsarten und andere geistige Tätigkeiten in Zusammenhang gebracht. Insbesondere haben Sie dabei auch lebendige Kräfte, die einen inneren Grund haben, und lebendige Kräfte, welche von äußeren Anregungen stammen, unterschieden. Das Zusammenwirken beider beruht, wie ich glaube, auf Superposition nach dem Prinzip der Koexistenz kleiner Bewegungen. Kleinere von außen erregte Wellen, welche für sich unter der Schwelle des Bewußtseins bleiben würden, können, durch die aus dem Innern stammende Grundwelle getragen, über die Schwelle des Bewußtseins steigen und dann verschiedene

Nummern der Empfindungsgrade und verschiedene Empfindungsarten hervorbringen. Es läßt sich hier nur beifügen, daß, wenn die Grundwelle immer höher stiege, die verschiedenen Nummern der Empfindungsgrade, welche von den superponierten Wellen herrühren, nach und nach wieder verschwinden müßten. Denn ist β die wachsende lebendige Kraft der Grundwelle, β' die unveränderliche lebendige Kraft der superponierten Welle, so wird die Nummer des Empfindungsgrades gleich $\log (\beta + \beta')/b$ zu setzen sein, was für große Werte von β nicht merklich von $\log \beta/b$ verschieden ist.

Endlich möchte ich noch bemerken, daß, wenn β eine konstante lebendige Kraft (welche z. B. von der Weltkörperbewegung herrührt, an welcher die Sinnesorgane teilnehmen) bezeichnet, gegen welche alle anderen eintretenden variablen lebendigen Kräfte sehr klein sind, die Betrachtung der letzteren von der ersteren ganz unabhängig gehalten werden kann; denn es kann, wie Sie sagen, „für diese kleinen Wellen die unterliegende Wellenfläche, welche abgesehen von ihnen bestehen würde, als Abszissenfläche angesehen und bloß deren Erhebung und Senkung über die Wellengrundflächen in Betracht gezogen werden". Wenn man nun aber von der Betrachtung dieser physischen lebendigen Kräfte zur Bestimmung der Nummern der Intensitätsgrade übergehen will, so scheint mir jene konstante lebendige Kraft nicht außer Acht gelassen werden zu dürfen, wenn man nicht eine andere Fnnktion der lebendigen Kräfte zur Bestimmung jener Nummern einführen will. Es sei β die große und konstante lebendige Kraft, x die hinzukommende kleine und veränderliche lebendige Kraft. Nach dem allgemeinen Gesetze ist dann die Nummer des Intensitätsgrades der Empfindung durch $\log (\beta + x)/b$ gegeben, also

$$n = \log \frac{\beta + x}{b}.$$

Die Differentiation gibt

$$dn = \frac{dx}{b} : \frac{\beta + x}{b},$$

oder, weil x gegen β immer sehr klein ist,

$$\beta dn = dx,$$

d. h. die Nummern der Intensitätsgrade wachsen proportional mit den betrachteten lebendigen Kräften x, nicht mit den Logarithmen derselben, wie es nach dem allgemeinen Gesetz der Fall ist.

Indem ich sehe, wie weitläufig ich geworden bin und wie wenig darin Ihrer ernsten Erwägung würdig sein dürfte, so erlaube ich mir zu meiner Entschuldigung noch beizufügen, daß ich nur Ihrer freundlichen Aufforderung habe entsprechen wollen, ohne irgend einen innern Beruf zu fühlen, in dieser Sache zu raten und zu kritisieren. Es macht mir ein Privatvergnügen, Ihre Arbeit zu lesen, und ich lasse dabei für mich die Frage ganz dahingestellt, welchen Eindruck die Arbeit auf andere hervorbringe und maße mir noch weniger an zu beurteilen, inwiefern die Wissenschaft dadurch wesentlich weiter gefördert würde. Soll ich darüber etwas sagen, so scheint mir die Grundidee im ganzen richtig und sehr scharfsinnig durchgeführt; aber ich würde vor der Hand noch Bedenken tragen, sie eine glückliche zu nennen. Unter glücklich verstehe ich nämlich, wenn die Idee mit der Entdeckung neuer Fakta zusammentrifft, die einer präzisen Auffassung fähig sind und der Idee zur besonderen Stütze gereichen. Die Idee der Wellentheorie des Lichtes, wie sie Euler vortrug, nenne ich scharfsinnig und richtig, aber nicht glücklich; dieselbe Idee, wie sie von Fresnel reproduziert wurde und mit der Entdeckung der Interferenzerscheinungen zusammentrifft, nenne ich glücklich. In Ihrem jetzigen Gebiete ist die Entdeckung solcher Fakta vielleicht sehr unwahrscheinlich, aber doch möglich, wie vorhandene Fakta beweisen, z. B. daß Quinte und Quarte sich zur Oktave, große Terz und kleine Terz genau zur Quinte ergänzen, die auf unmittelbarer Tonempfindung beruhend von akustischen Theorien unabhängig dastehen. Nur durch solche Fakta, durch die sie gestützt werden, fassen jene Ideen wirklich festen Fuß in der Wissenschaft. Wie nun aber Euler die Idee der Wellentheorie entwickelt hat, ehe solche besondere stützende Fakta vorlagen, ebenso ist Ihnen die Entwicklung Ihrer Idee und die Benutzung des Vorhandenen zu Ihrer Unterstützung gestattet: der wirkliche Erfolg wird aber davon abhängen, ob Sie das Glück haben, daß die stützenden neuen Fakta sich bald dazu finden. Solange dies nicht der Fall ist, muß die Entwicklung selbst mehr allgemein gehalten werden, und ich würde einen Aufwand höherer Analyse für eine Verschwendung halten. Der Einfluß, den die vorläufige Entwicklung einer solchen Idee haben kann, würde durch die so vielen unverständliche Form vereitelt werden. . . .

Göttingen, 1850, Dez. 12. Wilhelm Weber.

II.

In dem Bestreben, auf die von Ihnen gestellten Fragen soweit als es mir möglich war, einzugehen, sind die von mir gemachten Einwürfe vielleicht zu sehr in den Vordergrund getreten. Ich sehe sehr wohl ein, daß die Natur des Gegenstandes in numerischen Bestimmungen keine solche Präzision gestattet wie viele physikalische Gegenstände; aber auch bei diesen ist die erreichbare Präzision quantitativer Bestimmungen sehr verschieden. Die Unsicherheit in Coulombs elektrischen Messungen beträgt oft über zehn Prozent. Ich halte wirkliche Messungen im Bereich der Empfindungen selbst nicht für unmöglich und glaube auch, daß sie trotz eines sehr geringen Grades von Präzision für die theoretische Behandlung von großer Wichtigkeit sein können. Man kann aber auch einer zweckmäßigen und scharf bestimmten Gradation ihren Nutzen nicht bestreiten. Es scheint mir aber auf die scharfe Unterscheidung viel anzukommen, daß der Leser genau weiß, wo von einer bloßen Gradation und wo von einer wirklichen Messung (wie gering auch die Präzision sei) die Rede sei. Die wirkliche Messung fordert zwei voneinander unabhängige Elemente der Beobachtung, welche bei einer bloßen Gradation nicht nötig sind. Zum Beispiel genügt es nicht zu einer wirklichen Tonmessung, daß man imstande ist, durch die Beobachtung zu erkennen, welcher von zwei Tönen der höhere ist, sondern es ist dazu notwendig, daß man außerdem auch ein bestimmtes Intervall, unabhängig von der Höhe der Töne, welche es bilden, zu erkennen und von allen anderen Intervallen zu unterscheiden vermag. Dieses Intervall bildet den Comparateur, wodurch die Gleichheit der Abteilungen einer Skala verbürgt wird. Einer bloßen Gradation der Tonhöhen könnten wir die Schwingungszahlen selbst zugrunde legen; die wirkliche Messung ergibt dann aber, daß gleiche Abteilungen der Skala dem Unterschiede der Logarithmen dieser Zahlen entsprechen. Ebenso lassen sich vielleicht in der Intensität bestimmte Stufen unabhängig von der absoluten Intensität erkennen, welche einer wirklichen Messung der Intensität der Empfindung zugrunde gelegt werden könnten. Die in der Lichtintensität der Sterne unterschiedenen Stufen können vielleicht wirklich so angesehen werden. Geringe Anfänge zu solchen wirklichen Messungen scheinen mir als eine allmählich auszubildende Grundlage der Theorie von der größten Wichtigkeit. Wo diese

vor der Hand nicht ausreichen, muß man sich einstweilen mit bloßen Gradationen behelfen, und wenn es auch möglich ist, daß eine solche zweckmäßig eingerichtete Gradation in ihren numerischen Bestimmungen mit denen der späteren Messungen zusammenfällt, so darf dies doch nicht präsumiert werden. . . .

Was die den Sinnesorganen mit den Weltkörpern gemeinsame Bewegung und den Einfluß der daraus entspringenden lebendigen Kräfte auf die Empfindungen betrifft, so bemerken Sie, daß bei der Unabhängigkeit, in der die anderen kleinen lebendigen Kräfte und jene großen zueinander stehen, ganz verschiedene Werte von b ihnen zugehören könnten. Es würde mir aber scheinen, daß dadurch die Einheit des Prinzips aufgegeben würde. Ich habe damit keinen wesentlichen Einwurf beabsichtigt, sondern habe auf diesen Umstand nur aufmerksam machen wollen, weil er vielleicht ein Zurückgehen auf die Grundbetrachtungen nötig macht, auf die Sie das allgemeine Prinzip gestützt haben. Sie haben es darin selbst als eine bloße theoretische Fiktion bezeichnet, wenn die Empfindung von der lebendigen Kraft *eines* Punktes abhängig gemacht wird, und haben die Meinung ausgesprochen, daß der wahre Grund in dem Zusammenhange und den Verhältnissen mehrerer solcher Punkte zu suchen sei. Dies scheint mir hierbei in Betracht gezogen werden zu müssen; denn ich kann mir nicht wohl denken, daß, wenn alle Teile der Empfindungsorgane *bloß* eine mit den Weltkörpern gemeinschaftliche Bewegung hätten, eine Empfindung daraus resultieren sollte, da wir doch bei allen anderen Erscheinungen von einer solchen gemeinsamen Bewegung immer abstrahieren können. . . .

Göttingen, 1851, Jan. 15. Wilhelm Weber.

Druckfertig erklärt 6. I. 1906.]

Protektor der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Exzellenz der Staatsminister des Kultus und öffentlichen Unterrichts Dr. *Kurt Damm Paul v. Seydewitz.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Rat *Ernst Windisch* in Leipzig, Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1906.
Geheimer Rat *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1906.
Professor *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.
—— —— *Karl Bücher* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *August Fischer* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
—— —— *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— —— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Kirchenrat *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Rat *Max Heinze* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrat *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Professor *Albert Köster* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Karl Lamprecht* in Leipzig.
—— —— *August Leskien* in Leipzig.

Professor *Friedrich Marx* in Leipzig.
—— *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Mitteis* in Leipzig.
Professor *Eugen Mogk* in Leipzig.
Oberstudienrat *Hermann Peter* in Meißen.
—— *Wilhelm Roscher* in Dresden.
Professor *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrat *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Eduard Sievers* in Leipzig.
Geheimer Rat *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
—— *Wilhelm Stieda* in Leipzig.
—— *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Georg Treu* in Dresden.
—— —— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
Geheimer Hofrat *Erich Marcks* in Heidelberg.
Hofrat *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
Geheimer Regierungsrat *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimer Rat *Ferdinand Zirkel* in Leipzig, Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1905.
Geheimer Bergrat *Hermann Credner* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1905.
Geheimer Hofrat *Ernst Beckmann* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Biedermann* in Jena.
Geheimer Medizinalrat *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Bruns* in Leipzig.

Geheimer Hofrat *Karl Chun* in Leipzig.
Professor *Theodor Des Coudres* in Leipzig.
Dr. *Wilhelm Feddersen* in Leipzig.
Professor *Otto Fischer* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Hallwachs* in Dresden.
Professor *Arthur Hantzsch* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Ewald Hering* in Leipzig.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Knorr* in Jena.
—— —— *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Medizinalrat *Felix Marchand* in Leipzig.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ernst von Meyer* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Wirklicher Staatsrat Professor *Arthur v. Oettingen* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Hofrat *Karl Rabl* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Karl Rohn* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrat *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
Professor *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rat *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
—— —— *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.

Außerordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Professor *Karl Correns* in Leipzig.
Johannes Felix in Leipzig.
—— *Hans Held* in Leipzig.
Max Siegfried in Leipzig.
— *Otto zur Strassen* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimrat *Ludwig Boltzmann* in Wien.
Professor *Friedrich Engel* in Greifswald.
Geheimer Regierungsrat *Felix Klein* in Göttingen.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Klasse.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Berger, Hugo, 1904.
Böhtlingk, Otto, 1904.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebers, Georg, 1898.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleckeisen, Alfred, 1899.
Fleischer, Heinr. Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Krehl, Ludolf, 1901.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Miaskowski, August von, 1899.

Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Mommsen, Theodor, 1903.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Overbeck, Johannes Adolf. 1895.
Pertsch, Wilhelm, 1899.
Peschel, Oscar Ferdinand. 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ratzel, Friedrich, 1904.
Ribbeck, Otto, 1898.
Ritschl, Friedrich Wilhelm. 1876.
Rohde, Erwin, 1898.
Roscher, Wilhelm. 1894.
Ruge, Sophus, 1903.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Socin, Albert, 1899.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August. 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Voigt, Moritz, 1905.
Wachsmuth, Curt, 1905.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von. 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Klasse.

Abbe, Ernst, 1905.
d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Carus, Julius Victor, 1903.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Gegenbaur, Carl, 1903.
Geinitz, Hans Bruno, 1900.
Hankel, Wilhelm Gottlieb, 1899.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack. Axel, 1888.
His, Wilhelm, 1904.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Leuckart, Rudolph, 1898.
Lie, Sophus, 1899.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig. Carl, 1895.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Richthofen, Ferdinand v., 1905.

Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August. 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schlömilch, Oscar, 1901.
Schmitt, Rudolf Wilhelm, 1898.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Wiedemann, Gustav, 1899.
Winkler, Clemens, 1904.
Wislicenus, Johannes, 1902.
Zöllner, Johann Carl Friedrich. 1882.

Leipzig, am 31. Dezember 1905.

Verzeichnis

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1905 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin Aus d. J. 1904. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1904, No. 41—53. 1905, No. 1—38. Berlin d. J.

Politische Korrespondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 30. Berlin 1905.

Acta Borussica. Denkmäler der preußischen Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Herausg. von der Königl. Akademie der Wissenschaften: Die Behördenorganisation und die allgemeine Staatsverwaltung Preußens im 18. Jahrhundert. Bd. 7. — Ergbd. Die Briefe König Friedrich Wilhelms I. an den Fürsten Leopold zu Anhalt-Dessau 1704—1740. Berlin 1904. 05.

Kekule von Stradonitz, Reinh., Echelos und Basile. Attisches Relief aus Rhodos. 65. Programm zum Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1905.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 37, No. 18. Jahrg. 38, No. 1—17. Berlin 1904. 05.

Die Fortschritte der Physik im J. 1904. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 60. Abt. 1—3. Braunschweig 1905.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 6, No. 10—24. Jahrg. 7, No. 1. 2. Berlin 1904. 05.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 18 (Jahrg. 1904), No. 20—26. Bd. 19 (Jahrg. 1905), No. 1—18. — Bibliographia physiologica. Ser. III. Bd. 1. No. 1. 2. Berlin 1904. 05.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 29 (1904/05), No. 5—15. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt N. F. H. 43. 44. Berlin 1904. 05.

Digitized by Google

Wissenschaftliche Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Bd. 4. H. 2. Berlin 1905.

Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1904 S.-A. Berlin d. J.

Miethe, Die geschichtliche Entwickelung der farbigen Photographie. Rede in der Halle der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1905.

Verein deutscher Ingenieure. Leitfaden für das Technolexikon. 2. Aufl. — *Jansen, Herb.*, Verzeichnis der Fremdwörter im Deutschen, bei denen verschiedene Schreibungen zulässig sind. 2. Aufl. Berlin 1905.

Bonner Jahrbücher. Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinlande. H. 111/112 u. Tafelbd. Bonn 1904.

Zweiundachtzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1904 u. Ergb. zum 81. Jahresber. Breslau 1904. 05.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 11. H. 1—3. — Katalog der Bibliothek. H. 1. Danzig 1904. 05.

Zeitschrift des k sächsischen statistischen Bureaus. Jahrg 50, No. 3. 4 Jahrg. 51, No. 1. — Normalkalender für das Königr. Sachsen auf d. J. 1906. — Statistisches Jahrbuch für das Königr. Sachsen. Jahrg. 33. Dresden 1904. 05.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsber. 1901/02. 1903/04. 1904/05. München 1902. 05. — Verzeichnis der Büchersammlung. Dresden 1905.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1904, Jnl.—Dez. 1905, Jan.—Jun Dresden d J.

Verzeichnis der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1905 u. Wintersem. 1905/06. — Personalverzeichnis der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule f. d. Sommersem. 1905 u. Wintersem. 1905/06.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 20. 21. Jahrg. 61. 62. Dürkheim a. d. H. 1904. 05.

Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 19. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Düsseldorf 1905.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt. H. 25. Erfurt 1904.

Sitzungsberichte der physikal.-medizinischen Societät in Erlangen. H. 36 (1904). Erlangen 1905.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. f. das Rechnungsjahr 1903/04. Frankfurt 1905.

Helios. Abhandlungen und monatliche Mitteilungen aus dem Gesamtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Jahrg. 22. Berlin 1905.

Jahrbuch f. d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1905. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1905/06. Freiberg 1905.

Verzeichnis der Vorlesungen auf der Großherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Gießen. Sommer 1905, Winter 1905/06; Personal-

bestand W. 1904/05, S. 1905. — Promotionsordnungen. — Ordnung der ärztlichen Vorprüfung. — Studienplan für die Studierenden der Veterinärmedizin. — Dsg. für Mathematik. — Prüfungsordnung für Tierzuchtinspektoren und Landwirte. — *Drews, P.*, Die Ordination, Prüfung und Lehrverpflichtung der Ordinanden in Wittenberg 1535 (Progr.). — *Vossius, A.*, Die Augenheilkunde im Mittelalter und ihre Entwickelung im 19. Jahrh. (Festrede). Gießen 1904. 05. — 111 Dissertationen a. d. J. 1904/05.

Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde. 34. Gießen 1905.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Klasse. Bd. 8. No. 3—6. Math.-phys. Klasse. Bd. 3. No. 2—4. Bd. 4. No. 1. 3. 4. Göttingen 1904. 05.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1904, No. 6. 1905, No. 1—3. Philol.-hist. Kl. 1904, No. 4. 5. 1905, No. 1—3. Geschäftliche Mitteilungen. 1904, H. 2. 1905, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1904/05. Grimma 1905.

Nova Acta Academiae Caes. Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum. Tom. 81—83. — Katalog der Bibliothek der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 3. Lief. 1. Halle 1904. 05.

Leopoldina. Amtl. Org. d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 40, No. 12. H. 41, No. 1—10. Halle 1904. 05.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. 77. H. 3—6. Stuttgart 1905.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 4. H. 5. Leipzig 1905.

50.—54. Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover 1899/1900—03/04. Hannover 1905.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 13, Heft 2. Jahrg. 14. H. 1. Heidelberg 1904. 05.

Mitteilungen der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Herausg. von *W. Valentiner*. 5. 6. — Veröffentlichungen der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Bd. 3. Karlsruhe u. Leipzig 1904. 05.

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Herausg. vom Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika Dar-es-Salâm. Bd. 2. H. 4—6. Heidelberg 1905.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 8. H. 1. Heidelberg 1904.

Fridericiana. Großherzogl. Badnische Technische Hochschule zu Karlsruhe. Programm f. 1905/06. — *Schur, Friedr.*, Johann Heinrich Lambert als Geometer. (Festrede.) Karlsruhe 1905. — 9 Dissertationen a. d. J. 1904/05.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1904/5. — Verzeichnis der Vorlesungen. Winter 1904/05, Sommer 1905. — *Harzer, Paul*, Die exakten Wissenschaften im alten Japan (Rede). — *Heller, Arnold*, Die Mitwirkung der Medizin am inneren Ausbau des deutschen

Reiches (Rede). — *Körting, Gust.*, Bemerkungen über den Begriff und die Teile des grammatischen Satzes (Progr.). Kiel 1905. — 90 Dissertationen a. d. J. 1904/05.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirtschaft, Domänen usw. N. F. Abteilung Helgoland. Bd. 7. H. 1. Abteilung Kiel. Bd. 8. Kiel und Leipzig 1905.

Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte der kgl. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. 1. Beschreibung der neuen Meridiankreisanlage von *Paul Harzer*. Leipzig 1905.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. 13. H. 1. — Register zu Bd. 1—12. Kiel 1904. 05.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 45 (1904). Königsberg 1904.

11. Jahresbericht des Instituts für rumänische Sprache. — *Weigand, Gust.*, Linguistischer Atlas des dakorumänischen Sprachgebietes. Lief. 6. Leipzig 1904. 05.

Das städtische Gymnasium zu St. Nikolai in Leipzig. Bericht über das Schuljahr 1904/05. Leipzig 1905.

Abhandlungen der math.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 2. München 1904.

Abhandlungen der histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 23, Abt. 2. München 1904.

Abhandlungen der philos.-philol. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 3. Bd. 23, Abt. 1. München 1905.

Almanach der k. bayer. Akad. d. Wiss. f. d. J. 1905. München d. J.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1904, H. 3. 1905, H. 1. 2. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1904, H. 4. 1905, H. 1—3. München d. J.

Amira, K. v., Konrad von Maurer (Gedächtnisrede) — *Friedrich, Joh.*, Gedächtnisrede auf Karl Adolf von Cornelius. — *Heigel, K. Th. v.*, Zum Andenken an Karl von Zittel (Rede). — *Krumbacher, K.*, Das Problem der neugriechischen Schriftsprache. — *Pringsheim, Alfr.*, Über den Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (Festrede). München 1903. 04.

46. Plenarversammlung der histor. Kommission bei der k bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Sekretariats. München 1905.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 20. H. 1. 2. Bd. 21. H. 1. München 1904. 05.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1904. Hft. 1—4. Nürnberg 1904.

Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 15, H. 2. — Jahrbuch f. 1903. Nürnberg 1904.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 5, No. 1—12. Posen 1904.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 19, H. 1. 2. Posen 1904.

Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 18—24. Berlin 1904. 05.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F Jahrg. 14 (1905). Stuttgart d. J.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 55, 1. 2. Dresden 1905.

Mitteilungen des Vereins für Kunst und Altertum in Ulm und Oberschwaben. H. 11. 12. Ulm 1904. 05.

Zuwachs der Großherzl. Bibliothek zu Weimar i. d. J. 1902—04. Weimar 1905.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 58. Wiesbaden 1905.

Sitzungsberichte der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1904, No. 4—10. Jahrg. 1905, No. 1. 2. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 37, No. 3—10. Würzburg 1904. 05..

Österreich-Ungarn.

Codex diplomaticus Regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae. Vol. 2. Zagreb (Agram) 1904.

Građa za povjest književnosti hrvatske na svijet izdaje Jugoslav. Akadem. znanosti i umjetnosti. Knjiga 4. U Zagrebu 1904.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti (Agram). Svez. 19. 1904. U Zagrebu 1905.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Kń. 157—160. U Zagrebu 1904. 05.

Rječnik brvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znanosti i umjetnosti. Svez. 24. U Zagrebu 1904.

Starine na svijet izdaje Jugoslav. Akadem. znanosti i umjetnosti. Knjiga 31. U Zagrebu 1905.

Vjestnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskog zemaljskog arkiva. God. 7 Svez. 1—4. U Zagrebu 1905.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Kń. 9, Svez. 2, Kń. 10, Svez. 1. U Zagrebu 1904. 05.

Zeitschrift des Mährischen Landesmuseums. Herausg. von der Mährischen Museumsgesellschaft (Deutsche Sektion). Bd. 5, H. 1. 2. — Časopis Moravského musea zemského. Ročn. 5. Brünn 1905.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1905. Budapest d. J.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akademie d. Wissenschaften. Bd. 20 (1902). Budapest 1905.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 18, Sz. 9. 10. Köt. 19, Sz. 1—6. Budapest 1904. 05.

Értekezések a Társadalmi Tudományok Köréből. Köt. 13, Sz. 3. Budapest 1904.

Értekezések a Történeti Tudományok Köréből. Köt. 20, Sz. 1—3. Budapest 1904. 05.

Archaeologiai Értesitö. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 24, Sz. 3—5. Köt. 25, Sz. 1. Budapest 1904. 05.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 22, Füz. 3—5. Köt. 23, Füz. 1. 2 Budapest 1904. 05.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 28, Sz. 3. Budapest 1905.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 34, Füz. 2—4. Köt. 35, Füz. 1. Budapest 1904. 05.

Monumenta Hungaria juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. Tom. 5. P. 2. Budapest 1904.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1904 Budapest 1905.

Editiones criticae scriptorum graecorum et romanorum a collegio philologico classico Acad. litt. Hungaricae publ. juris factae. Albii Tibulli Carmina. Ed. *Geyza Némethy*. Budapest 1905.

Török-magyarkori történelmi Emlékek. Köt. 3. Budapest 1904.

Szendrei Janos, A magyar viselet történeti fejlödése. Budapest 1905.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1905. Winter-Sem. 1905/06. — Übersicht der akademischen Behörden im Studienjahre 1905/06. — Die feierliche Inauguration des Rektors f. d. Studienjahr 1904/05.

Mitteilungen des naturhistorischen Vereins für Steiermark. H. 41 (1904). Graz 1905.

Steierische Zeitschrift für Geschichte. Hrsg. vom historischen Verein f. Steiermark. Jahrg. 2. Graz 1904.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. 3. Flge. H. 48. Innsbruck 1904.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Math.-naturw. Cl. 1904, No. 8—10. 1905, No. 1—7. Philol. Cl. 1904, No. 8—10 1905, No. 1—7. Krakau d. J.

Atlas geologiczny Galicyi. Zesz. 11. 15. 16. W Krakowie 1903.

Biblioteka pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 50—53. W Krakowie 1905.

Katalog literatury naukowej polskiej. Tom. 4 (1904), zesz. 1—4 Krakow 1904. 05.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydział filologiczny. T. 40. (Ser. II. T. 25.) — Wydział historyczno-filozoficzny. T. 47. (Ser. II. T. 22.) W Krakowie 1905.

Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom. 38. Kraków 1905.

Mitteilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 17, 3—6. Laibach 1904.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko Letnik 14. V Ljubljani 1904.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. H. 19. Lemberg 1904.

Sammelschrift der mathem.-naturw.-ärztlichen Sektion der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 10. Lemberg 1905.

Ukraïnsko-ruski naykov kursa. Lvobi 1904.

Lud, Organ towarzystwa ludoznawczego we Lwowie. T. 10, zesz. 4. T. 11, zesz. 1—4. We Lwowie 1904. 05.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 15. 1905. V Praze d. J.

Archiv pro Lexikografii a Dialektologii. Čisl. 5. V Praze 1904.

Historický Archiv. Čisl. 24. V Praze 1904.

Académie des sciences de l'Emp. François-Joseph I. Bulletin international. Classe des sciences mathématiqnes, naturelles et de la Médecine. Ann. 9. I. Prague 1904.

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. II. Ročn. 13. V Praze 1904.

Monumenta palaeographica Bohemiae et Moraviae. 1. V Praze 1904.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 13. V Praze 1904.

Zíbrt, Čeněk, Bibliografie česke Historie. Díl 3, Svaz. 1. V Praze 1904.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1904. Prag 1905.

Sitznngsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. Jahrg. 1904. — Philos.-histor.-philolog. Klasse Jahrg. 1904. Prag 1905.

Codex Veronensis Quatuor Evangelia ante Hieronymum latine translata, eruta e codice scripto saeculo IV vel V. Ed. *J. Belsheim.* Pragae 1904.

Nejedlý, Zdeněk, Dějing prědhusitského zpěvu v Čechách. V Praze 1904.

Voigt, H. G., Der Verfasser der römischen Vita des heiligen Adalbert. Prag 1904.

Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit der Gesellschaft zur Förd. deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. 1904. — Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. 5, H. 2. 3. Bd. 6. — Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 16. *Bayer, Jos.,* Literarisches Skizzenbnch. Prag 1904. 05.

Archiv český čili staré pisemné památky České i Moravské. Díl 27. V Praze 1904.

Codex diplomaticus et epistolaris Regni Bohemiae. Ed. *Gustav Friedrich.* Tom. 1, Fasc. 1. Pragae 1904.

Monumenta Vaticana res gestas Bohemicas illustrantia. Tom. 5, I. II. Pragae 1903. 05.

56. Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Stndenten in Prag über d. J. 1904. Prag 1905.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1904. Jahrg. 65. Prag 1905.

Personenstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag. 1905/06.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 43, No. 1—4. Prag 1904. 05.

Sitzungsberichte des deutschen natnrw.-medizin. Vereins für Böhmen „Lotos". N. F. Bd. 24. Prag 1904.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 27 (1904), No. 9—12. Anno 28 (1905), No. 1—8. Spalato 1904. 05.

Digitized by Google

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 54. Wien 1904.

Anzeiger der Kais. Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Kl. 1904. No. 25—27. 1905. No. 1—17. 21.

Archiv für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Kommission der Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 93, II. Wien 1905.

Denkschriften der Kais. Akademie d. Wissensch. Mathem.-naturw. Kl. Bd. 77. Wien 1905.

Mitteilungen der Erdbeben-Kommission der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. N. Folge. No. 25—29. Wien 1904. 05.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Kl. Bd. 113 (1904) I, No. 5—10. II^a, No. 8—10. II^b, No. 7—10. III, No. 6—10. Bd. 114 (1905) I, No. 1—5. II^a, No. 1—6. II^b, No. 1—7. III, No. 1—5. — Philos.-histor. Kl. Bd. 149 (1905).

Abhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 3. H. 1. 2. Wien 1905.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 55, H. 1—8. Wien 1905.

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. Bd. 13. Längenbestimmungen. Wien 1903.

Verhandlungen der österreich. Gradmessungs-Kommission. Protokoll über die 1902 u. 1903 abgehaltenen Sitzungen. Wien 1903. 04.

Veröffentlichung der k. k. österr. Kommission der internationalen Erdmessung. *Tinter, W.,* Die Schlußfehler der Dreiecke der Triangulierung 1. Ordnung in der k. k. österreich.-ungarischen Monarchie. Wien 1904. 05.

Die Ergebnisse der Triangulierungen des k. u. k. militärgeographischen Instituts. Bd. 1—3. Wien 1903—05.

Texte synoptique des documents destinés à servir de la base aux débats du Congrès international de Nomenclatnre botanique de Vienne 1905, présenté au nom de la Commission internat. de Nomencl. botan. par *John Briquet.* Berlin 1905.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 19, No. 1—4. Wien 1904. 05.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 54 (1904), H. 2—4. Jahrg. 55 (1905), H. 1—4. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1904, No. 13—18. Jahrg. 1905, No. 1—12. Wien d. J. — General-Register zu Bd. 41—50 des Jahrbuchs u. Jahrg. 1891—1900 der Verhandlungen. Wien 1905.

Mitteilungen der Sektion f. Naturkunde des Österreichischen Touristen-Club. Jahrg. 16. Wien 1904.

Belgien.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin. 1904, 4 1905, 1—4. Anvers d. J.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1905. (Année 71). Bruxelles d. J.

Académie Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 1904, No. 12. 1905, No. 1—8. — Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. 1904, No. 12. 1905, No. 1—8. — Mémoires. Classe des sciences. Collect. in 8°. Tom. 1, Fasc. 1—3. Tom. 2, Fasc. 1. Collect. in 4°. Tom. 1, Fasc. 1. 2. — Classe des lettres et des sciences morales et politiques. Collect. in 8°. Tom. 1, Fasc. 1—5. Collect. in 4°. Tom. 1, Fasc. 1. Bruxelles 1904. 05.

Bulletin du Jardin botanique de l'État de Bruxelles. Vol. 1, Fasc. 5. 6. Bruxelles 1904. 05.

Analecta Bollandiana. T. 24, Fasc. 1—4. Bruxelles 1905.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 48. Bruxelles 1904.

Annales de la Société Roy. malacologique de Belgique. T. 38. 39 (1903. 04). Bruxelles 1904. 05.

Annales de l'Observatoire Roy. de Bruxelles. N. S. Annales astronomiques. T. 3—8. 9, Fasc. 1 (1880—1904). Physique du Globe. T. 1—3. Bruxelles 1904. Annuaire astronomique. 1906.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 22, Fasc. 1. Louvain 1905.

Dänemark.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturv. og math. Afd. 7. Række. T. 1, No. 4. T. 2, No. 4. Hist. og philos. Afd. 6. Række. T. 6, No. 3. Kjøbenhavn 1905. — *Thomsen, Jul.*, Systematisk gennemførte termokemiske undersøgelsers numeriske og teoretiske resultater. ib. 1905.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer. Bulletin des resultats acquis pendant les courses périodiques, publ. par le Bureau du conseil. Année 1904/05. No. 1—3. — Publications de circonstance. No. 13b. 15—27. — Rapports et Procès-verbaux des réunions. Vol. 3. Copenhague 1904. 05.

Travaux de la station franco-scandinave de sondages aériens à Hald 1902—03. Viborg 1904.

England.

Aberdeen University Studies. No. 10. 11. Aberdeen 1904.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 13, P. 1—3. Cambridge 1905.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 20, No. 1—6. Cambridge 1905.

Proceedings of the R. Irish Academy. Vol. 25. Sect. A, P. 1—3. Sect. B, P. 1—6. Sect. C, P. 5—12. Dublin 1905.

Roy. Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. 11. Dublin 1905.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 10, P. 2. 3. Vol. 11, P. 1—5. Dublin 1905.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Vol. 8, No. 6—16. Vol. 9, P. 1. Dublin 1904. 05.

Economic Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 1, P. 5. 6. Dublin 1904. 05.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 25, No. 5—12. Edinburgh 1904. 05.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol 16, P. 1—3. Session 134. Edinburgh 1904/05.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 18. 19. Liverpool 1904. 05.

Proceedings of the Roy. Institution of Gr. Britain. Vol. 17, P. 2 (No. 97). London 1905.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 74—76, No. 503—513. 514B. — Yearbook of the Royal Society 1905. — Reports of the Evolution Committee. 2. — Report of the Sleeping sickness Commission. No. 5. 6. London 1905. — *Herdman, W. A.*, Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. P. 2. ib. 1904.

Transactions of the R. Society of London. Ser. A. Vol. 204, p. 221—497. Vol. 205, p. 1—35. 61—97. Ser. B. Vol. 197, p. 361—406. Vol. 198, p. 1—355. London 1905.

Memoirs of the London Astronomical Society. Vol. 57, P. 1. 2 with Append. 2 to Vol. 55. London 1904. 05.

Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. II. Vol. 2, P. 5—7. Vol. 3. P 1—7. London 1904. 05.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1905, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 49, P. 1—3. Manchester 1905.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1904/05. — Museum Handbooks: *Bolton, H.*, The Palaeontology of the Lancashire Coal measures. P. 2. 3. — Historical Essays by members of the Owens College publ. in commemoration of its jubilee (1851—1901). London 1902. — Studies in Anatomy from the Anatom. Department of the Owens College. Vol. 2 (1900). — Studies from the Biological Laboratories of the Owens College. Vol. 1—4 (1886—99). — Studies from the Physical and chemical Laboratories of the Owens College. Vol. 1. 2 (1893). — Studies from the Physiological Laboratory of the Owens College. Vol. 1 (1891). Manchester.

The Victoria University of Manchester. Calendar. 1904/05. 1905/06. — Publications of the University of Manchester. Economic Series. No. 1. Historical Series. No. 1. 2. Medical Series. No. 1—3. — *Hertz, G. B.*, The old Colonial System. — *Neville, Ralph*, Garden Cities. A Warburton Lecture. Manchester 1904. 05.

Publications of the West Hendon House Observatory. No. 3 Sunderland 1905.

Frankreich.

Annales des Facultés du Droit et des Lettres d'Aix. T. 1, No. 1—3. Aix 1905.

Mémoires des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. VI. Sér T. 2, Cah. 2. Paris et Bordeaux 1904.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1903/04 Paris et Bordeaux 1903.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1903 à Mai 1904. Note de *G. Rayet*. Bordeaux 1904.

Mémoires de la Société nationale des sciences natnrelles et mathématiques de Cherbourg. T. 34 (Sér. IV, T. 4). Cherbourg 1904.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des sciences et lettres. Sér. III. T. 8. Paris et Lyon 1905.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. Sér. T. 51. Lyon et Paris 1905.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 13—15. Paris et Lyon 1904.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 14. Marseille 1904.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section de médecine. Sér. II. T. 2, No. 2. — Mémoires de la section des sciences. Sér. II. T. 3, No. 4. Montpellier 1904. 05.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Sér. III. T. 5, Fasc. 2—4. T. 6, Fasc. 1. Paris et Nancy 1904. 05.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances. Sér. II. T. 3. Session de 1905. Paris 1905.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1904, No. 4—8. 1905, No. 1—5. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 21, No. 12. T. 22, No. 1—11. Paris 1904. 05.

Journal de l'École polytechnique. Ser. II. Cah. 10. Paris 1905.

Bulletin de la Société mathématiqne de France. T. 32, No. 4. T. 33, No. 1. 2. 4. Paris 1904. 05.

Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'ouest. Tom. 13, No. 3. 4. T. 14, No. 1. Rennes 1904. 05.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Sér. X. T. 5. Toulouse 1905.

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulonse. Ann. 16 (No. 63—65). Ann. 17 (No. 66. 67). Toulouse 1904. 05.

Bibliothèque méridionale, publ. sous les auspices de la Faculté des lettres de Toulouse. Sér. I. T. 9. Toulouse 1904.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Sér. II. T. 6, Fasc. 2—4. T. 7, Fasc. 1. 2. Paris et Toulouse 1904. 05.

Bulletin de la Commission météorologique du Département de la Haute Garonne. T. I, fasc. 3. Toulouse 1904.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique [Athen]. Année 29. Paris 1905.

Mitteilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abteilung. Bd. 29, H. 3. 4. Bd. 30, H. 1—3. Athen 1904. 05.

Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T. 16. No. 3. 4. T. 17. No. 1—4. Athen 1904. 05. — *Hatzidakis, Geo. N.*, Die Sprachenfrage in Griechenland. — *Derselbe*, *Ἀπάντησις εἰς τὸν* K. Krumbacher. ib. 1905.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1904. Amsterdam 1905.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks. Deel 6, No. 1. Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 9, No. 1. Sect. II. Deel 11. 12, No. 1. 2. Amsterdam 1905. — Total Eclipse of the sun. May 18. 1901. Dutch Observations. III. IV (Utrecht 1905).

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 13. I. II. Amsterdam 1904. 05.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoenfftiano indicti in annum 1906. — *Pascoli, Joh.*, Fanum Apollinis. Carmen in certamine poetico Hoenfftiano praemio aureo ornatum. Acced. 7 poemata laudata. Amstelodami 1905.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 13, P. 1. 2. Amsterdam 1905.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 6. St. 3. 4. Deel 7. St. 1. — Wiskundige Opgaven. N. R. Deel 9. St. 3. Amsterdam 1904. 05.

Natuurkundige Verhandelingen v. de Hollandsche Maatschappij de wetenschappen. 3. Verzam. Deel 6, St. 1. Haarlem 1905.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 10, Livr. 1—5. Harlem 1905.

Oeuvres complètes de *Christiaan Huygens*, publ. par la Société hollandaise des sciences. T. 10. La Haye 1905.

Koeze, G. A., Crania ethnica Philippinica (Veröffentlichnngen des Niederländischen Reichsmnseums f. Völkerkunde. Ser. II. No. 3). Haarlem 1901—04.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 9, P. 3 Harlem 1905.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1904/05. Leiden 1905.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1904/5. Leiden 1905.

Tijdschrif voor Nederlandsche taal-en letterkunde. Uitgeg. vanwege de Maatschapp. d. Nederl. Letterknnde. Deel 23, Afd. 1—4 Deel 24, Afd. 1—3. Leiden 1904. 05.

Hesseling, D. C., Het Negerhollands der Deense Antillen. Uitg. van wege de Maatsch. d. Nederl Letterkunde te Leiden. Leiden 1905.

Verslagen en mededeelingen der Nederl. botan. Vereeniging (1905). — Recueil des travaux botaniques néerlandaises, publ. par la Société botanique néerlandaise. Vol. 1, No. 2—4. Vol. 2, No. 1. 2. Nijmegen 1904. 05.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden 1902—04. Leiden 1905.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol Laboratorinm d. Utrechtsche Hoogeschool. 5. Reeks. V, Afl. 2. VI, Afl. 1. 2. Utrecht 1905.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden d. 31. Mai 1904 en 6. Jun. 1905.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergad. van het Provinc. Utrechtsche Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 7. Jun. 1905.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 48—60. Firenze 1904. 05.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 10 (1899/1900). [Rendiconti e] Memorie. Ser. III. Vol. 2 (1902/03) Classe di scienze. Vol. 3 (1903/04) Classe di lettere e arti. Acireale 1904. 05.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. V. T. 10 (1902/03). Indice generale d. T. 1—10 (1890—1903). Ser. VI. T. 1. Bologna 1904.

Rendiconto delle sessioni della R. Accad. dell' Istituto di Bologna. N. S. Vol. 5—8. Bologna 1901—04.

Atti della Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. Ser. IV. Vol. 17. Catania 1904.

Bollettino delle sedute della Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. N. S. Fasc. 80—86. Catania 1904—05.

Atti della R. Accademia Peloritana. Vol. 20, Fasc. 1. Messina 1905.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola. Vol. 19. Milano 1905.

Le Opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale sotti gli auspici di S. M. il Re d' Italia. Vol. 15. Firenze 1904.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze storiche e morali Vol. 20, Fasc. 3—5. — Classe di scienze matematiche e naturali Vol. 20, Fasc. 6. Milano 1904. 05.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II. Vol. 37 Fasc. 17—20. Vol. 38, Fasc. 1—16. Milano 1904. 05.

Società Reale di Napoli. Atti della R. Accad. di archeologia, lettere e belle arti. Vol. 23. Rendiconto. N. S. Ann. 17. Apr.—Dic. Ann. 18. — Atti della R. Accad. di scienze morali e politiche. Vol. 35. Rendiconto. Ann. 42. 43. — Atti della R. Accad. delle scienze fisiche et matematiche. Ser. II. Vol. 12. — Rendiconto. Ser. III. Vol. 10 (Anno 43), Fasc. 8—12. Vol. 11 (Anno 44), Fasc. 1—7. — Indice generale dei lavori pubbl. dal 1737 al 1903. Napoli 1904. 05.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 20. Padova 1905.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 19 (1905), Fasc. 1—6. — Annuario. 1905. Palermo d. J.

Università di Perugia. Annali della Facoltà di Medicina. Vol. 2, Fasc. 2. Vol. 3, Fasc. 2—4. Perugia 1903.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze filos. e filol. Vol. 18. Pisa 1905.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 14. No. 6—8. Pisa 1905.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V. Notizie degli scavi. Vol. 1, Fasc. 4—12. Vol. 2, Fasc. 1—7. Rendiconti. Vol. 13 (1904), Fasc. 9—12. Vol. 14 (1905), Fasc. 1—6. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Ser. V. Memorie. Vol. 5, Fasc. 5—13. Rendiconti. Vol. 13 (1904), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 14 (1905) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—10. Rendiconto dell' adunanza solenne del 4. Giugn. 1905. Roma 1904. 05.

Mitteilungen des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 19, H. 3. 4. Bd. 20, H. 1. 2. Roma 1904. 05.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 17, No. 1—4. — Museo mineralogico, geologico e paleontologico. Cataloghi. Siena 1905.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 40, Disp. 1—15. Torino 1905.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 55. Torino 1905.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1904 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1905.

Portugal.

Annales scientificos da Academia polytechnica do Porto. Vol. 1. No. 1. Coimbra 1905.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 13, No. 5. 6. Anul 14, No. 1—5. Bucuresci 1904. 05.

Rußland.

Observations météorologiques publ. par l'Institut météorologique central de la Societé des sciences de Finlande. Vol. 18. 19 (1899. 1900). — Observations météorologiqnes faites à Helsingfors en 1899. 1900. Helsingfors 1905. — État des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1893—94. Exposé par *Axel Heinrichs*. Kuopio 1904. 05.

Öfversigt af Finska Vetenskaps Societetens Förhandlingar. 46. Helsingfors 1904.

Bulletin de la Commission géologique de Finlande No. 15. 16. Helsingfors 1905.

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan. Ser. II. T. 14, No. 2—4. Kasan 1904.

Učenyja zapiski Imp. Kasanskago Universiteta. T. 71, No. 12. T. 72, No. 1—10. Kasan 1904. 05. — 3 Dissertationen a. d. J. 1904.

Universitetskija Izvěstija. God 44, No. 11. 12. God 45, No. 1—10. Kiev 1904. 05.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1904, No. 2—4. Moscou d. J.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. 16, Liv. 3. 4. Moscou 1905.

Učenyja zapiski Imp. Moskovskago Universiteta. Otděl estestvenno-istor. Vyp. 21. 22. Otd. jurid. Vyp. 22. Moskva 1904.

Periodičeskij Izdanije po istor.-filol. fakultet. Imp. Moskovsk. Universiteta 1896—1900.

Meteorologische Beobachtungen in Moskau i. d. J. 1899—1903, von *Ernst Leyst.* — *Leyst, E.*, Moskovskii uragan. — *Derselbe*, Die Halophänomene in Rußland. Moskva 1903.

Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. Ser. V. T. 17, 4. 5. T. 18—20, 21, 1-4. St. Pétersbourg 1902—04.

Mémoires de l'Académie de sciences de St. Pétersbourg. Sér. VIII. Classe physico-mathématique. Vol. 16, No. 4—10. Classe historico-philologique. Tom. 7, No. 1. 2. St. Pétersbourg 1904.

Académie Imp. des sciences. Comptes rendus des séances de la Commission Sismique permanente. T. 2. Livr. 1. St. Pétersbourg 1905.

Comité géologique. Bulletins. T. 23, 1—6. Mémoires. N. Sér. No. 10—11. 13—15. 17. S. Pétersbourg 1904.

Acta Horti Petropolitani T. 15, Fasc. 3. T. 23, Fasc. 3. T. 24, Fasc. 1. 2. S. Peterburg 1904. 05.

Trudy Peterburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbonrg. T. 34, 2. 3. — Protokoly zasědanij. Vol. 34, Liv. 1, No. 1. Vol. 35, Liv. 1, No. 1—8. Vol. 36, Liv. 1, No. 1—3. S. Pétersbourg 1904. 05.

Otčet o sostojanij i dějatelnosti Imp. S. Petersburgsk. Universita za 1904. S. Petersburg 1904.

Ličnyj sostav Imp. S. Peterburgsk. Universiteta 1904.

Spisok knig priobrčennych bibliotekoju Imp. S. Peterburgsk Universiteta v. 1904, No. 1. S. Peterburg 1904.

Zapiski istoriko-filolegičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgskago Universiteta. Čast 75. 77. S. Peterburg 1904. 05.

Žurnaly Zasedanij sovėta Imp. S. Peterburgsk. Universiteta. No. 59. 60. S. Peterburg 1904. 05.

Vizantijskij Vremennik (*Βυζαντινά Χρονικά*), izdavaemyi pri Imp. Akad. nauk. T. 11, Vyp. 1—4. S. Petersburg 1904.

Seismische Monatsberichte des Physikalischen Observatoriums zu Tiflis. 1904, No. 2. 3. 7—12. 1905, No. 1—5.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 18. 19. 1903. 04. Stockholm 1904. 05.

Bergens Museum. Aarbog for 1904, H. 3. 1905, H. 1. 2. — Aarsberetning for 1904. Bergen 1905.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 5, P. 7—10. Bergen 1905.

Hydrographical and Biological Investigations in Norwegian Fjords. By *O. Nordgaard.* Bergen 1905.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 26. Kristiania 1904. 05.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1904. Christiania 1905.

Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1904. Hist.-filos. Kl. 1904. Kristiania 1905.

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1903. Christiania 1904.

Nyt magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 42. Christiania 1904.

Det Kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1902/03. — Norske Elvenavne, samlede af *O. Rygh*. Christiania 1904.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 39 (1903) I. II.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler*. 19, 2-4. 30, 1. Stockholm 1905.

Arkiv för botanik, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 3, H. 4. Bd, 4, H. 1—3. Stockholm 1905.

Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 2, H 1. Stockholm 1905.

Arkiv för mathematik, astronomi och fysik, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 1, H. 3/4. Bd. 2, H. 1/2. Stockholm 1904. 05.

Arkiv för zoologi, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 2, H. 1—3. Stockholm 1905.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 37, 3. 39, 1-5. Stockholm 1903. 05.

Peter Artedi. A bicentary Memoir written on behalf of the Swedish Roy. Acad. of sciences by *Einar Lönneberg*. Trad. by *W. E. Harlock*. Uppsala et Stockholm 1905.

Meddelanden från K. Vetenskaps academiens Nobelinstitut. Bd. 1, No. 1. Uppsala et Stockholm 1905.

Les prix Nobel en 1902. Stockholm 1905.

Meddelanden från Nordiska Museet. 1903. Stockholm 1905.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 25 (1904). Stockholm d. J.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Bd. 8, No. 2. Stockholm 1904.

Det Kong. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1904. Trondhjem 1905.

Nova Acta reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. IV. Vol. 1, Fasc. 1. Upsala 1905.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 36 (1904). Upsal 1903. 04.

Hildebrand Hildebrandsson, H., Rapport sur les observations internationales des nuages au Comité internat. météorologique. II. Upsala 1905.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsal. Vol. 6 (1902/03). Upsala 1905.

Collijn, Isak, Katalog öfver Västerås läkaverksbiblioteks inkunabler. Upsala 1904.

Schweiz.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft zu Winterthur (1904). Winterthur 1905.

Taschenbuch der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau für 1904. Aargau.

Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd 5, H. 1. Basel 1905.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 17. 18, H. 1. Basel 1904. 05.

Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem J. 1904 (No. 1565—1590). Bern 1905.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Bd. 47. Chur 1905.

Universität Freiburg. Collectanea Friburgensia. N. F. 6. 7. Friburgi Helv. 1905.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève T. 34, P. 5. T. 35, P. 1. Genève 1905.

Recueil de travaux publ. par la Société d. lettres de Neuchatel. Fasc. 1. Neuchatel 1905.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 6, No. 2—4. Bd. 7, No. 1—3. Zürich 1905.

Schweizerisches Landesmuseum. 13. Jahresbericht (1904). Zürich 1905.

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Bd. 30. Zürich 1905.

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz (Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse). N. F. Lief. 16. — Erläuterungen zur geologischen Karte der Schweiz. No. 4. Bern 1905 [Polytechnikum Zürich].

Festschrift zur Feier des 50-jähr. Bestehens des eidgenöss. Polytechnikums Zürich. T. 1. 2. Zürich 1905.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 49, H. 3. 4. Jahrg. 50, H. 1—3. Zürich 1905.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 69. — Godišnjak. 18 (1904). — Spomenik 41. Beograd 1904. 05.

Sbornik za istorii, jesik i knjichevnost spiskoga naroda. Zapisi i natpisi 1, 3. 2, 1. Beograd 1904.

Srpske etnografske Sbornik. Knjiga 4. Beograd 1905.

Stogodišńica srpskoga ustanka. Beograd 1904.

Afrika.

Transactions of the South African Philosophical Society. Vol. 15, P. 3—5. Vol. 16, P. 1. 2. Cape Town 1904. 05.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1903. Vol. 1. 2. Washington 1904.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 35 (1904). Boston d. J.

The Astronomical and Astrophysical Society of America. 6. Meeting. S.-A. New York 1905.

Digitized by Google

Journal of the American Oriental Society. Vol. 26, No. 1. New Haven 1905.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 15. Rochester 1904.

Miscellaneous scientific Papers of the Alleghany Observatory. N. Ser. No. 17. Lancaster 1903.

Maryland Geological Survey. Miocene. Baltimore 1904.

The Johns Hopkins University Circular. 1904, No. 1—8. 1905, No. 1—7. Baltimore 1904. 05.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 26. 27, No. 1—3. Baltimore 1904. 05.

American Journal of Philology. Vol. 25. 26, No. 1. 2. Baltimore 1904. 05.

American chemical Journal. Vol. 31, No. 4—6. Vol. 32. 33. 34, No. 1. 2. Baltimore 1904. 05.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. 22. 23, No. 1—10. Baltimore 1904. 05.

Memoirs from the Biological Laboratory of the Johns Hopkins University. 5. Baltimore 1903.

Hollander, J. H., The financial history of Baltimore. Baltimore 1899.

University of California Publications. Botany. Vol. 2, No. 2. Zoology. Vol. 2, No. 3. Berkeley 1904. 05.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences. [Boston]. Vol. 13, No. 2. Cambridge 1904.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 40, No. 8—24. Vol. 41, No. 1—13. — The Rumford Fund of the American Academy of arts and sciences. Boston 1904. 05.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 5, No. 10. 11. Vol. 6, No. 1. Boston 1903—05.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 31, No. 1—10. Vol. 32, No. 1. 2. Boston 1903. 04.

Occasional Papers of the Boston Society of natural history. 7, No. 1—3. Boston 1904.

The Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences. Bulletin. Vol. 1, No. 5. 6. Brooklyn 1905.

Cold Spring Harbor Monographs. 3—5. Brooklyn 1905.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 42, No. 6. Vol. 45, No. 4. Vol. 46, No. 2—7. Vol. 47. 48, No. 1. Cambridge, Mass. 1904. 05.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 25, No. 2. Vol. 26, No. 5. Vol. 30, No. 2. Vol. 31. 32. Cambridge, Mass. 1904. 05.

Harvard Oriental Series. Vol. 5. 6. Cambridge, Mass. 1904.

Field Columbian Museum. Publications. No. 93. 94. 96—101. 103. Chicago 1904. 05.

The Botanical Gazette. Vol. 38, No. 6. Vol. 39. 40, No. 1—5. Chicago 1904. 05.

The decennial publications of the University of Chicago. Ser. I, Vol. 1—10. Chicago 1903.

Report of the Director of the Yerkes Observatory of the University of Chicago for 1899—1904.

American Journal of Semitic Languages and Literature. Vol. 21, No. 3. Chicago 1905.

University of Cincinnati Record. Ser. I. Vol. 1, No. 4. 5. 7—11. Vol. 2, No. 2. 4—6. — Studies. Ser. II. Vol. 1, No. 1—4. 7. Cincinnati 1904. 05.

Colorado College Studies. No. 16. 17. — Science Series. No. 33—38. Colorado Springs 1904. 05.

Bulletin of the University of Missouri. Vol. 5, No. 11. Vol. 6, No. 1. — Columbia University of Missouri Studies. Social Science Series. Vol. 1.

Laws Observatory University of Missouri Bulletin. No. 2—5. Columbia, Miss. 1904. 05.

Iowa Geological Survey. Vol. 14. Annual Report 1903. Des Moines 1904.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 15, No. 1—6. Granville 1905.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of science Sess. 1902/03. Vol. 11. P. 1. Halifax 1905.

Missouri Bureau of Geology and Mines. Ser. II. Vol. 1. 2. — Biennial Report of the State Geologist to the 42. and 43. General Assembly 1903. — *Gallaher, John A.*, Preliminary Report on the structural and economic Geology of Missouri. Jefferson City 1900—05.

Proceedings of the Indiana Academy of sciences. 1903. Indianapolis 1904.

Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. II. Vol. 11, No. 4—10. Vol. 12, No. 1—3. Lancaster 1905. — Annual Register. New York 1905.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 6, No. 1—4. and Indices to Vol. 1—5. Lancaster and New York 1904. 05.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 14, 2. Madison 1904.

Collections of the State Historical Society of Wisconsin. Vol. 1—3 (Reprint). Vol. 11—16 (1888—1902). Madison 1888—1904.

Proceedings of the State Historical Society of Wisconsin. Ann. Meet. 47—52 (1899—1904). Madison 1900—05.

Bulletin of the University of Wisconsin. Economic and Politic Science Series. Vol. 1, No. 1. 2. Vol. 2, No. 2—4. — Engineering Series. Vol. 2, No. 1—10. Vol. 3, No. 1. — Historical Series. Vol. 1, No. 1. 2. Vol. 2, No. 1. — Philology and Literature Series. Vol. 1, No. 1—4. Vol. 2, No. 1—3. Vol. 3, No. 1. 2. — Science Series. Vol. 2, No. 1—6. Vol. 3, No. 1—3. Madison 1896—1905.

Anales de la Academia Mexicana de sciencias exactas, fisicas y naturales. T. 1, Num. 1. 2. México 1903.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 13, Cuad. 9. 10. T. 19, Cuad. 11. 12. T. 20, Cuad. 11. 12. T. 21, Cuad. 1—8. México 1903. 04.

Bulletin of the Wisconsin Natural History Society. Vol. 3, No. 4. 23. Annual Report. Milwaukee 1905.

Lick Observatory, University of California. [Mount Hamilton.] Bulletin. No. 65. 66. 68—70. 72—87. Sacramento 1904. 05.

Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University. Vol. 1, P. 7/8. New Haven 1904.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 15, P. 3. Vol. 16, P. 1. 2. New York 1904. 05.

Memoirs of the New York Academy of sciences. Vol. 2, P. 4. New York 1905.

Archaeological Institute of America. Supplementary Papers of the American School of classical Studies in Rome Vol. 1. New York 1905.

American Museum of Natural History. Bulletin. Vol. 17, P. 3. Vol. 18, P. 3. Vol. 20. — Memoirs. Vol. 3. No. 3. — Annual Report for 1904. New York 1904. 05. — Album of Philippine Types. Manila 1904.

The American Museum Journal. Vol. 5, No. 1—4. New York 1905.

American Geographical Society. Bulletin. Vol. 36, No. 12. Vol. 37, No. 1. 2. New York 1904. 05.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 8, No. 4 and Suppl. Vol. 9, No. 1—3. Norwood Mass. 1904. 05.

Oberlin College. The Wilson Bulletin. N. S. Vol. 11, No. 2—4. Vol. 12, No. 1—3. Oberlin, Ohio 1904. 05.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 10. Ottawa 1905.

Geological Survey of Canada. Catalogue of Canadian Birds. — Relief Map of the Dominion of Canada. Ottawa 1904. — Ontario Windsor Shet. 1. S.-W. — Statistics of the Dominion of Canada.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Vol 56, P. 2. 3. Vol. 57, P. 1. 2. Philadelphia 1904. 05.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. No. 177—180. Philadelphia 1904. 05.

The American Association to promote the teaching of speech to the deaf. Circular of information, June 1904. Philadelphia.

Transactions of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. N. S. Vol. 21, P. 1. Philadelphia 1905.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 14, No. 7. 8. Vol. 15, No. 1—5. St. Louis 1904. 05.

California Academy of sciences. Constitution and by-laws, officer, trustees and members. San Francisco 1904.

Memoirs of the California Academy of sciences. Vol. 3. 4. San Francisco 1903. 04.

Proceedings of the California Academy of sciences. Botany. Vol. 2, No. 11. — Geology. Vol. 1, P. 10. — Zoology. Vol. 3, P. 7—13. San Francisco 1904.

Transactions of the Kansas Academy of science. Vol. 19. Topeka 1905.

Transactions of the Canadian Institute. Vol. 8, P. 1 (No. 16). Toronto 1905.

University of Toronto Studies. History and Economics. Vol. 2, No. 3. Vol. 3, No. 1. — Geological Series. No. 3. — Psychological Series. Vol. 2, No. 2. — Papers from the chem. Laboratories. No. 44—51. — Review of Historical Publications relating to Canada 1904. — Biological Series. No. 4. Toronto 1904. 05.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 7, No. 4. Urbana 1905.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1903. Vol. 1. 2. Washington 1905.

Bulletin of the Bureau of Standards. Vol. 1, No. 1. 2. Washington 1905.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1440. 1444. 1477. 1478. 1543. 1544. 1571. 1572. 1584. — Quarterly Issue. Vol. 2, P. 3. 4. Vol. 3, P. 1. Washington 1904. 05.

Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1459. Washington 1904.

Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Annual Report. 21. 22 (1899/1900. 1900/01). Report of the U. S. National Museum. 1902/03. — Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. 9. Washington 1905.

Carnegie Institution of Washington. Contributions from the Solar Observatory Mt. Milson, Calif. No. 1. 2. — Publication 23. 24. 30. Washington 1905.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for 1902/03. Washington 1904.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1903, to June 30, 1904 with Appendix, No. 3—9. Washington 1904.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey. — Professional Papers. No. 29—33. 35. 39. Washington 1904. 05.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 208 (bis). 234—240. 242—246. 248—250. 252—255. 257—262. 264. — Water Supply and Irrigation Papers. No. 99. 100. 103. 105—122. 124. 126. 128. 132. Washington 1904. 05.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 25. 1903/1904. Washington 1904.

Monographs of the U. S. Geological Survey. 47. Washington 1905.

Mineral Resources of the U. S. 1903. Washington 1904.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 58, Entr. 4—6. T. 59. 60, Entr. 1—3. Buenos Aires 1904. 05.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. 17, Entr. 4. T 18, Entr 1. Cordoba 1904. 05.

Boletin del Cuerpo de Ingenieros de minas del Perú. No. 5. 10. 15—18. 19—21. 24—26. Lima 1904. 05.

Boletin de la Sociedad geográfica de Lima. T. 15, Trim. 1. 2. Lima 1904.

Direccion general de estadistica de la Provincia de Buenos Aires. Demografía. Año 1900—02. La Plata 1904. 05.

Anales del Museo nacional de Montevideo. Flora Uruguaya. Entr. 2. 3. Montevideo 1905.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1905. (Anno 21.) Rio de Janeiro 1905.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1904. Rio de Janeiro 1904.

Digitized by Google

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 14, Livr. 1—3. Santiago 1904.

Revista da sociedade scientifica de São Paulo No. 1. São Paulo 1905.

Asien.

Notulen van de algemeene en directie vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 42, Afl. 3. 4. Batavia 1904.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 47, Afl. 6. Deel 48, Afl. 1. Batavia 1904. 05.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Ann. 1656—1657. 's Gravenhage 1904.

Rapporten van de Commissie in Nederl. Indië vor ondheidkundige onderzoek op Java en Madoera. Uitg. van het Batav. Genootsch. van kunst. en wetensch. 1901—03. Batavia, 's Gravenhage 1904. 05.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 64 (Scr. X, Deel 8). Weltevreden, Amsterdam 1905.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 26. 1903. Batavia 1905.

Linguistic Survey of India. Vol. 2. 3. 6. Calcutta 1904.

Annual Report of the Board of scientific advise for India for the year 1904/05. Calcutta 1905.

Indian Museum. Annual Report. 1903/04. — Catalogue of the Indian Decapod Crustacea in the Collection of the Indian Museum. P. 2. Anomura. Fasc. 1. By *A. Alcock*. — Echinoderma of the Indian Museum. An Account of the Deep-Sea Holothurioidea collect. by the R. Ind. Marine Survey Ship Investigator. By *R. Köhler* and *C. Vaney*. Calcutta 1905.

Department of the Interior. Ethnological Survey Publications. Vol. 1. 2, P. 1. Manila 1904. 05.

Publications of the Earthquake Investigation Committee. No. 19—21. Tōkyō 1904.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. 14. 20, 3-7. Tōkyō 1904. 05.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 5, No. 3. Bd. 6, No. 3. Tokio 1904. 05.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 5, P. 3. 4. Tokyo 1904. 05.

Memoirs of the College of science and engineering, Kyōto Imp. University. Vol. 1, No. 2. Kyōto 1904/05.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. S. Vol. 17, P. 2. Vol. 18, P. 1. Melbourne 1905.

2. Einzelne Schriften.

Abbe, Ernst, Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. Jena 1906.

25 Jahre Verlagstätigkeit der Firma *Johann Ambrosius Barth* 1887—1905.

Brandstetter, R., Rätoromanische Forschungen. I. Luzern 1905.

Felix, J., und *Lenk, H.*, Beiträge zur Geologie und Paläontologie der Republik Mexico. T. 2, H. 1—3. Leipzig 1893—99.

Fischer-Treuenfeld, R. v., Paraguay. Ein historischer Abriß. S.-A. Braunschweig 1905.

Goppelsroeder, Friedr., Studien über die Anwendung der Capillaranalyse. I. II. Basel 1904.

— Anregung zum Studium der auf Capillaritäts- und Adsorptionserscheinungen beruhenden Capillaranalyse. Basel 1906.

Hänzel, Edm., Die Empfindungen als Abbildungen des Hirnstoffs. Leipzig o. J.

— Die Vereinigung der theologisch-sittlichen Weltanschauung mit der Naturwissenschaft. Leipzig o. J.

— Der Einheitstrieb in einer moralischen Wissenschaft nnd Weltanschauung. Zeitz 1891.

— Ein Universalkörper als Träger der stofflich-seelischen Gebilde. Leipzig o. J.

— Die Körperreaktion gegen das Licht als Ursache der Reflexion, Brechung und Polarisation des Lichtes gegenüber den Röntgenstrahlen. Leipzig o. J.

Hofmann, Theobald, Bauten des Herzogs Federigo di Montefeltro als Erstwerke der Hochrenaissance. o. O. u. J.

— Raffael und seine Bedeutung als Architekt. Dresden 1900.

Janet, Charles, Anatomie du gastre de la Myrmica rubra. Paris 1902.

Observations sur les guêpes. Paris 1903.

— Observations sur les fourmis. Paris 1904.

Kerntler, Franz, Die Ermittelung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes. Budapest 1905.

Kiseljak, M., Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Größen mit drei Einheiten. Bonn 1905.

Lichtneckert, Jos., Neue wissenschaftliche Lebenslehre des Weltalls. Leipzig 1903.

Marcuse, Ado., Handbuch der geographischen Ortsbestimmung. Braunschweig 1905.

Montessus de Balore, R. de, Sur les fonctions continues algébriques. S.-A. Palermo 1905.

Rudolph, H., Luftelektrizität und Sonnenstrahlung. Leipzig 1903.

— Luftelektrizität, Eigenentladung der Erde und Aktivität der freien Luft. S.-A. o. O. u. J.

— Über die Unzulässigkeit der gegenwärtigen Theorie der Materie. (Schulprogr.) Coblenz 1905.

— Über die Ursache der Sonnenflecken. S.-A. Wien 1899.

Samuelson, Arnold, Luftwiderstand und Flugfrage. Hamburg 1904.

Saville, Marsall H., Funeral Urns from Oaxaca. S.-A. New York 1904.

Hugo Schuchardt an Adolf Mussafia. Graz 1905.

Stoll, Hans, Alkohol und Kaffee in ihrer Wirkung auf Herzleiden und nervöse Störungen. 2. Aufl. Leipzig 1905.

Strazzulla, V., Dopo lo Strabone Vaticano. Messina 1901.

– Sulle fonti epigrafiche della prima guerra punica. Teramo 1902.

– I Persiani di Eschilo ed il nomo di Timoteo. Messina 1904.

INHALT.

Seite

W. Scheibner, Zur Auflösung der Ikosaedergleichung 372

G. F. Lipps, Zwei Briefe von Wilhelm Weber an G. Th. Fechner über das psychische Maß 388

Verzeichnis der Mitglieder der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften I

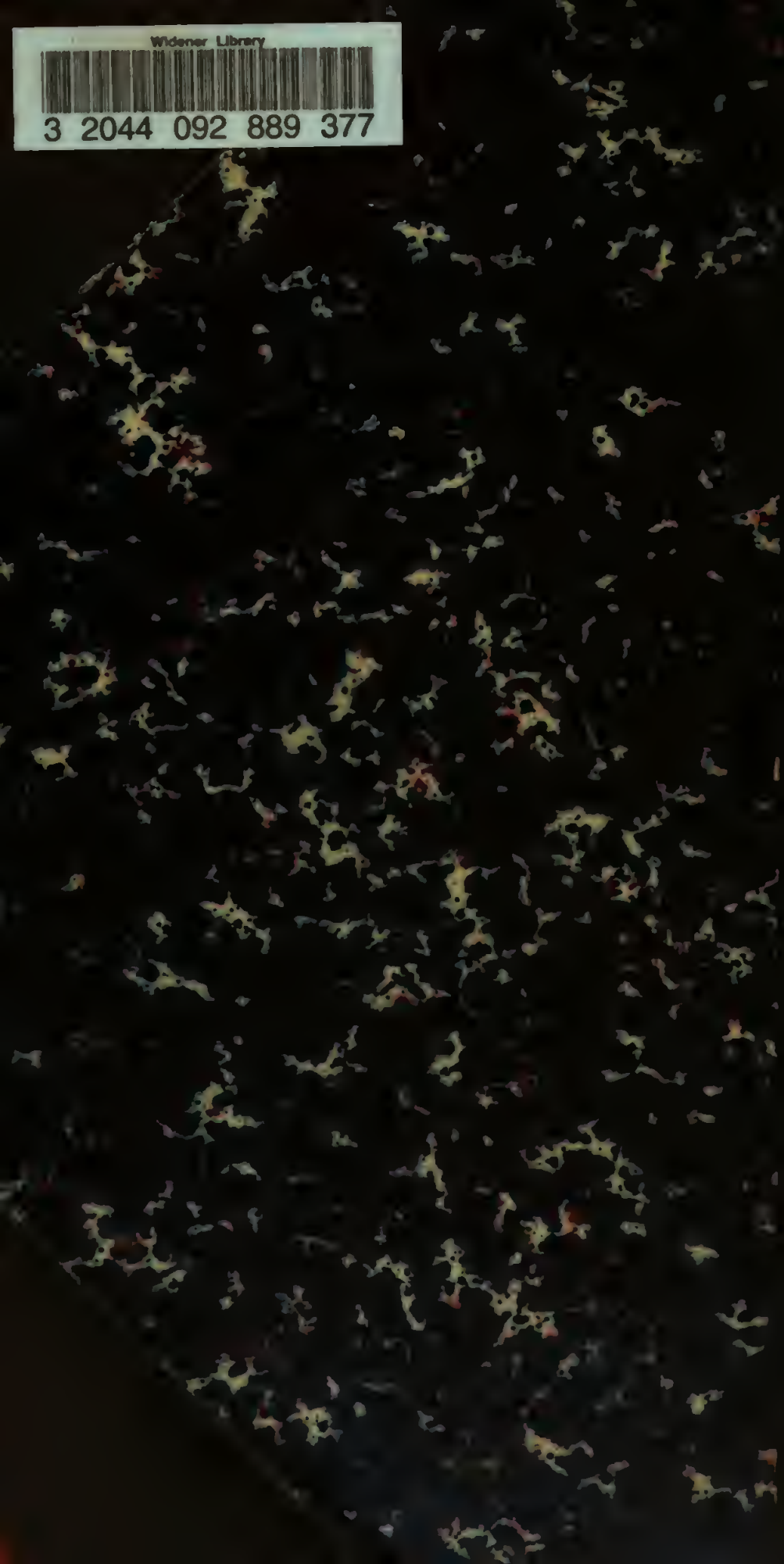
Verzeichnis der eingegangenen Schriften VI

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

THE BORROWER WILL BE CHARGED
AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT
RETURNED TO THE LIBRARY ON OR
BEFORE THE LAST DATE STAMPED
BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE
NOTICES DOES NOT EXEMPT THE
BORROWER FROM OVERDUE FEES.

APR 22
MAY 1
1569

Widener Library
3 2044 092 889 377



Digitized by Google